平成16年度　鹿児島大学２次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成16年2月25日

- 理[数理・物理]・工・医[医]学部 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から1問選択，$\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ から1問選択，$\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$ $\boxed{13}$ から1問選択．
数II・III・A・B・C(120分)

- 理[地環・生命化]，医[理学療法]・歯・農・水産学部 $\boxed{3}$ 必答，
$\boxed{4}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ から1問選択，$\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ から1問選択．数II・A・B(90分)

- 教育[数学・理科・技術・教育・心理・家政・養護・健康]学部 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，
$\boxed{7}$ $\boxed{8}$ $\boxed{9}$ から1問選択．数II・A・Bまたは数III・A・B(90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 座標平面上に4点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 2)$ および $\mathrm{C}(0,\ 2)$ がある．正方形OABCの辺上を点Oを出発して，毎秒 a $(a > 0)$ の速さで反時計まわり $(\mathrm{O} \to \mathrm{A} \to \mathrm{B} \to \mathrm{C} \to \mathrm{O})$ に運動する点の t 秒後の位置をPとする．OPの長さの2乗を t の関数と考えて $f(t)$ で表す．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(t)$ のグラフの概形を $0 \leqq t \leqq \dfrac{8}{a}$ の範囲でかけ．

(2) $0 < b < \dfrac{2}{a}$ とする．このとき，(1)で求めたグラフ上の2点 $(b,\ f(b))$，$\left(b+\dfrac{4}{a},\ f\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\right)$ で引いた2本の接線が直交するような b が存在するための a の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x) = 1 + 2\sqrt{x} - x$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減や凹凸などを調べ，$y = f(x)$ のグラフの概形を $0 \leqq x \leqq 5$ の範囲でかけ．

(2) 関数 $f(x)$ において，x の範囲を $0 \leqq x \leqq 5$ とするとき，曲線 $y = f(x)$ を x 軸のまわりに1回転してできる立体の容器を考える．容器は横になっている．底面 $(x = 0)$ は閉じているものとする．開口部(上面)は $x = 5$ の位置である．この容器の底面から $x = h$ $(0 \leqq h \leqq 5)$ までの容積 V を h を用いて表せ．

(3) (2)で考えた容器を開口部を上向きにして立て，底面を水平に固定する．開口部以外は密閉されているものとする．そこに毎秒 a $(a > 0)$ の割合で水を注ぐ．底面からの水面の高さ h が4となるときの時刻 t およびそのときの水面が上昇する速度を求めよ．ただし，水を注ぎ始める時刻を0とする．

3 $a>1$ とする．2 つの 2 次関数 $f(x)=-x^2+2x+3$，$g(x)=x^2-2(a-1)x+3$ について，次の各問いに答えよ．

(1) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の x 座標と y 座標を求めよ．

(2) 2 つの曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ とで囲まれた図形の面積 S を a の式で表せ．

(3) (1) で求めた 2 つの交点 A，B と点 C(1, 4) を頂点とする三角形 ABC の面積を T とする．$T:S=1:k$ とするとき，k の最小値およびそのときの a の値を求めよ．

4 次の各問いに答えよ．

(1) $x<1$，$y<1$，$z<1$ のとき，不等式 $xyz+x+y+z<xy+yz+zx+1$ が成り立つことを示せ．

(2) $a=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$ のとき，$a+\dfrac{1}{a}$，$a^2+\dfrac{1}{a^2}$，$a^5+\dfrac{1}{a^5}$ の値をそれぞれ求めよ．

5 数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1=2$ で，第 3 項 $a_3=-\dfrac{1}{2}$ である．$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とするとき，数列 $\{S_n\}$ は等比数列となった．このとき次の各問いに答えよ．

(1) S_n を n の式で表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ．

6 三角形 ABC の内接円の中心を $\mathrm{O_1}$，この内接円と辺 AB，AC，BC との接点をそれぞれ $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ とする．また，辺 AB を B の方向に伸ばした延長線，辺 AC を C の方向に伸ばした延長線，および辺 BC と接する三角形 ABC の傍接円の中心を $\mathrm{O_2}$ とし，この傍接円と辺 AB の延長線，辺 AC の延長線，辺 BC との接点をそれぞれ $\mathrm{Q_1}$，$\mathrm{Q_2}$，$\mathrm{Q_3}$ とする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $\mathrm{P_1Q_1}=\mathrm{P_2Q_2}$ であることを示せ．

(2) $\mathrm{BP_3}+\mathrm{BQ_3}=\mathrm{CP_3}+\mathrm{CQ_3}$ であることを示せ．

7 四面体 ABCD がある．点 P が $10\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{PC}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たしているとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ．

(2) 直線 AP と三角形 BCD との交点を Q としたとき，次の式を満たす実数 s，t，k を求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{BC}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$$

(3) 四面体 ABCD と四面体 PBCD の体積の比を求めよ．

8 z_1，z_2 は複素数で，$z_1 \neq z_2$，$z_1 \neq 1$，$z_2 \neq 1$ および $\arg(z_1 - 1) = \arg(z_2 - 1)$ を満たすものとする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 複素数平面上において，2 点 z_1，z_2 を結ぶ直線 l は，点 1 を通ることを示せ．

(2) $\arg(z_1 - 1) = \arg(z_2 - 1) = \arg(i - 1)$ であるとき，(1) の直線 l の方程式を求め，これを図示せよ．ここで，i は虚数単位である．

(3) 2 点 z_1，z_2 が (2) で求めた直線 l 上にあり，かつ $\dfrac{z_1}{|z_1|}$，$-\dfrac{z_2}{|z_2|}$ が 3 次方程式 $z^3 - 1 = 0$ の解であるとき，z_1 を求めよ．

9 A チームは B，C，D，E の 4 チームと 1 試合ずつ野球の試合をする．A チームが B，C，D，E のチームに勝つ確率は，それぞれ $\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．A チームが勝つ試合の数を X とする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) A チームが少なくとも 1 つのチームに勝つ確率を求めよ．

(2) A チームがちょうど 1 つのチームに勝つ確率を求めよ．

(3) X の確率分布および平均 (期待値)$E(X)$ を求めよ．

10 行列 X，Y，O を $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．ただし，a，b，c，d は実数である．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $XY = YX$ が成り立つための a，b，c，d の条件を求めよ．

(2) $X^2 = Y^2$ を満たす a，b，c，d の組をすべて求めよ．また，それらの a，b，c，d の組が $XY = YX$ を満たすことを示せ．

(3) $(X - Y)(X + Y) = O$ かつ $XY = YX$ ならば，$X^2 = Y^2$ であることを示せ．

(4) $(X - Y)(X + Y) = O$ を満たし，$X^2 = Y^2$ を満たさない a，b，c，d の組をすべて求めよ．

11 原点 O を中心とし半径 a の円 O と，点 C を中心とし半径 b $(b < a)$ の円 C が座標平面上にある．円 O の内側を円 C が内接しながら滑ることなく転がるときの円 C 上の定点 P の軌跡を考える．円 O 上に定点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとる．点 P が点 A と重なるように円 C を円 O に内接させる．その位置から円 C が回転して $\angle\mathrm{AOC} = \theta$ の位置まで移動したときの点 P の座標を $(x,\ y)$ とする．ただし，角度は弧度法で考える．このとき次の各問いに答えよ．

(1) P の軌跡の方程式を θ を媒介変数として表せ．

(2) $a = 4b$ のとき，P の軌跡の方程式を a，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ．

12 $I = \displaystyle\int_0^1 x^3\,dx$ とおく．区間 $[0,\ 1]$ を n 等分して台形公式を適用したときの I の近似値を I_n と表す．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 分点の x 座標を小さい方から $x_0 = 0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n = 1$ としたとき，I_n を n と x_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ を用いて表せ．

(2) $y = x^3$ のグラフの概形を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲でかき，I_2 はどのような領域の面積を表しているか図示せよ．

(3) $I_n - I$ を n の式で表せ．必要ならば，公式

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + m^3 = \left\{\frac{m(m+1)}{2}\right\}^2$$

を用いてもよい．

13 母平均 m，母標準偏差 σ の母集団から大きさ n の無作為標本を抽出するとき，その標本平均を $\overline{X}$ とする．また，標本平均 $\overline{X}$ は平均 m，分散 $\dfrac{\sigma^2}{n}$ の正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ にしたがうとする．このとき次の各問いに答えよ．

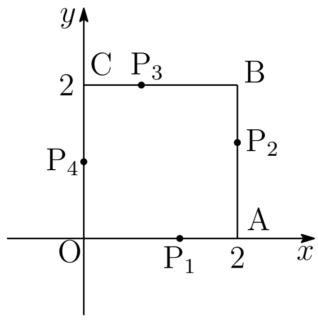
(1) $\overline{X}$ の変換 $\dfrac{\overline{X} - a}{b}$ が，標準正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがうように a と b を定めよ．

(2) 標本平均 $\overline{X}$ を用いて母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ．また，その信頼区間を導きだす過程も示せ．ただし，確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ にしたがうとき，$P(Z > 1.96) = 0.025$ であるとする．

(3) 母標準偏差 σ が 5 のとき，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間の幅が 2 以下となる標本の大きさ n の最小値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1)

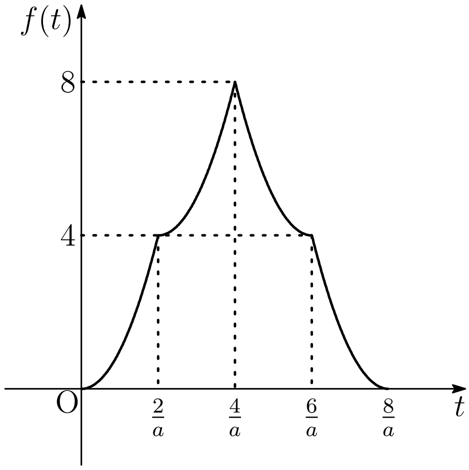


(i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{a}$ のとき

$$f(t) = \mathrm{OP_1}^2 = (at)^2 = a^2t^2$$

(ii) $\dfrac{2}{a} \leqq at \leqq \dfrac{4}{a}$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathrm{OA}^2 + \mathrm{AP_2}^2 \\ &= 2^2 + (at-2)^2 \\ &= a^2\left(t - \frac{2}{a}\right)^2 + 4 \end{aligned}$$



(iii) $\dfrac{4}{a} \leqq t \leqq \dfrac{6}{a}$ のとき

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathrm{OC}^2 + \mathrm{CP_2}^2 \\ &= 2^2 + (6-at)^2 \\ &= a^2\left(t - \frac{6}{a}\right)^2 + 4 \end{aligned}$$

(iv) $\dfrac{6}{a} \leqq at \leqq \dfrac{8}{a}$ のとき　$f(t) = \mathrm{OP_4}^2 = (8-at)^2 = a^2\left(t - \dfrac{8}{a}\right)^2$

(i)〜(iv) から，$f(t)$ のグラフの概形は右の図のようになる．

(2) $0 < b < \dfrac{2}{a}$，$\dfrac{4}{a} < b + \dfrac{4}{a} < \dfrac{6}{a}$ であるから

(i) のとき　$f'(t) = 2a^2t$，　　(iii) のとき　$f'(t) = 2a^2\left(t - \dfrac{6}{a}\right)$

ゆえに　　$f'(b) = 2a^2b$，　$f'\left(b + \dfrac{4}{a}\right) = 2a^2\left(b - \dfrac{2}{a}\right)$

このとき，$f'(b)f'\left(b + \dfrac{4}{a}\right) = -1$ であるから

$$2a^2b \times 2a^2\left(b - \frac{2}{a}\right) = -1 \quad 整理すると \quad 4a^4b^2 - 8a^3b + 1 = 0$$

上の b に関する 2 次方程式が実数解をもつから　$(-4a^3)^2 - 4a^4{\cdot}1 \geqq 0$

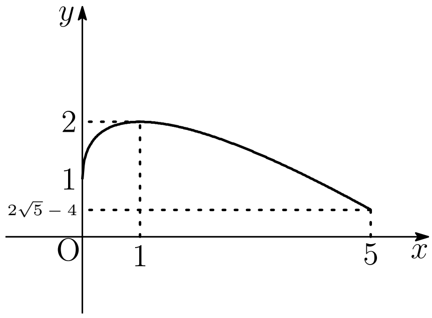
$a > 0$ に注意してこれを解くと　$a \geqq \dfrac{1}{2}$　　よって，a の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$　■

2 (1) $f(x)=1+2\sqrt{x}-x$ より

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-1=\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \qquad f''(x)=-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

したがって，グラフの増減・凹凸およびグラフの概形は次のようになる．

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$2\sqrt{5}-4$



(2) $V=\pi\int_0^h(1+2\sqrt{x}-x)^2\,dx=\pi\int_0^h(x^2-4x\sqrt{x}+2x+4\sqrt{x}+1)\,dx$

$$=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{8}{5}x^2\sqrt{x}+x^2+\frac{8}{3}x\sqrt{x}+x\right]_0^h$$

$$=\boldsymbol{\pi\left(\frac{1}{3}h^3-\frac{8}{5}h^2\sqrt{h}+h^2+\frac{8}{3}h\sqrt{h}+h\right)}$$

(3) (2) の結果に $h=4$ を代入すると $V=\dfrac{172\pi}{15}$ よって $t=\boldsymbol{\dfrac{172\pi}{15a}}$

$V=\pi\displaystyle\int_0^h(1+2\sqrt{x}-x)^2\,dx$ より $\dfrac{dV}{dh}=\pi(1+2\sqrt{h}-h)^2$

$\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{dV}{dh}\dfrac{dh}{dt}$ に上式および $\dfrac{dV}{dt}=a$ を代入すると

$$a=\pi(1+2\sqrt{h}-h)^2\frac{dh}{dt}$$

したがって $\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{a}{\pi(1+2\sqrt{h}-h)^2}$

よって，$h=4$ のとき $\boldsymbol{\dfrac{dh}{dt}=\dfrac{a}{\pi}}$ ■

3 (1) $f(x)=-x^2+2x+3$，$g(x)=x^2-2(a-1)x+3$．$f(x)=g(x)$ とすると

$$-x^2+2x+3=x^2-2(a-1)x+3 \quad ゆえに \quad x(x-a)=0$$

よって　$\boldsymbol{(0,\ 3),\ (a, -a^2+2a+3)}$

(2) $S=\displaystyle\int_0^a \{f(x)-g(x)\}\,dx=-2\int_0^a x(x-a)\,dx=\boldsymbol{\frac{1}{3}a^3}$

(3) $\mathrm{A}(0,\ 3)$，$\mathrm{B}(a, -a^2+2a+3)$ とし，$\mathrm{C}(1,\ 4)$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a, -a^2+2a),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1,\ 1)$$

$a>1$ に注意して　$T=\dfrac{1}{2}|a\cdot 1-(-a^2+2a)\cdot 1|=\dfrac{1}{2}|a(a-1)|=\dfrac{1}{2}a(a-1)$

$$k=\frac{S}{T}=\frac{\frac{1}{3}a^3}{\frac{1}{2}a(a-1)}=\frac{2a^2}{3(a-1)}=\frac{2}{3}\left(a-1+\frac{1}{a-1}+2\right)$$

ここで，$a-1>0$ より，相加平均・相乗平均の関係により

$$a-1+\frac{1}{a-1}\geqq 2\sqrt{(a-1)\cdot\frac{1}{a-1}}=2 \quad ゆえに \quad k\geqq\frac{8}{3}$$

上式において等号が成立するのは

$$a-1=\frac{1}{a-1} \quad すなわち \quad a=2$$

よって，$\boldsymbol{a=2}$ のとき k は最小値 $\boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$ をとる． ■

$\boxed{4}$ (1) $x-1<0$，$y-1<0$，$z-1<0$ であるから　$(x-1)(y-1)(z-1)<0$

よって　$xyz+x+y+z<xy+yz+zx+1$

(2)
$$a+\frac{1}{a}=\frac{2}{3-\sqrt{5}}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\mathbf{3}$$

$$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=3^2-2=\mathbf{7}$$

$$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)=3^3-3\cdot 3=18$$

$\left(a^2+\dfrac{1}{a^2}\right)\left(a^3+\dfrac{1}{a^3}\right)=a^5+\dfrac{1}{a^5}+a+\dfrac{1}{a}$ であるから

$$7\times 18=a^5+\frac{1}{a^5}+3 \quad \text{よって} \quad a^5+\frac{1}{a^5}=\mathbf{123}$$

■

$\boxed{5}$ (1) 等比数列 $\{S_n\}$ の初項は $S_1=a_1=2$，公比を r とすると

$$S_2=a_1-a_2=2r, \quad S_3=a_1-a_2+a_3=2r^2$$

上の第2式から第1式を引くと　$a_3=2r^2-2r$

これに $a_3=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると　$-\dfrac{1}{2}=2r^2-2r$

整理すると　$(2r-1)^2=0$　ゆえに　$r=\dfrac{1}{2}$

よって　$S_n=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}}$

(2) $n \geqq 2$ のとき　$S_n-S_{n-1}=(-1)^{n-1}a_n$

これに (1) の結果を代入すると

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}=(-1)^{n-1}a_n$$
$$-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=(-1)^{n-1}a_n$$
$$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

よって　$\boldsymbol{a_n=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}}$　**($\boldsymbol{n \geqq 2}$ のとき)**

$\boldsymbol{a_1=2}$

■

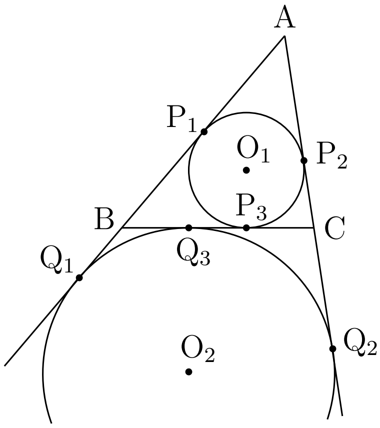
6 (1) A から O_1，O_2 に引いた 2 接線により

$$\mathrm{AP}_1 = \mathrm{AP}_2,\quad \mathrm{AQ}_1 = \mathrm{AQ}_2$$

第 2 式から第 1 式の辺々の差をとると

$$\mathrm{AQ}_1 - \mathrm{AP}_1 = \mathrm{AQ}_2 - \mathrm{AP}_2$$

よって　$\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 = \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$



(2) B から O_1，O_2 に引いた 2 接線により　$\mathrm{BP}_3 = \mathrm{BP}_1,\quad \mathrm{BQ}_3 = \mathrm{BQ}_1$

上の 2 式の辺々を加えると　$\mathrm{BP}_3 + \mathrm{BQ}_3 = \mathrm{BP}_1 + \mathrm{BQ}_1 = \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$　$\cdots$①

C から O_1，O_2 に引いた 2 接線により　$\mathrm{CP}_3 = \mathrm{CP}_2,\quad \mathrm{CQ}_3 = \mathrm{CQ}_2$

上の 2 式の辺々を加えると　$\mathrm{CP}_3 + \mathrm{CQ}_3 = \mathrm{CP}_2 + \mathrm{CQ}_2 = \mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$　$\cdots$②

①，② および (1) の結果から　$\mathrm{BP}_3 + \mathrm{BQ}_3 = \mathrm{CP}_3 + \mathrm{CQ}_3$　■

7 (1) $10\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}+3\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ より

$$-10\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$$

よって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AP}}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AD}}}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=-\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}})\\&=-\frac{3}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{6}\qquad\cdots①\end{aligned}$$

Q は平面 BCD 上の点であるから，上式より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}+3\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{6}\qquad\cdots②$$

①，② より $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ よって $\boldsymbol{k=-\frac{2}{3}}$

また，② より

$$\overrightarrow{\mathrm{BQ}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{BA}}+2(\overrightarrow{\mathrm{BC}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}})+3(\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BA}})}{6}$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ よって $\boldsymbol{s=\frac{1}{3},\ t=\frac{1}{2}}$

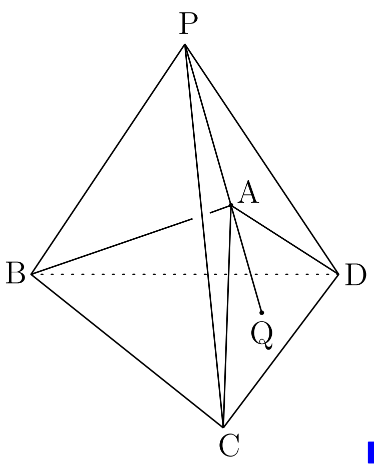
(3) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より

$$-\overrightarrow{\mathrm{QA}}=-\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{QP}}-\overrightarrow{\mathrm{QA}})$$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\frac{5}{2}\overrightarrow{\mathrm{QA}}$

四面体 ABCD と四面体 PBCD の体積比は

$$\mathrm{AQ}:\mathrm{PQ}=\boldsymbol{2:5}$$



$\boxed{8}$ (1)
$$\arg\frac{z_1-1}{z_2-1}=\arg(z_1-1)-\arg(z_2-1)=0$$

ゆえに，3 点 1，z_1，z_2 は同一直線上にある．

よって，2 点 z_1，z_2 を結ぶ直線 l は，点 1 を通る．

(2) $\arg(i-1)=\frac{3}{4}\pi$ より，l の傾きは　-1

l は点 1 を通り，傾き -1 の直線であるから

$$y-0=-1(x-1)\quad\text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y=-x+1}$$

(3) z_1，z_2 は l 上の点で，$z_1\neq1$，$z_2\neq1$ であるから，z_1，z_2 は実数ではない．

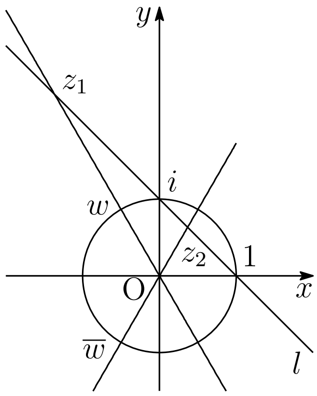
したがって，$\frac{z_1}{|z_1|}$，$-\frac{z_2}{|z_2|}$ は，方程式

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=0$$

の虚数解である．それらを

$$w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$\overline{w}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi$$

とおく．w，$\overline{w}$ の偏角はそれぞれ第 2 象限，第 3 象限の角で，(2) で求めた直線は第 3 象限を通らないことから



$$w=\frac{z_1}{|z_1|},\ \overline{w}=-\frac{z_2}{|z_2|}$$

原点 O と w の 2 点を通る直線は，

$\tan(\arg w)=-\sqrt{3}$ より

$$y=-\sqrt{3}x$$

z_1 はこの直線と l の交点であるから

$$\boldsymbol{z_1=-\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{3+\sqrt{3}}{2}i}$$

■

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) A チームが B，C，D，E の 4 チームすべてに負ける確率は

$$\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{40}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1-\dfrac{3}{40}=\mathbf{\dfrac{37}{40}}$

(2) A チームが B チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{6}{120}$

A チームが C チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{120}$

A チームが D チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{18}{120}$

A チームが E チームだけに勝つ確率は　$\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{120}$

よって，求める確率は　$\dfrac{6}{120}+\dfrac{3}{120}+\dfrac{18}{120}+\dfrac{9}{120}=\dfrac{36}{120}=\mathbf{\dfrac{3}{10}}$

(3) (1)，(2) の結果から，$P(X=0)=\dfrac{9}{120}$，$P(X=1)=\dfrac{36}{120}$

$$P(X=4)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{120}$$

$$\begin{aligned}P(X=3)&=\left(1-\frac{2}{5}\right)\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\left(1-\frac{1}{4}\right)\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\\&\qquad+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{24}{120}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(X=2)&=1-\{P(X=0)+P(X=1)+P(X=3)+P(X=4)\}\\&=1-\left(\frac{9}{120}+\frac{36}{120}+\frac{24}{120}+\frac{4}{120}\right)=\frac{47}{120}\end{aligned}$$

したがって，確率分布表は次のようになる．

X	0	1	2	3	4	計
P	$\frac{9}{120}$	$\frac{36}{120}$	$\frac{47}{120}$	$\frac{24}{120}$	$\frac{4}{120}$	1

よって　$$\begin{aligned}E(X)&=0\times\frac{9}{120}+1\times\frac{36}{120}+2\times\frac{47}{120}\\&\quad+3\times\frac{24}{120}+4\times\frac{4}{120}=\frac{218}{120}=\mathbf{\frac{109}{60}}\end{aligned}$$

■

10 (1) $XY = YX$ より $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ゆえに $\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix}$ よって $\boldsymbol{a = d,\ c = 0}$

(2) $X^2 = Y^2$ より $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2$

ゆえに $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$ $\cdots$①

① の両辺の $(1,2)$ 成分と $(2,1)$ 成分から $a+d \neq 0$，$c = 0$

$c = 0$ を ① に代入すると，両辺の $(1,1)$ 成分，$(2,2)$ 成分から

$$a^2 = 1,\ d^2 = 1 \quad a+d \neq 0 \text{ に注意して} \quad a = d = \pm 1$$

① の両辺の $(1,2)$ 成分から

$$a = d = 1 \text{ のとき } b = 1, \quad a = d = -1 \text{ のとき } b = -1$$

以上の値は，(1) の $a = d$，$c = 0$ を満たしているので，$XY = YX$ が成り立つ．よって $\boldsymbol{(a,\ b,\ c,\ d) = (\pm 1,\ \pm 1,\ 0,\ \pm 1)}$ **(複号同順)**

(3) $(X-Y)(X+Y) = O$ より $X^2 + XY - YX - Y^2 = O$ $\cdots$②

$XY = YX$ と ② により，$X^2 = Y^2$ が成り立つ．

(4) $X-Y=\begin{pmatrix} 1-a & 1-b \\ -c & 1-d \end{pmatrix}$，$X+Y=\begin{pmatrix} 1+a & 1+b \\ c & 1+d \end{pmatrix}$ であるから，これらを $(X-Y)(X+Y)=O$ に代入すると

$$\begin{pmatrix} 1-a^2+c(1-b) & -b(a+d)-a+d+2 \\ -c(a+d) & -c(b+1)+1-d^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \cdots ③$$

③ の両辺の (2,1) 成分から，$c=0$ または $a+d=0$ である．

i) $c=0$ のとき，
③ の両辺の (1,1) 成分と (2,2) 成分から　$a^2=d^2=1$
② より，$X^2=Y^2$ であることと $XY=YX$ であることは同値である．
$X^2 \neq Y^2$ すなわち $XY \neq YX$ であるとき，(1) の結果から $a \neq d$ となり，③ の (2,2) 成分を満たすのは，$(a,d)=(1,-1)$．このとき，任意の数 b に対して，③ は成立する．

ii) $a+d=0$ のとき，
③ の (1,2) 成分より　$(a,\ d)=(1,-1)$
③ の両辺の (1,1) 成分と (2,2) 成分から

$$c(1-b)=0, \quad -c(b+1)=0 \quad \text{ゆえに} \quad b \text{は任意の数}, c=0$$

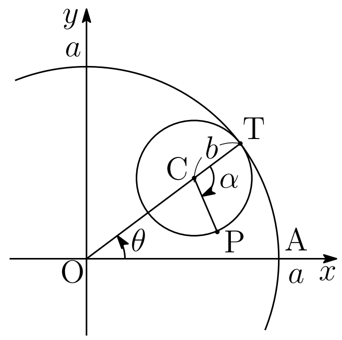
よって　$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b}$ **は任意の数**，$\boldsymbol{c=0}$，$\boldsymbol{d=-1}$　■

11 (1) O と C の接点を T とし，$\alpha=\angle\mathrm{TCP}$ とすると，
$\overset{\frown}{\mathrm{AT}}=\overset{\frown}{\mathrm{PT}}$ であるから

$$a\theta=b\alpha \quad \text{ゆえに} \quad \alpha=\frac{a}{b}\theta$$

$\mathrm{OC}=a-b$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(a-b)(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=b(\cos(\theta-\alpha),\ \sin(\theta-\alpha))$$



$\theta-\alpha=\dfrac{b-a}{b}\theta$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\\&=(a-b)(\cos\theta,\ \sin\theta)+b\left(\cos\frac{b-a}{b}\theta,\ \sin\frac{b-a}{b}\theta\right)\end{aligned}$$

よって
$$\boldsymbol{x=(a-b)\cos\theta+b\cos\frac{b-a}{b}\theta,}$$
$$\boldsymbol{y=(a-b)\sin\theta+b\sin\frac{b-a}{b}\theta}$$

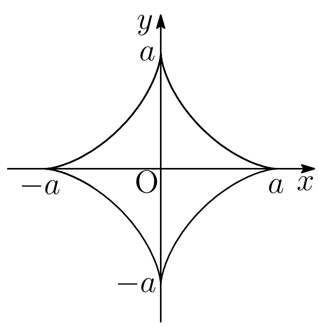
(2) $b=\dfrac{1}{4}a$ であるから，これを (1) の結果に代入すると [1]

$$\begin{aligned}x&=\frac{3}{4}a\cos\theta+\frac{1}{4}a\cos(-3\theta)\\&=\frac{a}{4}(3\cos\theta+\cos 3\theta)=\boldsymbol{a\cos^3\theta}\\y&=\frac{3}{4}a\sin\theta+\frac{1}{4}a\sin(-3\theta)\\&=\frac{a}{4}(3\sin\theta-\sin 3\theta)=\boldsymbol{a\sin^3\theta}\end{aligned}$$

解説 (2) の結果から

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

この曲線をアステロイド (asteroid) または星芒形(せいぼうけい)という．

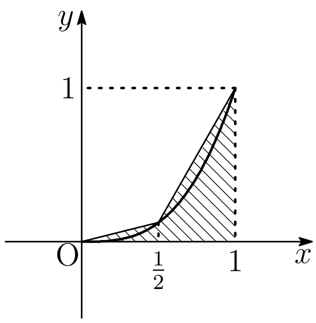


[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/oita/oita_2016.pdf $\boxed{8}$ を参照．

12 (1) $y_k = {x_k}^3$ とすると

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(y_{k-1}+y_k) = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}y_{k-1} + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}y_k \\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}y_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}y_k \\
&= \frac{1}{2n}y_0 + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}y_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}y_k + \frac{1}{2n}y_n \\
&= \frac{1}{2n}y_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}y_k + \frac{1}{2n}y_n \\
&= \frac{1}{2n}{x_0}^3 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}{x_k}^3 + \frac{1}{2n}{x_n}^3 = \boldsymbol{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}{x_k}^3 + \frac{1}{2n}}
\end{aligned}
$$

(2) I_2 は右の図の斜線部分の面積を表す.



(3) $x_k = \dfrac{k}{n}$ であるから，これを (1) の結果に代入すると

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^3 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{n-1}k^3 + \frac{1}{2n} \\
&= \frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n-1)^2 + \frac{1}{2n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4n^2}
\end{aligned}
$$

また　$I = \displaystyle\int_0^1 x^3\,dx = \left[\,\frac{1}{4}x^4\,\right]_0^1 = \frac{1}{4}$

よって　$\boldsymbol{I_n - I = \dfrac{1}{4n^2}}$　■

13 (1) $Z = \dfrac{\overline{X} - a}{b}$ に対して

$$E(Z) = \frac{1}{b}(E(\overline{X}) - a) = \frac{1}{b}(m - a), \quad V(Z) = \frac{1}{b^2}V(\overline{X}) = \frac{1}{b^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n}$$

$E(Z) = 0$，$V(Z) = 1$ のとき

$$\frac{1}{b}(m - a) = 0, \quad \frac{1}{b^2}\cdot\frac{\sigma^2}{n} = 1$$

よって　$\boldsymbol{a = m,\ b = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(2) $P(|Z| \leqq 1.96) = 1 - 2P(Z > 1.96)$
$\qquad = 1 - 2 \times 0.025 = 0.95$

したがって，信頼度 95% の信頼区間は　$|Z| \leqq 1.96$

(1) の結果から，$Z = \dfrac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ であるから　$\left|\dfrac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| \leqq 1.96$

よって　$\boldsymbol{\overline{X} - 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(3) (2) の結果から，$\sigma = 5$ のとき，信頼区間の幅は

$$1.96\frac{5}{\sqrt{n}} \times 2 = \frac{19.6}{\sqrt{n}}$$

これが 2 以下であるから

$$\frac{19.6}{\sqrt{n}} \leqq 2 \quad ゆえに \quad \sqrt{n} \geqq 9.8$$

したがって　$n \geqq 96.04$　よって，n の最小値は　**97**　■