平成16年度　鹿児島大学２次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成16年2月25日

- 理[数理・物理]・工・医[医]学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ 必答，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から1問選択，$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ から1問選択，$\boxed{10}$ 〜 $\boxed{13}$ から1問選択．数II・III・A・B・C(120分)
- 理[地環・生命化]，医[理学療法]・歯・農・水産学部は，$\boxed{3}$ 必答，$\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ から1問選択，$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ から1問選択．数II・A・B(90分)
- 教育[数学・理科・技術・教育・心理・家政・養護・健康]学部は，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$ 必答，$\boxed{7}$ 〜 $\boxed{9}$ から1問選択．数II・III・B(90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標平面上に4点O(0, 0)，A(2, 0)，B(2, 2)およびC(0, 2)がある．正方形OABCの辺上を点Oを出発して，毎秒 a ($a > 0$) の速さで反時計まわり(O → A → B → C → O)に運動する点の t 秒後の位置をPとする．OPの長さの2乗を t の関数と考えて $f(t)$ で表す．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(t)$ のグラフの概形を $0 \leqq t \leqq \dfrac{8}{a}$ の範囲でかけ．

(2) $0 < b < \dfrac{2}{a}$ とする．このとき，(1)で求めたグラフ上の2点 $(b,\ f(b))$，$\left(b+\dfrac{4}{a},\ f\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\right)$ で引いた2本の接線が直交するような b が存在するための a の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x) = 1 + 2\sqrt{x} - x$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減や凹凸などを調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形を $0 \leqq x \leqq 5$ の範囲でかけ．

(2) 関数 $f(x)$ において，x の範囲を $0 \leqq x \leqq 5$ とするとき，曲線 $y = f(x)$ を x 軸のまわりに1回転してできる立体の容器を考える．容器は横になっている．底面 ($x = 0$) は閉まっているものとする．開口部(上面)は $x = 5$ の位置である．この容器の底面から $x = h$ ($0 \leqq h \leqq 5$) までの容積 V を h を用いて表せ．

(3) (2)で考えた容器を開口部を上向きにして立て，底面を水平に固定する．開口部以外は密閉されているものとする．そこに毎秒 a ($a > 0$) の割合で水を注ぐ．底面からの水面の高さ h が4となるときの時刻 t およびそのときの水面が上昇する速度を求めよ．ただし，水を注ぎ始める時刻を0とする．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a > 1$ とする．2つの2次関数 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$，$g(x) = x^2 - 2(a-1)x + 3$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標と y 座標を求めよ．

(2) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ とで囲まれた図形の面積 S を a の式で表せ．

(3) (1) で求めた2つの交点 A，B と点 C(1, 4) を頂点とする三角形 ABC の面積を T とする．$T : S = 1 : k$ とするとき，k の最小値およびそのときの a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $x < 1$，$y < 1$，$z < 1$ のとき，不等式 $xyz + x + y + z < xy + yz + zx + 1$ が成り立つことを示せ．

(2) $a = \dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$ のとき，$a + \dfrac{1}{a}$，$a^2 + \dfrac{1}{a^2}$，$a^5 + \dfrac{1}{a^5}$ の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 2$ で，第3項 $a_3 = -\dfrac{1}{2}$ である．$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_k$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$とするとき，数列 $\{S_n\}$ は等比数列となった．このとき次の各問いに答えよ．

(1) S_n を n の式で表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 三角形 ABC の内接円の中心を $\mathrm{O_1}$，この内接円と辺 AB，AC，BC との接点をそれぞれ $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ とする．また，辺 AB を B の方向に伸ばした延長線，辺 AC を C の方向に伸ばした延長線，および辺 BC と接する三角形 ABC の傍接円の中心を $\mathrm{O_2}$ とし，この傍接円と辺 AB の延長線，辺 AC の延長線，辺 BC との接点をそれぞれ $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$，$\mathrm{Q_3}$ とする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{P_1Q_1} = \mathrm{P_2Q_2}$ であることを示せ．

(2) $\mathrm{BP_3} + \mathrm{BQ_3} = \mathrm{CP_3} + \mathrm{CQ_3}$ であることを示せ．

$\boxed{7}$ 四面体ABCDがある．点Pが $10\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}+3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たしているとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ．

(2) 直線APと三角形BCDとの交点をQとしたとき，次の式を満たす実数 s，t，k を求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{BC}}+t\overrightarrow{\mathrm{BD}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

(3) 四面体ABCDと四面体PBCDの体積の比を求めよ．

$\boxed{8}$ z_1，z_2 は複素数で，$z_1\neq z_2$，$z_1\neq 1$，$z_2\neq 1$ および $\arg(z_1-1)=\arg(z_2-1)$ を満たすものとする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 複素数平面上において，2点 z_1，z_2 を結ぶ直線 l は，点1を通ることを示せ．

(2) $\arg(z_1-1)=\arg(z_2-1)=\arg(i-1)$ であるとき，(1) の直線 l の方程式を求め，これを図示せよ．ここで，i は虚数単位である．

(3) 2点 z_1，z_2 が (2) で求めた直線 l 上にあり，かつ $\dfrac{z_1}{|z_1|}$，$-\dfrac{z_2}{|z_2|}$ が3次方程式 $z^3-1=0$ の解であるとき，z_1 を求めよ．

$\boxed{9}$ AチームはB，C，D，Eの4チームと1試合ずつ野球の試合をする．AチームがB，C，D，Eのチームに勝つ確率は，それぞれ $\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．Aチームが勝つ試合の数を X とする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) Aチームが少なくとも1つのチームに勝つ確率を求めよ．

(2) Aチームがちょうど1つのチームに勝つ確率を求めよ．

(3) X の確率分布および平均 (期待値)$E(X)$ を求めよ．

$\boxed{10}$ 行列 X，Y，O を $X=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ とおく．ただし，a，b，c，d は実数である．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $XY=YX$ が成り立つための a，b，c，d の条件を求めよ．

(2) $X^2=Y^2$ を満たす a，b，c，d の組をすべて求めよ．また，それらの a，b，c，d の組が $XY=YX$ を満たすことを示せ．

(3) $(X-Y)(X+Y)=O$ かつ $XY=YX$ ならば，$X^2=Y^2$ であることを示せ．

(4) $(X-Y)(X+Y)=O$ を満たし，$X^2=Y^2$ を満たさない a，b，c，d の組をすべて求めよ．

11 原点 O を中心とし半径 a の円 O と，点 C を中心とし半径 b $(b < a)$ の円 C が座標平面上にある．円 O の内側を円 C が内接しながら滑ることなく転がるときの円 C 上の定点 P の軌跡を考える．円 O 上に定点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとる．点 P が点 A と重なるように円 C を円 O に内接させる．その位置から円 C が回転して $\angle \mathrm{AOC} = \theta$ の位置まで移動したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．ただし，角度は弧度法で考える．このとき次の各問いに答えよ．

(1) P の軌跡の方程式を θ を媒介変数として表せ．

(2) $a = 4b$ のとき，P の軌跡の方程式を a，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ．

12 $I = \displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$ とおく．区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して台形公式を適用したときの I の近似値を I_n と表す．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 分点の x 座標を小さい方から $x_0 = 0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = 1$ としたとき，I_n を n と x_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ を用いて表せ．

(2) $y = x^3$ のグラフの概形を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲でかき，I_2 はどのような領域の面積を表しているか図示せよ．

(3) $I_n - I$ を n の式で表せ．必要ならば，公式

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + m^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$$

を用いてもよい．

13 母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，その標本平均を $\overline{X}$ とする．また，標本平均 $\overline{X}$ は平均 m，分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布 $N(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n})$ にしたがうとする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $\overline{X}$ の変換 $\dfrac{\overline{X} - a}{b}$ が，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがうように a と b を定めよ．

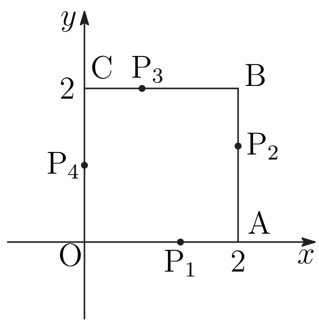
(2) 標本平均 $\overline{X}$ を用いて母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ．また，その信頼区間を導きだす過程も示せ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがうとき，$P(Z > 1.96) = 0.025$ であるとする．

(3) 母標準偏差 σ が 5 のとき，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間の幅が 2 以下となる標本の大きさ n の最小値を求めよ．

正解

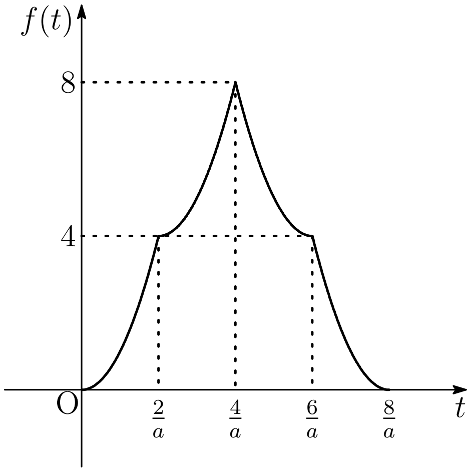
$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{a}$ のとき

$$f(t) = \mathrm{OP_1}^2 = (at)^2 = a^2t^2$$



(ii) $\dfrac{2}{a} \leqq at \leqq \dfrac{4}{a}$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AP_2}^2 \\ &= 2^2 + (at-2)^2 \\ &= a^2\left(t - \frac{2}{a}\right)^2 + 4 \end{aligned}$$



(iii) $\dfrac{4}{a} \leqq t \leqq \dfrac{6}{a}$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathrm{OC}^2 + \mathrm{CP_2}^2 \\ &= 2^2 + (6-at)^2 \\ &= a^2\left(t - \frac{6}{a}\right)^2 + 4 \end{aligned}$$

(iv) $\dfrac{6}{a} \leqq at \leqq \dfrac{8}{a}$ のとき　　$f(t) = \mathrm{OP_4}^2 = (8-at)^2 = a^2\left(t - \dfrac{8}{a}\right)^2$

(i)〜(iv) から，$f(t)$ のグラフの概形は右の図のようになる．

(2) $0 < b < \dfrac{2}{a}$，$\dfrac{4}{a} < b + \dfrac{4}{a} < \dfrac{6}{a}$ であるから

(i) のとき　$f'(t) = 2a^2t$,　　(iii) のとき　$f'(t) = 2a^2\left(t - \dfrac{6}{a}\right)$

ゆえに　　$f'(b) = 2a^2b$,　　$f'\left(b + \dfrac{4}{a}\right) = 2a^2\left(b - \dfrac{2}{a}\right)$

このとき，$f'(b)f'\left(b + \dfrac{4}{a}\right) = -1$ であるから

$$2a^2b \times 2a^2\left(b - \frac{2}{a}\right) = -1 \quad \text{整理すると} \quad 4a^4b^2 - 8a^3b + 1 = 0$$

上の b に関する 2 次方程式が実数解をもつから　$(-4a^3)^2 - 4a^4 \cdot 1 \geqq 0$

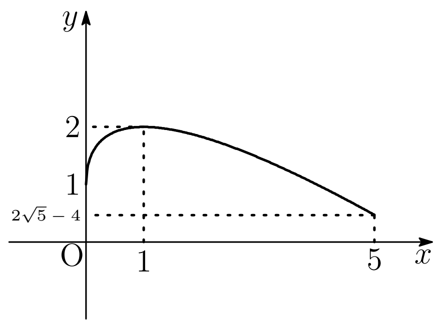
$a > 0$ に注意してこれを解くと　$a \geqq \dfrac{1}{2}$　　よって，a の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=1+2\sqrt{x}-x$ より

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-1=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \qquad f''(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

したがって，グラフの増減・凹凸およびグラフの概形は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$2\sqrt{5}-4$



(2) $V=\pi\int_0^h(1+2\sqrt{x}-x)^2\,dx=\pi\int_0^h(x^2-4x\sqrt{x}+2x+4\sqrt{x}+1)\,dx$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+x^2+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+x\right]_0^h$$

$$=\boldsymbol{\pi\left(\frac{1}{3}h^3-\frac{8}{5}h^2\sqrt{h}+h^2+\frac{8}{3}h\sqrt{h}+h\right)}$$

(3) (2) の結果に $h=4$ を代入すると　$V=\dfrac{172\pi}{15}$　よって　$t=\boldsymbol{\dfrac{172\pi}{15a}}$

$V=\pi\int_0^h(1+2\sqrt{x}-x)^2\,dx$ より　$\dfrac{dV}{dh}=\pi(1+2\sqrt{h}-h)^2$

$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\dfrac{dh}{dt}$ に上式および $\dfrac{dV}{dt}=a$ を代入すると

$$a=\pi(1+2\sqrt{h}-h)^2\frac{dh}{dt}$$

したがって　$\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{a}{\pi(1+2\sqrt{h}-h)^2}$

よって，$h=4$ のとき　$\boldsymbol{\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{a}{\pi}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x)=-x^2+2x+3$，$g(x)=x^2-2(a-1)x+3$．$f(x)=g(x)$ とすると

$$-x^2+2x+3=x^2-2(a-1)x+3 \quad \text{ゆえに} \quad x(x-a)=0$$

よって　$\boldsymbol{(0,\ 3),\ (a, -a^2+2a+3)}$

(2) $S=\displaystyle\int_0^a \{f(x)-g(x)\}\,dx=-2\int_0^a x(x-a)\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}a^3}$

(3) A$(0,\ 3)$，B$(a, -a^2+2a+3)$ とし，C$(1,\ 4)$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a, -a^2+2a), \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1)$$

$a>1$ に注意して　$T=\dfrac{1}{2}|a\cdot 1-(-a^2+2a)\cdot 1|=\dfrac{1}{2}|a(a-1)|=\dfrac{1}{2}a(a-1)$

$$k=\frac{S}{T}=\frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{2}a(a-1)}=\frac{2a^2}{3(a-1)}=\frac{2}{3}\left(a-1+\frac{1}{a-1}+2\right)$$

ここで，$a-1>0$ より，相加平均・相乗平均の関係により

$$a-1+\frac{1}{a-1} \geqq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}=2 \quad \text{ゆえに} \quad k \geqq \frac{8}{3}$$

上式において等号が成立するのは

$$a-1=\frac{1}{a-1} \quad \text{すなわち} \quad a=2$$

よって，$\boldsymbol{a=2}$ のとき k は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$ をとる．

$\boxed{4}$ (1) $x-1<0,\ y-1<0,\ z-1<0$ であるから $(x-1)(y-1)(z-1)<0$

よって $xyz+x+y+z<xy+yz+zx+1$

(2) $$a+\frac{1}{a}=\frac{2}{3-\sqrt{5}}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\mathbf{3}$$

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=3^2-2=\mathbf{7}$$

$$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)=3^3-3\cdot 3=18$$

$\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(a^3+\dfrac{1}{a^3}\right)=a^5+\dfrac{1}{a^5}+a+\dfrac{1}{a}$ であるから

$$7\times 18=a^5+\frac{1}{a^5}+3 \quad よって \quad a^5+\frac{1}{a^5}=\mathbf{123}$$

$\boxed{5}$ (1) 等比数列 $\{S_n\}$ の初項は $S_1=a_1=2$，公比を r とすると

$$S_2=a_1-a_2=2r,\quad S_3=a_1-a_2+a_3=2r^2$$

上の第 2 式から第 1 式を引くと $a_3=2r^2-2r$

これに $a_3=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると $-\dfrac{1}{2}=2r^2-2r$

整理すると $(2r-1)^2=0$ ゆえに $r=\dfrac{1}{2}$

よって $S_n=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n-2}}$

(2) $n \geqq 2$ のとき $S_n-S_{n-1}=(-1)^{n-1}a_n$

これに (1) の結果を代入すると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=(-1)^{n-1}a_n$$

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=(-1)^{n-1}a_n$$

$$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

よって $\boldsymbol{a_n}=\left(-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\boldsymbol{n-2}}$ **($\boldsymbol{n} \geqq \mathbf{2}$ のとき)**

$\boldsymbol{a_1}=\mathbf{2}$

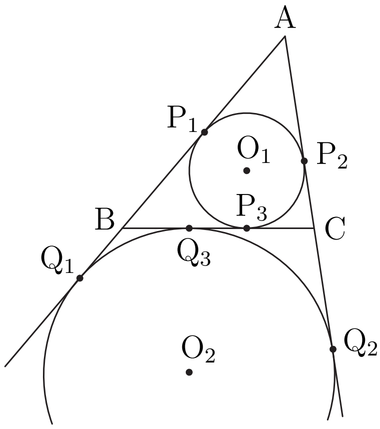
6 (1) A から O_1，O_2 に引いた 2 接線により

$$AP_1 = AP_2, \quad AQ_1 = AQ_2$$

第 2 式から第 1 式の辺々の差をとると

$$AQ_1 - AP_1 = AQ_2 - AP_2$$

よって　　$P_1Q_1 = P_2Q_2$



(2) B から O_1，O_2 に引いた 2 接線により　$BP_3 = BP_1$，　$BQ_3 = BQ_1$

上の 2 式の辺々を加えると　　$BP_3 + BQ_3 = BP_1 + BQ_1 = P_1Q_1$　$\cdots$①

C から O_1，O_2 に引いた 2 接線により　$CP_3 = CP_2$，　$CQ_3 = CQ_2$

上の 2 式の辺々を加えると　　$CP_3 + CQ_3 = CP_2 + CQ_2 = P_2Q_2$　$\cdots$②

①，② および (1) の結果から　　$BP_3 + BQ_3 = CP_3 + CQ_3$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $10\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ より

$$-10\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}}) + 3(\overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AP}})$$

よって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= -\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}}) \\ &= -\frac{3}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{6} \qquad \cdots ①\end{aligned}$$

Q は平面 BCD 上の点であるから，上式より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{6} \qquad \cdots ②$$

①，② より $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ よって $\boldsymbol{k = -\frac{2}{3}}$

また，② より

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}} = \frac{-\overrightarrow{\mathrm{BA}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}}) + 3(\overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{BA}})}{6}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ よって $\boldsymbol{s = \frac{1}{3},\ t = \frac{1}{2}}$

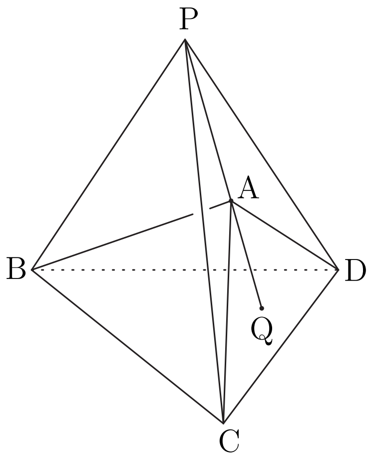
(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より

$$-\overrightarrow{\mathrm{QA}} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{QP}} - \overrightarrow{\mathrm{QA}})$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{QP}} = \frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{QA}}$

四面体 ABCD と四面体 PBCD の体積比は

$$\mathrm{AQ} : \mathrm{PQ} = \mathbf{2 : 5}$$



$\boxed{\mathbf{8}}$ (1)
$$\arg\frac{z_1-1}{z_2-1}=\arg(z_1-1)-\arg(z_2-1)=0$$

ゆえに，3 点 1，z_1，z_2 は同一直線上にある．
よって，2 点 z_1，z_2 を結ぶ直線 l は，点 1 を通る．

(2) $\arg(i-1)=\dfrac{3}{4}\pi$ より，l の傾きは　-1
l は点 1 を通り，傾き -1 の直線であるから

$$y-0=-1(x-1)\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y=-x+1}$$

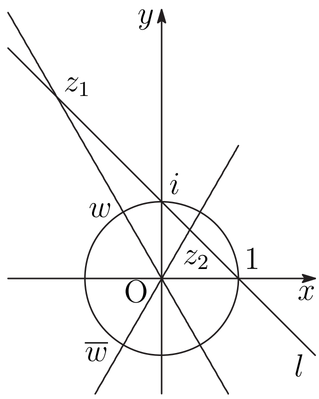
(3) z_1，z_2 は l 上の点で，$z_1\neq1$，$z_2\neq1$ であるから，z_1，z_2 は実数ではない．
したがって，$\dfrac{z_1}{|z_1|}$，$-\dfrac{z_2}{|z_2|}$ は，方程式

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=0$$

の虚数解である．それらを

$$w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$\overline{w}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$$

とおく．w，$\overline{w}$ の偏角はそれぞれ第 2 象限，第 3 象限の角で，(2) で求めた直線は第 3 象限を通らないことから



$$w=\frac{z_1}{|z_1|},\ \overline{w}=-\frac{z_2}{|z_2|}$$

原点 O と w の 2 点を通る直線は，
$\tan(\arg w)=-\sqrt{3}$ より

$$y=-\sqrt{3}x$$

z_1 はこの直線と l の交点であるから

$$\boldsymbol{z_1=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}i}$$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) A チームが B，C，D，E の 4 チームすべてに負ける確率は

$$\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{40}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから $\quad 1-\frac{3}{40}=\boldsymbol{\frac{37}{40}}$

(2) A チームが B チームだけに勝つ確率は $\quad \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{120}$

A チームが C チームだけに勝つ確率は $\quad \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{120}$

A チームが D チームだけに勝つ確率は $\quad \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{18}{120}$

A チームが E チームだけに勝つ確率は $\quad \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{120}$

よって，求める確率は $\quad \frac{6}{120}+\frac{3}{120}+\frac{18}{120}+\frac{9}{120}=\frac{36}{120}=\boldsymbol{\frac{3}{10}}$

(3) (1)，(2) の結果から，$P(X=0)=\frac{9}{120}$，$P(X=1)=\frac{36}{120}$

$$P(X=4)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{120}$$

$$\begin{aligned}P(X=3)&=\left(1-\frac{2}{5}\right)\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\\&\quad+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{24}{120}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X=2)&=1-\{P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)+P(X=4)\}\\&=1-\left(\frac{9}{120}+\frac{36}{120}+\frac{24}{120}+\frac{4}{120}\right)=\frac{47}{120}\end{aligned}$$

したがって，確率分布表は次のようになる．

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{9}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{47}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

よって $\quad$ $$\begin{aligned}E(X)&=0\times\frac{9}{120}+1\times\frac{36}{120}+2\times\frac{47}{120}\\&\quad+3\times\frac{24}{120}+4\times\frac{4}{120}=\frac{218}{120}=\boldsymbol{\frac{109}{60}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{10}}$ (1) $XY = YX$ より $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ゆえに $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$ よって $\boldsymbol{a = d,\ c = 0}$

(2) $X^2 = Y^2$ より $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2$

ゆえに $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$ $\cdots$①

① の両辺の $(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分から $a+d \neq 0$，$c = 0$

$c = 0$ を ① に代入すると，両辺の $(1,1)$ 成分，$(2,2)$ 成分から

$$a^2 = 1,\ d^2 = 1 \quad a+d \neq 0 \text{ に注意して} \quad a = d = \pm 1$$

① の両辺の $(1,2)$ 成分から

$$a = d = 1 \text{ のとき } b = 1, \quad a = d = -1 \text{ のとき } b = -1$$

以上の値は，(1) の $a = d$，$c = 0$ を満たしているので，$XY = YX$ が成り立つ．よって $\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d) = (\pm 1,\ \pm 1,\ 0,\ \pm 1)}$ **(複号同順)**

(3) $(X-Y)(X+Y) = O$ より $X^2 + XY - YX - Y^2 = O$ $\cdots$②

$XY = YX$ と ② により，$X^2 = Y^2$ が成り立つ．

(4) $X-Y=\begin{pmatrix} 1-a & 1-b \\ -c & 1-d \end{pmatrix}$，$X+Y=\begin{pmatrix} 1+a & 1+b \\ c & 1+d \end{pmatrix}$ であるから，これらを $(X-Y)(X+Y)=O$ に代入すると

$$\begin{pmatrix} 1-a^2+c(1-b) & -b(a+d)-a+d+2 \\ -c(a+d) & -c(b+1)+1-d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots ③$$

③ の両辺の (2,1) 成分から，$c=0$ または $a+d=0$ である．

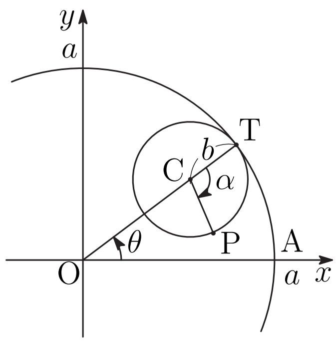
i) $c=0$ のとき，
③ の両辺の (1,1) 成分と (2,2) 成分から　$a^2=d^2=1$
② より，$X^2=Y^2$ であることと $XY=YX$ であることは同値である．$X^2\neq Y^2$ すなわち $XY\neq YX$ であるとき，(1) の結果から $a\neq d$ となり，③ の (2,2) 成分を満たすのは，$(a,d)=(1,-1)$．このとき，任意の数 b に対して，③ は成立する．

ii) $a+d=0$ のとき，
③ の (1,2) 成分より　$(a,\ d)=(1,-1)$
③ の両辺の (1,1) 成分と (2,2) 成分から

$$c(1-b)=0, \quad -c(b+1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad b \text{は任意の数}, c=0$$

よって　$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b}$ **は任意の数**，$\boldsymbol{c=0}$，$\boldsymbol{d=-1}$

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) O と C の接点を T とし，$\alpha = \angle\mathrm{TCP}$ とすると，$\overset{\frown}{\mathrm{AT}} = \overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから



$$a\theta = b\alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha = \frac{a}{b}\theta$$

$\mathrm{OC} = a - b$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (a-b)(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = b(\cos(\theta-\alpha),\ \sin(\theta-\alpha))$$

$\theta - \alpha = \dfrac{b-a}{b}\theta$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}\\ &= (a-b)(\cos\theta,\ \sin\theta) + b\left(\cos\frac{b-a}{b}\theta,\ \sin\frac{b-a}{b}\theta\right)\end{aligned}$$

よって $$\boldsymbol{x = (a-b)\cos\theta + b\cos\frac{b-a}{b}\theta,}$$
$$\boldsymbol{y = (a-b)\sin\theta + b\sin\frac{b-a}{b}\theta}$$

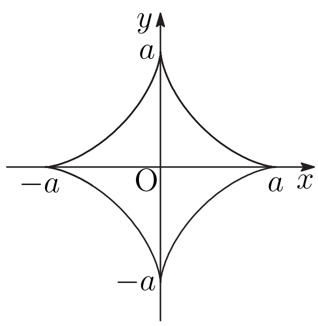
(2) $b = \dfrac{1}{4}a$ であるから，これを (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned}x &= \frac{3}{4}a\cos\theta + \frac{1}{4}a\cos(-3\theta)\\ &= \frac{a}{4}(3\cos\theta + \cos 3\theta) = \boldsymbol{a\cos^3\theta}\\ y &= \frac{3}{4}a\sin\theta + \frac{1}{4}a\sin(-3\theta)\\ &= \frac{a}{4}(3\sin\theta - \sin 3\theta) = \boldsymbol{a\sin^3\theta}\end{aligned}$$

解説 (2) の結果から

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

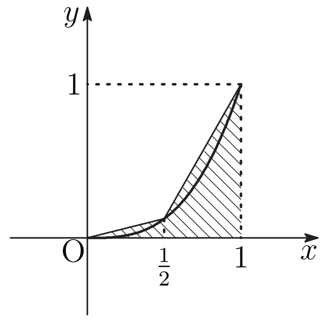
この曲線をアステロイド (asteroid) または星芒形(せいぼうけい)という．



$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) $y_k = {x_k}^3$ とすると

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(y_{k-1}+y_k) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} y_{k-1} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} y_k \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} y_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} y_k \\
&= \frac{1}{2n}y_0 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{1}{2n}y_n \\
&= \frac{1}{2n}y_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} y_k + \frac{1}{2n}y_n \\
&= \frac{1}{2n}{x_0}^3 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} {x_k}^3 + \frac{1}{2n}{x_n}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} {x_k}^3 + \frac{1}{2n}}
\end{aligned}
$$

(2) I_2 は右の図の斜線部分の面積を表す.



(3) $x_k = \dfrac{k}{n}$ であるから，これを (1) の結果に代入すると

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1} k^3 + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n-1)^2 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2}
\end{aligned}
$$

また　　$I = \displaystyle\int_0^1 x^3\,dx = \left[\,\frac{1}{4}x^4\,\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

よって　　$\boldsymbol{I_n - I = \dfrac{1}{4n^2}}$

$\boxed{\mathbf{13}}$ (1) $Z=\dfrac{\overline{X}-a}{b}$ に対して

$$E(Z)=\frac{1}{b}(E(\overline{X})-a)=\frac{1}{b}(m-a),\quad V(Z)=\frac{1}{b^2}V(\overline{X})=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

$E(Z)=0$，$V(Z)=1$ のとき

$$\frac{1}{b}(m-a)=0,\quad \frac{1}{b^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}=1$$

よって　$\boldsymbol{a=m,\ b=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(2) $P(|Z|\leqq 1.96)=1-2P(Z>1.96)$
$\qquad =1-2\times 0.025=0.95$

したがって，信頼度 95% の信頼区間は　$|Z|\leqq 1.96$

(1) の結果から，$Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ であるから　$\left|\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right|\leqq 1.96$

よって　$\boldsymbol{\overline{X}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\leqq m\leqq \overline{X}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(3) (2) の結果から，$\sigma=5$ のとき，信頼区間の幅は

$$1.96\frac{5}{\sqrt{n}}\times 2=\frac{19.6}{\sqrt{n}}$$

これが 2 以下であるから

$$\frac{19.6}{\sqrt{n}}\leqq 2\quad ゆえに\quad \sqrt{n}\geqq 9.8$$

したがって　$n\geqq 96.04$　よって，n の最小値は　**97**