平成 15 年度　鹿児島大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成 15 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理]・工・医 [医] 学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ から 1 問選択，$\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$ から 1 問選択．
数 II・III・A・B・C(120 分)

- 理 [地環・生命化]，医 [理学療法]・歯・農・水産学部　$\boxed{1}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 II・A・B(90 分)

- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・養護・健康] 学部　$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 II・A・B または数 III・A・B(90 分)

$\boxed{1}$ 次の各問いに答えよ．

(1) a，b はともに 0 でない定数とするとき，

$$a\cos\theta - b\sin\theta = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha)$$

が成り立つことを示せ．ここで α はある定数である．

(2) $\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta$ を (1) を用いて cos の式で表せ．α の値も求めよ．

(3) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta - \sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ．そのときの θ の値もそれぞれ求めよ．

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = e^{-x}\left|x - [x] - \dfrac{1}{2}\right|$ に対して，

$$a_n = \int_0^n f(x)\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおく．ただし記号 $[x]$ は x を越えない整数を表すものとする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) $y = f(x)$ のグラフの概形を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲でかけ．グラフの凹凸も調べよ．

(2) a_1 を求めよ．

(3) a_n を n と a_1 を用いて表せ．さらに $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

3 a，b，c を奇数とする．x についての 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ に関して，次の各問いに答えよ．

(1) この 2 次方程式が有理数の解 $\dfrac{q}{p}$ をもつならば，p と q はともに奇数であることを背理法で証明せよ．ただし $\dfrac{q}{p}$ は既約分数とする．

(2) この 2 次方程式が有理数の解を持たないことを (1) を利用して証明せよ．

4 下記の一連の等式が成立しているという (ただし m は自然数)．これについて，次の各問いに答えよ．

(1) ① の等式を証明せよ．

(2) 最下行の右辺の空欄に入る式を推測し，最下行の等式が成り立つことを証明せよ．なお，推測する式の中では，左辺と同様「$\cdots$」を用いてよい．

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2) \qquad \cdots ①$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)\cdots(k+m) = \boxed{}$$

5 次の各問いに答えよ．

(1) 点 P は，点 B，C を通る直線 BC の一方の側にあって，∠BPC の大きさが一定であるように動くとする．点 I が △PBC の内心であるとき，∠BIC が一定であることを示せ．

(2) 点 P が正 3 角形 ABC の外接円上を動くとする (ただし点 P は点 B，C に一致しないとする)．△PBC の内心 I の軌跡を求め，これを図示せよ．

6 △OAB において，OA $= 3$，OB $= 2$ とし，辺 AB の中点を M，∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を D とする．また直線 OD に点 A から下ろした垂線の足を E とし，直線 OM と直線 AE の交点を F とする．ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ として，次の各問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

7 複素数平面上において，次の各々はどのような図形を表すかを答えよ．

(1) 複素数 z が $|z| = 1$ および $z \neq 1$ を満たすとき，$w = \dfrac{1}{1-z}$ が表す点の全体．

(2) 複素数 z が $|z| = 1$ を満たすとき，$w = \dfrac{1}{\sqrt{3}-z}$ が表す点の全体．

(3) 複素数 z が $|z| = 1$ および $0^\circ < \arg z < 90^\circ$ を満たすとき，$w = \dfrac{1}{\sqrt{3}-z}$ が表す点の全体．

8 1，2，3，4，5 の番号をつけた 5 枚のカードがある．カード 1 枚をでたらめに取り出し，取り出したカードはもとに戻す試行を繰り返す．ただしこの試行は，取り出したカードの番号が 4 以上であるか，または取り出したカードの番号の和がはじめて 4 以上になったときに終了する．カードを取り出した回数を X とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 確率 $P(X = 1)$ および $P(X = 2)$ を求めよ．

(2) X の確率分布および平均 (期待値)$E(X)$ を求めよ．

(3) 取り出したカードの番号の和が 8 である確率を求めよ．さらに，取り出したカードの番号の和が 8 であるときに，カードを取り出した回数が 2 回である条件つき確率を求めよ．

9 行列 A と列ベクトル X，P を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -t \\ 1+t & 1-2t \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 4-t \\ -1+2t \end{pmatrix}$$

とおく．ただし t は定数とする．このとき次の各問いに答えよ．

(1) 連立方程式 $AX = P$ がただ 1 つの解をもつのは t がどのような場合か．

(2) 連立方程式 $AX = P$ が無数の解をもつのは t がどのような場合か．

(3) 連立方程式 $A^2X = AP$ が少なくとも 1 つの解をもつのは t がどのような場合か．

10 次の各問いに答えよ．

(1) α，β を $\alpha > 0$，$\beta \neq 0$，$\alpha > \beta$ を満たす定数とし，方程式 $\dfrac{x^2}{\alpha} + \dfrac{y^2}{\beta} = 1$ で表される平面上の 2 次曲線を C とする．点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ (ただし $y_0 \neq 0$) を C 上の点とし，点 P における C の接線の傾きを m とするとき，$m = -\dfrac{\beta x_0}{\alpha y_0}$ であることを示せ．ただし C が双曲線の場合，接線の傾きと漸近線の傾きが一致しないことを証明せずに用いてよい．

(2) t は $1 < t < 4$ を満たすとする．
方程式 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ および $\dfrac{x^2}{4-t} + \dfrac{y^2}{1-t} = 1$ で与えられる 2 次曲線をそれぞれ C_1，C_2 とする．点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ (ただし $y_0 \neq 0$) が C_1 と C_2 の交点であるとき，点 P における C_1 および C_2 の接線は互いに直交することを，(1) の結果を用いて示せ．

11 方程式 $x^2 - 2 = 0$ の解 $\sqrt{2}$ の近似値をニュートン法を用いて求めたい．次の各問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}$ の近似値を求めるためのニュートンの繰り返し公式が

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{2}{x_k}\right) \quad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

で与えられることを示せ．

(2) $x_1 = 2$ とするとき，x_2 および x_3 を求めよ (小数第 4 位を四捨五入して，小数第 3 位まで求めること)．

(3) $y_k = \dfrac{x_k - \sqrt{2}}{x_k + \sqrt{2}}$ とおくとき，$y_{k+1} = {y_k}^2$ となることを示せ．

(4) y_k を k と y_1 を用いて表せ．さらに，$x_1 = 2$ のとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt{2}$ を示せ．

12 確率変数 Z が平均 0，分散 1 の標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとする．
$P(0 \leqq Z \leqq 1.5) = 0.4332$ であるとして，次の各問いに答えよ．

(1) 確率変数 X は平均 40，分散 20^2 の正規分布 $N(40,\ 20^2)$ に従うとする．確率 $P(X \leqq 10)$ を求めよ．

(2) 母平均 40，母分散 20^2 の母集団から，大きさ n の無作為標本を抽出するとき，その標本平均を $\overline{X}$ とする．n が十分大きいとき，$\overline{X}$ が近似的に従う確率分布を求めよ．また，この確率分布に $\overline{X}$ が正確に従うと仮定して，$P(39 \leqq \overline{X} \leqq 41) \geqq 0.8664$ となる n の値の範囲を求めよ．

正解

1 (1) $\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ とすると

$$\begin{aligned} a\cos\theta - b\sin\theta &= \sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta\cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta+\alpha) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果に $a=\sqrt{3}$，$b=1$ を代入すると，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$ より

$$\sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta = \boldsymbol{2\cos(\theta+\alpha)},$$

$$\boldsymbol{\alpha = 30^\circ + 360^\circ \times n \ (n \text{ は整数})}$$

(3) (1) の結果を利用すると

$$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\cos(\theta + 45^\circ)$$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$45^\circ \leqq \theta + 45^\circ \leqq 225^\circ$ であるから

$\theta + 45^\circ = 45^\circ$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 0^\circ}$ のとき　**最大値 1**

$\theta + 45^\circ = 180^\circ$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 135^\circ}$ のとき　**最小値 $-\sqrt{2}$**

■

2 (1) $0 < x < \dfrac{1}{2}$ のとき，$f(x) = e^{-x}\left(\dfrac{1}{2} - x\right)$ であるから

$$f'(x) = e^{-x}\left(x - \frac{3}{2}\right) < 0, \quad f''(x) = \left(\frac{5}{2} - x\right) > 0$$

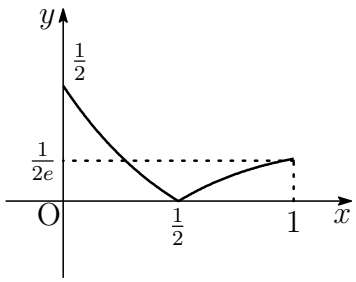
$\dfrac{1}{2} < x < 1$ のとき，$f(x) = e^{-x}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ であるから

$$f'(x) = e^{-x}\left(\frac{3}{2} - x\right) > 0, \quad f''(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right) < 0$$

$$f(0) = \frac{1}{2},\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,\ f(1) = \frac{1}{2e}$$

したがって，$f(x)$ の増減表およびグラフの概形は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f''(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	極小 0	↗	$\frac{1}{2e}$



(2) $$a_1 = \int_0^1 e^{-x}\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|dx = \int_0^1 e^{-x}\left|x-\frac{1}{2}\right|dx$$

ここで，$e^{-x}\left(\frac{1}{2}-x\right)$ の原始関数の 1 つを $F(x)=e^{-x}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned}
a_1 &= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x}\left(\frac{1}{2}-x\right)dx \\
&= \Big[\ F(x)\ \Big]_0^{\frac{1}{2}} - \Big[\ F(x)\ \Big]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= 2F\left(\frac{1}{2}\right) - F(0) - F(1) \\
&= 2e^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}e^{-1} = \boldsymbol{\frac{4\sqrt{e}-e-3}{2e}}
\end{aligned}$$

(3) $a_{n+1} = a_n + \int_n^{n+1} f(x)\,dx$ であるから

$$\begin{aligned}
\int_n^{n+1} f(x)\,dx &= \int_n^{n+1} e^{-x}\left|x-[\,x\,]-\frac{1}{2}\right|dx \\
&= \int_0^1 e^{-(t+n)}\left|(t+n)-[\,t+n\,]-\frac{1}{2}\right|dt \\
&= e^{-n}\int_0^1 e^{-t}\left|t-\frac{1}{2}\right|dt = e^{-n}a_1
\end{aligned}$$

$a_{n+1} = a_n + a_1 e^{-n}$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= a_1 + a_1 e^{-1}\sum_{k=1}^{n-1}(e^{-1})^{k-1} \\
&= a_1 + a_1 e^{-1} \times \frac{1-(e^{-1})^{n-1}}{1-e^{-1}} = \frac{a_1(1-e^{-n})}{1-e^{-1}}
\end{aligned}$$

上式は，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = \frac{a_1(1-e^{-n})}{1-e^{-1}}}$

$\lim_{n\to\infty} e^{-n} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_n &= a_1 \times \frac{1}{1-e^{-1}} \\
&= \frac{4\sqrt{e}-e-3}{2e} \times \frac{1}{1-e^{-1}} \\
&= \boldsymbol{\frac{4\sqrt{e}-e-3}{2(e-1)}}
\end{aligned}$$

■

3 (1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数の解 $\dfrac{q}{p}$ をもつとき

$$a\left(\frac{q}{p}\right)^2+b\left(\frac{q}{p}\right)+c=0 \quad \text{ゆえに} \quad aq^2+bpq+cp^2=0 \quad \cdots(*)$$

「p と q がともに奇数」の否定は「p，q の少なくとも一方が偶数」であるが，$\dfrac{q}{p}$ は既約分数であるから，次の (i)，(ii) である．

(i) p が偶数，q が奇数のとき，$(*)$ より

$$p(bq+cp)=-aq^2$$

上式において，左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾．

(ii) p が奇数，q が偶数のとき，$(*)$ より

$$q(aq+bp)=-cp^2$$

上式において，左辺は偶数，右辺は奇数となり，矛盾．

(i)，(ii) より，p と q はともに奇数である．

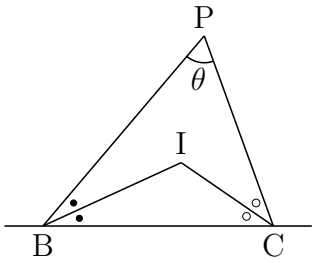
(2) この 2 次方程式が有理数の解をもつとき，$(*)$ をみたす p，q が存在する．
また，(1) の結果から，aq^2，bpq，cp^2 は奇数である．
このとき，$(*)$ の左辺は奇数，$(*)$ の右辺は偶数であるから，矛盾する．
よって，この 2 次方程式は有理数の解をもたない． ■

4 (1)
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)&=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}\\&=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)\\&=\frac{1}{m+2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)(k+m+1)\\&\qquad-\frac{1}{m+2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)(k+2)\cdots(k+m)\\&=\boldsymbol{\frac{1}{m+2}n(n+1)(n+2)\cdots(n+m)(n+m+1)}\end{aligned}$$

■

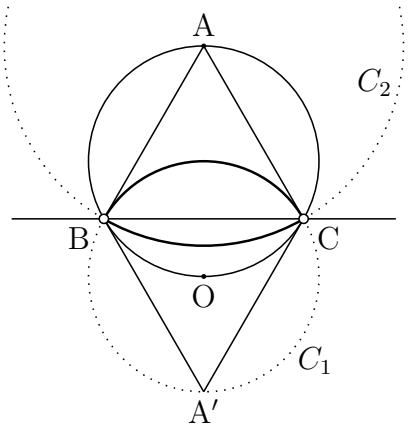
5 (1) $\theta = \angle\mathrm{BPC}$ とすると



$$\begin{aligned}\angle\mathrm{BIC} &= 180^\circ - \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(B + C)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \theta) = 90^\circ + \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

θ は一定であるから，$\angle\mathrm{BIC}$ は一定である．

(2) (1) の結果から，直線 BC に関して A と同じ側に P があるとき，$\theta = 60^\circ$ より，$\angle\mathrm{BIC} = 120^\circ$ である．直線 BC に関して A と対称な点 A′ をとり，△A′BC の外接円を C_1 とすると，P は直線 BC に関して A と同じ側の C_1 上を動く．
直線 BC に関して A と反対側に P があるとき，$\theta = 120^\circ$ より，$\angle\mathrm{BIC} = 150^\circ$ である．A を中心とする 2 点 B，C を通る円を C_2 とすると，P は直線 BC に関して A と反対側の C_2 上を動く．ただし，端点 B，C を含まない．



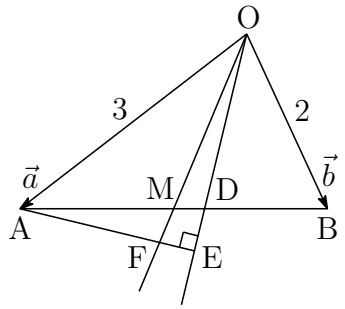
■

6 (1) M は辺 AB の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2},$$

OD は ∠AOB の二等分線であるから，
AD : DB = OA : OB = 3 : 2 より

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\vec{e}$ とすると

$$\vec{e} = \frac{5\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|5\overrightarrow{\mathrm{OD}}|} = \frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{|2\vec{a}+3\vec{b}|}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OE}} = (\vec{a}\cdot\vec{e})\vec{e} = \frac{\vec{a}\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})}{|2\vec{a}+3\vec{b}|^2}(2\vec{a}+3\vec{b})$$

ゆえに
$$\frac{\vec{a}\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})}{|2\vec{a}+3\vec{b}|^2} = \frac{2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}}{4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2}$$
$$= \frac{2\cdot 3^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}}{4\cdot 3^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9\cdot 2^2} = \frac{3(6+\vec{a}\cdot\vec{b})}{12(6+\vec{a}\cdot\vec{b})} = \frac{1}{4}$$

したがって
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{4}(2\vec{a}+3\vec{b}) = \frac{5}{4}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

△ADE と直線 MF について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MD}}\cdot\frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{OE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{5}{1}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}} = 1$$

したがって　EF : FA = 1 : 4

よって
$$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+4\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{5} = \frac{\vec{a}+(2\vec{a}+3\vec{b})}{5} = \frac{3\vec{a}+3\vec{b}}{5}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{3\vec{a}+3\vec{b}}{5} - \frac{2\vec{a}+3\vec{b}}{5} = \frac{1}{5}\vec{a}$$

■

$\boxed{7}$ (1) $w=\dfrac{1}{1-z}$ より　$z=\dfrac{w-1}{w}$

$|z|=1$ であるから　$\left|\dfrac{w-1}{w}\right|=1$　ゆえに　$|w-1|=|w|$

よって，**0 と 1 を結ぶ線分の垂直二等分線**

(2) $w=\dfrac{1}{\sqrt{3}-z}$ より　$z=\dfrac{\sqrt{3}w-1}{w}$　$\cdots(*)$

$|z|=1$ であるから　$\left|\dfrac{\sqrt{3}w-1}{w}\right|=1$　ゆえに　$|\sqrt{3}w-1|^2=|w|^2$ より

$$(\sqrt{3}w-1)(\sqrt{3}\overline{w}-1)=w\overline{w}$$
$$2w\overline{w}-\sqrt{3}(w+\overline{w})+1=0$$
$$w\overline{w}-\frac{\sqrt{3}}{2}(w+\overline{w})+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

したがって　$\left|w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\dfrac{1}{4}$　すなわち　$\left|w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$

よって，**点 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円**

(3) (2) の結果から，$w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおく．

$w=\dfrac{1}{2}(\alpha+\sqrt{3})$ を $(*)$ に代入すると $(\alpha\overline{\alpha}=1)$

$$z=\frac{\sqrt{3}w-1}{w}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\alpha+\sqrt{3}\right)-1}{\frac{1}{2}(\alpha+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{3}\alpha+1}{\alpha+\sqrt{3}}$$
$$=\frac{(\sqrt{3}\alpha+1)(\overline{\alpha}+\sqrt{3})}{(\alpha+\sqrt{3})(\overline{\alpha}+\sqrt{3})}=\frac{3\alpha+\overline{\alpha}+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\alpha+\overline{\alpha})+4}$$

$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，$\overline{\alpha}=\cos\theta-i\sin\theta$ より

$$z=\frac{3(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\{(\cos\theta+i\sin\theta)+(\cos\theta-i\sin\theta)\}+4}$$
$$=\frac{4\cos\theta+2i\sin\theta+2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cos\theta+4}=\frac{(2\cos\theta+\sqrt{3})+i\sin\theta}{\sqrt{3}\cos\theta+2}$$

$0^\circ<\arg z<90^\circ$ より　$2\cos\theta+\sqrt{3}>0$，$\sin\theta>0$

よって　$\boldsymbol{\left|w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\dfrac{1}{2}}$，$\boldsymbol{0^\circ<\arg\left(w-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)<150^\circ}$　■

8 (1) $P(X=1)=\mathbf{\dfrac{2}{5}}$

下の表により　$P(X=2)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}\cdot 1=\mathbf{\dfrac{12}{25}}$

1 回目	2 回目
1	3，4，5
2	2，3，4，5
3	1，2，3，4，5

(2) 3 回目で試行が終了するのは，次の場合である．

1 回目	2 回目	3 回目
1	1	2，3，4，5
1	2	1，2，3，4，5
2	1	1，2，3，4，5

よって　$P(X=3)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot 1+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot 1=\dfrac{14}{125}$

4 回目で試行が終了するのは，次の場合である．

1 回目	2 回目	3 回目	4 回目
1	1	1	1，2，3，4，5

よって　$P(X=4)=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{5}\cdot 1=\dfrac{1}{125}$

以上の結果から，確率分布表は次のようになる．

X	1	2	3	4	計
$P(X)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{25}$	$\frac{14}{125}$	$\frac{1}{125}$	1

したがって　$E(X)=1\cdot\dfrac{2}{5}+2\cdot\dfrac{12}{25}+3\cdot\dfrac{14}{125}+4\cdot\dfrac{1}{125}=\mathbf{\dfrac{216}{125}}$

(3) カードの番号の和が 8 となるのは，次の場合である．

1 回目	2 回目	3 回目	4 回目
3	5	$*$	$*$
1	2	5	$*$
2	1	5	$*$
1	1	1	5

カードの番号の和が 8 である確率は　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+2\left(\dfrac{1}{5}\right)^3+\left(\dfrac{1}{5}\right)^4=\mathbf{\dfrac{36}{625}}$

カードの番号の和が 8 であるときに，カードを取り出した回数が 2 回である条件つき確率は　$\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\div\dfrac{36}{625}=\mathbf{\dfrac{25}{36}}$ ■

9 (1) A が正則のとき，$AX = P$ の両辺に左から A^{-1} をかけると，$X = A^{-1}P$ となり，ただ 1 つの解をもつ．このとき，$\det(A) \neq 0$ であるから

$$2(1-2t) - (-t)(1+t) \neq 0 \quad \text{すなわち} \quad (t-1)(t-2) \neq 0$$

よって　　$\boldsymbol{t \neq 1,\ 2}$

(2) (1) の結果から，$t = 1$ と $t = 2$ の場合について調べればよい．

i) $t = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

ゆえに，解なし．

ii) $t = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad x - y = 1$$

ゆえに，無数の解をもつ．

よって，i)，ii) より，無数の解をもつのは，$\boldsymbol{t = 2}$ のときである．

(3) i) $\det(A) \neq 0$ すなわち $t \neq 1,\ 2$ のとき，
$A^2X = AP$ の両辺に左から $(A^{-1})^2$ をかけると，$X = A^{-1}P$ となり，ただ 1 つの解をもつ．

ii) $t = 1$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ゆえに，$2x - y = 5$ を満たす無数の解．

iii) $t = 2$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

ゆえに，$x - y = 1$ を満たす無数の解．

i)，ii)，iii) より，**すべての t に対して少なくとも 1 つの解をもつ**　■

10 (1) $\dfrac{x^2}{\alpha}+\dfrac{y^2}{\beta}=1$ の両辺を x で微分すると

$$\frac{2x}{\alpha}+\frac{2y}{\beta}\cdot\frac{dy}{dx}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{\beta x}{\alpha y}$$

C の $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ における接線の傾き m は　　$m=-\dfrac{\beta x_0}{\alpha y_0}$

(2) $C_1:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，$C_2:\dfrac{x^2}{4-t}+\dfrac{y^2}{1-t}=1$ の交点を $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ とすると

$$x_0^2=\frac{4(4-t)}{3},\quad y_0^2=\frac{t-1}{3} \qquad \cdots(*)$$

P における C_1，C_2 の接線の傾きを，それぞれ m_1，m_2 とすると $(y_0\neq 0)$

$$m_1=-\frac{x_0}{4y_0},\quad m_2=-\frac{(1-t)x_0}{(4-t)y_0} \qquad \cdots(**)$$

$(*)$ より　$\dfrac{{x_0}^2}{{y_0}^2}=\dfrac{4(4-t)}{t-1}$，　　$(**)$ より　$m_1m_2=\dfrac{1-t}{4(4-t)}\cdot\dfrac{{x_0}^2}{{y_0}^2}$

上の 2 式から　　$m_1m_2=\dfrac{1-t}{4(4-t)}\cdot\dfrac{4(4-t)}{t-1}=-1$

よって，P における C_1，C_2 の接線は，互いに直交する．　■

11 (1) $f(x)=x^2-2$ とおくと　$f'(x)=2x$

$y=f(x)$ 上の点 $(x_k,\ f(x_k))$ における接線の方程式は

$$y-f(x_k)=f'(x_k)(x-x_k)$$

この直線と x 軸との共有点の x 座標を x_{k+1} とすると

$$-f(x_k)=f'(x_k)(x_{k+1}-x_k)\quad \text{ゆえに}\quad x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

これに，$f(x_k)={x_k}^2-2$，$f'(x_k)=2x_k$ を代入すると

$$x_{k+1}=x_k-\frac{{x_k}^2-2}{2x_k}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right)$$

(2) $x_1=2$ および (1) の結果から

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{2}{x_1}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{2}\right)=\frac{3}{2}=\mathbf{1.500}$$

$$x_3=\frac{1}{2}\left(x_2+\frac{2}{x_2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{17}{12}\fallingdotseq\mathbf{1.417}$$

(3) $y_k=\dfrac{x_k-\sqrt{2}}{x_k+\sqrt{2}}\cdots(*)$ および (1) の結果から

$$y_{k+1}=\frac{x_{k+1}-\sqrt{2}}{x_{k+1}+\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right)-\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{2}{x_k}\right)+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{{x_k}^2-2\sqrt{2}x_k+2}{{x_k}^2+2\sqrt{2}x_k+2}=\left(\frac{x_k-\sqrt{2}}{x_k+\sqrt{2}}\right)^2={y_k}^2$$

(4) $y_1=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ より，$0<y_1<1$ であるから，$y_k>0$

$z_k=\log y_k$ とおくと，(3) の結果から

$$z_{k+1}=2z_k\quad \text{ゆえに}\quad z_k=2^{k-1}z_1$$

したがって　$\log y_k=2^{k-1}\log y_1=\log {y_1}^{2^{k-1}}$　すなわち　$\boldsymbol{y_k={y_1}^{2^{k-1}}}$

$\displaystyle\lim_{k\to\infty}y_k=\lim_{k\to\infty}y_1^{2^{k-1}}=0$ であるから，$(*)$ より

$$\lim_{k\to\infty}x_k=\sqrt{2}$$

■

12 (1) 確率変数 X が $N(40,\ 20^2)$ に従うとき，$Z = \dfrac{X-40}{20}$ とおくと，
確率変数 Z は $N(0,\ 1)$ に従う．

$$\begin{aligned} P(X \leqq 10) &= P(Z \leqq -1.5) = P(Z \geqq 1.5) \\ &= 0.5 - P(0 \leqq Z \leqq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = \mathbf{0.0668} \end{aligned}$$

(2) n が十分大きいとき，$\overline{X}$ は近似的に**正規分布** $\boldsymbol{N\left(40,\ \dfrac{20^2}{n}\right)}$ に従うから，
$Z = \dfrac{\overline{X}-40}{\dfrac{20}{\sqrt{n}}}$ とおくと，Z は $N(0,\ 1)$ に従う．

$$\begin{aligned} P(39 \leqq \overline{X} \leqq 41) &= P\left(-\frac{\sqrt{n}}{20} \leqq Z \leqq \frac{\sqrt{n}}{20}\right) \\ &= 2P\left(0 \leqq Z \leqq \frac{\sqrt{n}}{20}\right) \geqq 0.8664 \end{aligned}$$

したがって　$P\left(0 \leqq Z \leqq \dfrac{\sqrt{n}}{20}\right) \geqq 0.4332$

$P(0 \leqq Z \leqq 1.5) = 0.4332$ であるから，上式をみたすとき

$$\frac{\sqrt{n}}{20} \geqq 1.5 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{n \geqq 900}$$

■