平成 14 年度　鹿児島大学２次試験前期日程 (数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成 14 年 2 月 25 日

- 理 [数理・物理]・工・医 [医] 学部 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ から 1 問選択，$\boxed{9}$ $\boxed{10}$ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$ から 1 問選択．
  数 II・III・A・B・C(120 分)
- 理 [地環・生命化]，医 [理学療法]・歯・農・水産学部 $\boxed{13}$ 必答，$\boxed{3}$ $\boxed{4}$ $\boxed{5}$ から 1 問選択，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 II・A・B(90 分)
- 教育 [数学・理科・技術・教育・心理・家政・養護・健康] 学部 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ から 1 問選択．数 II・A・B または数 III・A・B(90 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ θ は $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ の範囲にあるとして，次の各問いに答えよ．

(1) 不等式 $|\tan\theta| < \dfrac{1}{\cos\theta}$ が成り立つことを証明せよ．

(2) x に関する方程式 $3^x - 3^{-x} = 2\tan\theta$ の解を 3 を底とする対数を用いて表せ．

(3) (2) にある方程式の解が $x = \dfrac{1}{2}$ であるとき，θ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $f(x) = -x + 2\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$ と $y = f(x)$ が表す曲線 C について，次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を積分を含まない形で表せ．

(2) $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ の範囲における極値とそのときの x の値を求めよ．

(3) 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2},\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ における C の法線 L を表す方程式 $y = g(x)$ を求め，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲では $f(x) \leqq g(x)$ であることを示せ．

(4) L と C および y 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a，b は自然数とする．a を 8 で割った余りを r，b を 8 で割った余りを s とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $a+b$ を 8 で割った余りと $r+s$ を 8 で割った余りが等しいことを示せ．

(2) a^2 を 8 で割った余りと r^2 を 8 で割った余りが等しいことを示せ．

(3) 平方数を 8 で割ったとき，余りとしてえられる数をすべて求めよ．ただし，平方数とは自然数の平方となっている数のことである．

(4) 2 つの平方数の和を 8 で割ると余りは 3 にはならないことを示せ．

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ は $a_1=6$，$a_{n+1}=a_n+16n+8\ (n=1,2,3,\cdots)$ により，定まるものとして，次の各問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) 次の等式が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) 和 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n$ を求めよ．

$\boxed{5}$ 次の各問いに答えよ．

(1) $\triangle$PQR の辺 QR 上の点 S が $\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{QS}}:\overline{\mathrm{SR}}$ を満たすとき，$\angle\mathrm{QPS}=\angle\mathrm{RPS}$ が成り立つことを証明せよ．ただし，$\overline{\mathrm{PQ}}$ は線分 PQ の長さを表すものとし，他も同様とする．

(2) AD//BC，$\overline{\mathrm{AD}}<\overline{\mathrm{BC}}$ を満たす台形 ABCD がある．辺 BC 上の点 F は $\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BF}}:\overline{\mathrm{BC}}$，AF//DC を満たしているとする．このとき，AF と BD の交点を G とすると，$\triangle$BAG は二等辺三角形であることを証明せよ．

(3) (2) の条件のもとで，辺 AD 上の点 E は $\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{AE}}:\overline{\mathrm{ED}}$ を満たしているとする．このとき，BE と AF は直交することを証明せよ．

$\boxed{6}$ 平面上の 3 点 O，A，B は同一直線上にないとし，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の長さはそれぞれ $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=8$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=7$ とする．点 P を線分 AB を 2 : 1 に内分する点とする．また，2 点 O，P を通る直線と，線分 AB の垂直二等分線との交点を E とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 s，t を求めよ．

$\boxed{7}$ α，β，γ はいずれも 0 でない複素数として，次の各問いに答えよ．ただし，複素数 z に対して，$\overline{z}$ は z の共役複素数，$|z|$ は z の絶対値を表す．

(1) $\dfrac{\alpha}{\beta}$ が正の実数ならば，$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ が成り立つことを示せ．

(2) $\gamma+\overline{\gamma}=2|\gamma|$ が成り立つならば，γ は正の実数であることを示せ．

(3) $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ が成り立つならば，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ は正の実数であることを示せ．

8 1 から n $(n>3)$ までの数字 $1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ を 1 つずつ書いた n 枚のカードが入っている箱の中から，同時に 2 枚のカードを取り出す．この 2 枚のカードに書いてある数字を $X,\ Y\ (X>Y)$ とする．いま，自然数 s，t は $1\leqq s<t\leqq n$ を満たしているとして，次の各問いに答えよ．

(1) 次の各確率を求めよ．

(a) $X=t$ かつ $Y=s$ である確率 $P(X=t,\ Y=s)$

(b) $X=t$ である確率 $P(X=t)$

(c) $Y=s$ である確率 $P(Y=s)$

(d) $X=3Y$ である確率 $P(X=3Y)$

(2) X，Y の平均をそれぞれ $E(X)$，$E(Y)$ とするとき，$E(X)+E(Y)$ を求めよ．

9 行列 M は等式 $3(2E-M)=AB-M+A$ を満たしている．ただし，

$$A=\begin{pmatrix}5&6\\3&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-9&20\\7&-17\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$ とする．

このとき，次の文中にある空欄 $\boxed{}$ に適する行列および数を求め，その結果だけを答えよ．

(1) 行列 M を求めると $M=\boxed{}$ である．

(2) 実数 α，β は $(M-\alpha E)M=\beta(M-\alpha E)$，$\alpha\leqq\beta$ を満たしている．このとき，$\alpha=\boxed{}$，$\beta=\boxed{}$ である．

(3) 実数 u は $M^5-\alpha M^4=u(M-\alpha E)$ を満たしているとすると，$u=\boxed{}$ である．ただし，α は (2) で求めた数である．

10 次の文中にある空欄 $\boxed{}$ に適する数を求め，その結果だけを答えよ．

(1) 点 $(1,\ 1)$ と直線 $y=-2$ からの距離が等しい点の軌跡は放物線であり，その方程式は $y=ax^2+bx-\dfrac{1}{3}$ である．このとき，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$ である．

(2) 2 点 $(3,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ からの距離の和が 12 である点の軌跡は楕円であり，その方程式は $\dfrac{(x-r)^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=1$ である．このとき，$p=\boxed{}$，$q=\boxed{}$，$r=\boxed{}$ である．

11 関数 $f(x)$ の区間 $[a,\ b]$ $(a < b)$ における定積分の近似値として，$[a,\ b]$ を n 等分してえられる，次の A_n，B_n，T_n を考える．

$$A_n = \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)h,\quad B_n = \sum_{j=1}^{n} f(x_j)h,\quad T_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j)+f(x_{j+1})}{2}h$$

ただし，$h = \dfrac{b-a}{n}$，$x_j = a + jh$ $(j = 0, 1, 2, \cdots, n)$ である．

このとき，次の文中にある空欄$\boxed{}$に適する数または式を求め，その結果だけを答えよ．

(1) T_n を A_n，B_n を用いて表すと $T_n = \boxed{}$ である．

(2) 関数 $f(x) = x^2$ の $[0,\ 1]$ における定積分の近似値 A_n，B_n，T_n を n を用いて表すと $A_n = \boxed{}$，$B_n = \boxed{}$，$T_n = \boxed{}$ である．また，近似値 T_n による相対誤差が 0.01 以下になるような分割の数 n の最小値は $\boxed{}$ である．ただし，真の値 S の近似値 s による相対誤差は $\left|\dfrac{s-S}{S}\right|$ である．

12 2 つの変量 x，y の値からなる N 個の資料 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，$\cdots$，$(x_N,\ y_N)$ がある．この資料による x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とし，標準偏差をそれぞれ σ_x，σ_y とする．また，σ_{xy}，$E(x^2)$ および $E(xy)$ を次で定める．

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})(y_k-\overline{y}),\quad E(x^2) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}{x_k}^2,\quad E(xy) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k y_k$$

このとき，次の文中にある空欄$\boxed{}$に適する式を求め，その結果だけを答えよ．

(1) σ_x を $\overline{x}$ および $E(x^2)$ を用いて表すと $\sigma_x = \boxed{}$ である．

(2) σ_{xy} を $\overline{x}$，$\overline{y}$ および $E(xy)$ を用いて表すと $\sigma_{xy} = \boxed{}$ である．

(3) x，y の相関係数 r を σ_x，σ_y および σ_{xy} を用いて表すと $r = \boxed{}$ である．ただし，$\sigma_x\sigma_y \neq 0$ とする．

(4) $\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}(y_k - tx_k - 1)^2$ の値を最小にする実数 t の値を $\overline{x}$，$E(x^2)$ および $E(xy)$ を用いて表すと $t = \boxed{}$ である．ただし，$E(x^2) \neq 0$ とする．

13 曲線 $y=(x-2)^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ (t-2)^2)$ と y 軸上の点 $\mathrm{Q}(0,\ (t-2)^2)$ を考える．ただし，t は $0<t<2$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフ C は 2 点 P，Q を通り x 軸に接する．この $f(x)$ を求めよ．

(2) 線分 PQ と C によって囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3) t が上に指定してある範囲を変化するとき，$S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ．

解答例

1 (1) $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ のとき，$\cos\theta > 0$，$|\sin\theta| < 1$ であるから

$$|\tan\theta| = \frac{|\sin\theta|}{\cos\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

(2) $t = 3^x$ とおくと $(t > 0)$

$$t - \frac{1}{t} = 2\tan\theta \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 2t\cos\theta - 1 = 0$$

$t > 0$ に注意して，これを解くと $t = \tan\theta + \sqrt{\tan^2\theta + 1} = \dfrac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}$

したがって $3^x = \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$ よって $\boldsymbol{x = \log_3 \dfrac{\sin\theta + 1}{\cos\theta}}$

(3) $3^x - 3^{-x} = 2\tan\theta$ に $x = \dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = 2\tan\theta \quad \text{すなわち} \quad \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$-90^\circ < \theta < 90^\circ$ に注意して，これを解くと $\boldsymbol{\theta = 30^\circ}$ ■

2 (1)

$$\begin{aligned}\int_0^x (x-t)\sin t\,dt &= \int_0^x (t-x)(\cos t)'\,dt \\ &= \Big[\,(t-x)\cos t\,\Big]_0^x - \int_0^x \cos t\,dt \\ &= x - \Big[\,\sin t\,\Big]_0^x = x - \sin x\end{aligned}$$

上式を $f(x) = -x + 2\displaystyle\int_0^x (x-t)\sin t\,dt$ に代入すると

$$f(x) = -x + 2(x - \sin x) = \boldsymbol{x - 2\sin x}$$

(2) (1) の結果から $f'(x) = 1 - 2\cos x$

したがって，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	極小	↗	極大	↘	2π

よって $\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{3}}$ **のとき 極小値** $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} - \sqrt{3}}$

$\boldsymbol{x = \dfrac{5}{3}\pi}$ **のとき 極大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{3}\pi + \sqrt{3}}$

(3) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}-2$，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ より，法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}=-1$

したがって，P における C の法線の方程式は

$$y-\left(\frac{\pi}{2}-2\right)=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=-x+\pi-2}$$

$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと

$$\begin{aligned}h(x)&=-x+\pi-2-(x-2\sin x)\\&=2\sin x-2x+\pi-2\\h'(x)&=2\cos x-2=-2(1-\cos x)\end{aligned}$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ において，$h'(x)\leqq 0$ であるから，$h(x)$ は単調減少.

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=2-\pi+\pi-2=0$$

したがって　$h(x)\geqq h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$　よって　$f(x)\leqq g(x)$

(4) (3) の結果から，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}h(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x-2x+\pi-2)\,dx\\&=\Big[-2\cos x-x^2+(\pi-2)x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi^2}{4}-\pi+2}\end{aligned}$$

■

3 (1) $$a \equiv r,\quad b \equiv s \pmod 8$$

したがって　$a+b \equiv r+s \pmod 8$

$a+b$ を 8 で割った余りと $r+s$ を 8 で割った余りは等しい.

(2) 仮定より　$a-r \equiv 0 \pmod 8$

$a^2-r^2=(a+r)(a-r)$ であるから

$$a^2-r^2 \equiv (a+r)\cdot 0 \pmod 8$$

したがって　$a^2-r^2 \equiv 0 \pmod 8$

よって，a^2 を 8 で割った余りと r^2 を 8 で割った余りは等しい.

(3) $$(2k+1)^2=4k(k+1)+1,\ (2k)^2=4k^2$$

k が整数のとき，$k(k+1)$ は偶数であるから　$(2k+1)^2 \equiv 1 \pmod 8$

k が偶数のとき　$(2k)^2 \equiv 0 \pmod 8$,　k が奇数のとき　$(2k)^2 \equiv 4 \pmod 8$

よって，平方数を 8 で割った余りは　**0，1，4**

(4) (3) の結果から 2 つの平方数の和を 8 で割った余りは.

$$0+0,\ 0+1,\ 1+1,\ 0+4,\ 1+4,\ 4+4 \quad \text{すなわち} \quad 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5$$

よって，2 つの平方数の和を 8 で割った余りは 3 にはならない.　■

$\boxed{4}$ (1) $a_{k+1}-a_k=16k+8$ であるから，$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}(16k+8)$$

$$a_n-a_1=16\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+8(n-1)$$

$$a_n-6=8n^2-8$$

よって　　$\boldsymbol{a_n=8n^2-2}$

(2)
$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

上の等式を $(*)$ とする．

［1］$n=1$ のとき

$$\text{左辺}=1^3=1,\quad \text{右辺}=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$$

［2］$n=j$ のとき $(*)$ が成り立つ，すなわち

$$\sum_{k=1}^{j}k^3=\frac{j^2(j+1)^2}{4}$$

であると仮定すると，$n=j+1$ のときの $(*)$ の左辺は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{j+1}k^3&=\sum_{k=1}^{j}k^3+(j+1)^3\\&=\frac{j^2(j+1)^2}{4}+(j+1)^3\\&=\frac{1}{4}(j+1)^2\{j^2+4(j+1)\}\\&=\frac{(j+1)^2(j+2)^2}{4}\end{aligned}$$

よって，$n=j+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

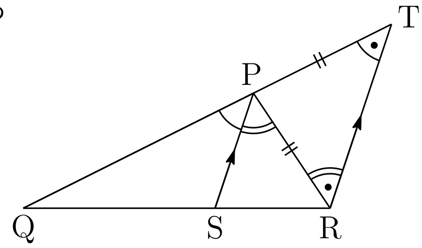
［1］，［2］から，すべての自然数 n について $(*)$ が成り立つ．

(3) 求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k(8k^2-2)&=\sum_{k=1}^{n}(8k^3-2k)\\&=8\times\frac{n^2(n+1)^2}{4}-2\times\frac{n(n+1)}{2}\\&=\boldsymbol{n(n+1)(2n^2+2n-1)}\end{aligned}$$

■

5 (1) Q から P の延長線上に $\overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{PT}}$ となる点 T をとると



$$\angle\mathrm{PTR} = \angle\mathrm{PRT}$$

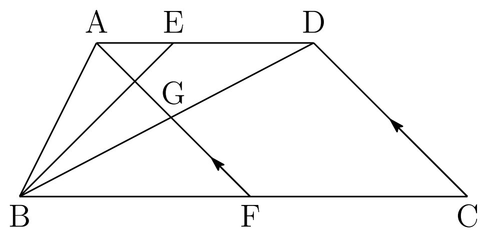
$\overline{\mathrm{PQ}} : \overline{\mathrm{PR}} = \overline{\mathrm{QS}} : \overline{\mathrm{SR}}$ より

$$\overline{\mathrm{QP}} : \overline{\mathrm{PT}} = \overline{\mathrm{QS}} : \overline{\mathrm{SR}}$$

したがって　$\mathrm{PS}//\mathrm{TR}$　ゆえに　$\angle\mathrm{QPS} = \angle\mathrm{PTR}$，$\angle\mathrm{RPS} = \angle\mathrm{PRT}$

よって　$\angle\mathrm{QPS} = \angle\mathrm{RPS}$

(2) $\mathrm{AF}//\mathrm{DC}$ より　$\triangle\mathrm{BFG} \backsim \triangle\mathrm{BCD}$



ゆえに　$\overline{\mathrm{BG}} : \overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BF}} : \overline{\mathrm{BC}}$

条件から　$\overline{\mathrm{BA}} : \overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{BF}} : \overline{\mathrm{BC}}$

したがって　$\overline{\mathrm{BA}} = \overline{\mathrm{BG}}$

よって　$\triangle\mathrm{BAG}$ は二等辺三角形

(3) $\triangle\mathrm{BAD}$ において，$\overline{\mathrm{BA}} : \overline{\mathrm{BD}} = \overline{\mathrm{AE}} : \overline{\mathrm{ED}}$ であるから，線分 BE は，$\angle\mathrm{B}$ の二等分線である．(2) の結果より，$\triangle\mathrm{BAG}$ は二等辺三角形であるから，$\angle\mathrm{B}$ の二等分線は，辺 AG の中点で直交する．よって　$\mathrm{BE}\perp\mathrm{AF}$　■

6 (1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$ であるから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 \quad ゆえに \quad 7^2=5^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+8^2$$

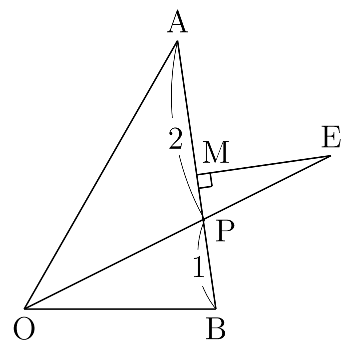
これを解いて $\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=20}$

別解 余弦定理により $\quad \cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\dfrac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot8\cdot5}=\dfrac{1}{2}$

よって $\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=8\cdot5\cdot\dfrac{1}{2}=20$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ について，E は直線 OP 上の点であるから $\quad t=2s \quad \cdots$ ①

ゆえに 2 点 A，B の中点を M とすると



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ME}}&=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}\\&=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2s\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=\left(s-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(2s-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{ME}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}&=\left\{\left(s-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(2s-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=\left(s-\frac{1}{2}\right)|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\left(2s-\frac{1}{2}\right)|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\&=64\left(s-\frac{1}{2}\right)+20s-25\left(2s-\frac{1}{2}\right)\\&=34s-\frac{39}{2}\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{ME}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{ME}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$ であるから

$$34s-\frac{39}{2}=0 \quad すなわち \quad \boldsymbol{s=\frac{39}{68}}$$

これを ① に代入すると $\quad \boldsymbol{t=\dfrac{39}{34}}$ ■

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $k=\dfrac{\alpha}{\beta}$ とおくと (k は正の実数)　$\alpha=k\beta$

ゆえに　$|\alpha+\beta|=|k\beta+\beta|=|(k+1)\beta|=(k+1)|\beta|$
$|\alpha|+|\beta|=|k\beta|+|\beta|=k|\beta|+|\beta|=(k+1)|\beta|$

よって　$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$

(2) $\gamma=x+yi$ とおくと，$\gamma+\overline{\gamma}=2|\gamma|$ より

$$(x+yi)+(x-yi)=2|\gamma| \quad \text{ゆえに} \quad x=|\gamma|$$

γ は 0 ではないので，$x=\sqrt{x^2+y^2}>0$　したがって　$x>0$
$x=\sqrt{x^2+y^2}$ の両辺を平方すると　$x^2=x^2+y^2$　ゆえに　$y=0$
よって，γ は正の実数である．

(3) $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ の両辺を平方すると

$$|\alpha+\beta|^2=(|\alpha|+|\beta|)^2 \quad \text{整理すると} \quad \alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta=2|\alpha||\beta|$$

したがって　$\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha\overline{\beta}}=2|\alpha\overline{\beta}|$

(2) の結果により，$\alpha\overline{\beta}$ は正の実数であるから

$$\alpha\overline{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\beta\overline{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot|\beta|^2>0$$

よって，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ は正の実数である．　■

$\boxed{8}$ (1) カードの取り出し方の総数は ${}_n\mathrm{C}_2$ (通り)

(a) $X=t$，$Y=s$ となるのは 1 通りであるから

$$P(X=t,\ Y=s)=\frac{1}{{}_n\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\frac{2}{n(n-1)}}$$

(b) $X=t$ となるのは，$Y=1,2,\cdots,t-1$ の $t-1$ 通りであるから

$$P(X=t)=\frac{t-1}{{}_n\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\frac{2(t-1)}{n(n-1)}}$$

(c) $Y=s$ となるのは，$X=s+1,\ s+2,\cdots,\ n$ の $n-s$ 通りであるから

$$P(Y=s)=\frac{n-s}{{}_n\mathrm{C}_2}=\boldsymbol{\frac{2(n-s)}{n(n-1)}}$$

(d) $[\,x\,]$ を x を超えない最大の整数とする．

$X=3Y$ をみたす場合の数は $\left[\dfrac{n}{3}\right]$ であるから

$$P(X=3Y)=\frac{\left[\dfrac{n}{3}\right]}{{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{2\left[\dfrac{n}{3}\right]}{n(n-1)}$$

$n\equiv 0 \pmod 3$ のとき，$\left[\dfrac{n}{3}\right]=\dfrac{n}{3}$ であるから

$$P(X=3Y)=\frac{2\left[\dfrac{n}{3}\right]}{n(n-1)}=\boldsymbol{\frac{2}{3(n-1)}}$$

$n\equiv 1 \pmod 3$ のとき，$\left[\dfrac{n}{3}\right]=\dfrac{n-1}{3}$ であるから

$$P(X=3Y)=\frac{2\left[\dfrac{n}{3}\right]}{n(n-1)}=\boldsymbol{\frac{2}{3n}}$$

$n\equiv 2 \pmod 3$ のとき，$\left[\dfrac{n}{3}\right]=\dfrac{n-2}{3}$ であるから

$$P(X=3Y)=\frac{2\left[\dfrac{n}{3}\right]}{n(n-1)}=\boldsymbol{\frac{2(n-2)}{3n(n-1)}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{t=2}^{n} t\,P(X=t) = \sum_{t=2}^{n} t\cdot\frac{2(t-1)}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{t=2}^{n} t(t-1) = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k(k-1) \\ E(Y) &= \sum_{s=1}^{n-1} s\,P(Y=s) = \sum_{s=1}^{n-1} s\cdot\frac{n-s}{n(n-1)} \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{s=1}^{n-1} s(n-s) = \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k(n-k) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} E(X)+E(Y) &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\{k(k-1)+k(n-k)\} \\ &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{2}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1) = \boldsymbol{n+1} \end{aligned}$$

■

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $3(2E-M)=AB-M+A$ より

$$\begin{aligned}M&=3E-\frac{1}{2}AB-\frac{1}{2}A\\&=3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&6\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-9&20\\7&-17\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&6\\3&4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-3&-2\\1&-8\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&6\\3&4\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\mathbf{2}&\mathbf{-2}\\\mathbf{-2}&\mathbf{5}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2) $(M-\alpha E)M=\beta(M-\alpha E)$ より

$$M^2-(\alpha+\beta)M+\alpha\beta E=O$$

(1) の結果にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$M^2-7M+6E=O$$

上の 2 式から　　$(\alpha+\beta-7)M=(\alpha\beta-6)E$

$\alpha+\beta-7\neq0$ のとき，M は E の実数倍となり，(1) の結果に反する．

したがって　　$\alpha+\beta-7=0,\ \alpha\beta-6=0$

$\alpha\leqq\beta$ に注意して解くと　　$\boldsymbol{\alpha=1,\ \beta=6}$

(3) (2) の結果より，$(M-E)M=6(M-E)$ であるから

$$\begin{aligned}M^5-M^4&=(M-E)M^4=(M-E)MM^3=6(M-E)M^3\\&=6(M-E)MM^2=6\cdot6(M-E)M^2\\&=6^2(M-E)MM=6^2\cdot6(M-E)M\\&=6^4(M-E)\end{aligned}$$

よって　　$u=6^4=\mathbf{1296}$ ■

10 (1) 点 $(1,\ 1)$ は放物線の焦点で，直線 $y=-2$ はその準線であるから

放物線の頂点は　$\left(1,-\dfrac{1}{2}\right)$

また，焦点および頂点の y 座標から　$p=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

したがって，放物線の方程式は

$$(x-1)^2=4\cdot\frac{3}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)\quad\text{すなわち}\quad y=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{6},\ b=-\dfrac{1}{3}}$

別解 放物線上の点 $(x,\ y)$ について，次式が成り立つ．

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=|\,y+2\,|$$

これを平方すると

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(y+2)^2\quad\text{整理すると}\quad y=\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$$

(2) 2 点 $(3,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ は楕円の焦点であるから，楕円の中心は　$(1,\ 0)$
楕円の中心から焦点までの距離が 2 であるから，長軸および短軸の長さをそれぞれ $2a$，$2b$ とすると $(a,\ b>0)$

$$2a=12,\quad \sqrt{a^2-b^2}=2\quad\text{ゆえに}\quad a^2=36,\ b^2=32$$

したがって，楕円の方程式は　$\dfrac{(x-1)^2}{36}+\dfrac{y^2}{32}=1$

よって　$\boldsymbol{p=36,\ q=32,\ r=1}$

別解 楕円上の点 $(x,\ y)$ について，次式が成り立つ．

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=12$$

これから　$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=12-\sqrt{(x+1)^2+y^2}$

この両辺を平方して整理すると

$$3\sqrt{(x+1)^2+y^2}=x+17$$

さらに，上式の両辺を平方して整理すると

$$8(x-1)^2+9y^2=288\quad\text{よって}\quad\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{y^2}{32}=1$$

■

11 (1) $T_n = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f(x_j) + f(x_{j+1})}{2} h = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)h + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_{j+1})h$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)h + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)h = \boldsymbol{\frac{1}{2}A_n + \frac{1}{2}B_n}$$

(2) $f(x) = x^2$, $h = \frac{1-0}{n} = \frac{1}{n}$, $x_j = 0 + j\cdot\frac{1}{n} = \frac{j}{n}$ より

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{j=0}^{n-1} f(x_j)h = \sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) = \boldsymbol{\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1)}, \\
B_n &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)h = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n} j^2 \\
&= \frac{1}{n^3}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \boldsymbol{\frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1)}, \\
T_n &= A_n + B_n \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6n^2}(n-1)(2n-1) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6n^2}(n+1)(2n+1) \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{6n^2}(2n^2+1)}
\end{aligned}$$

(3) 真の値 S は $\quad S = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

近似値 T_n による相対誤差は

$$\left|\frac{T_n - S}{S}\right| = |3T_n - 1| = \left|3\cdot\frac{1}{6n^2}(2n^2+1) - 1\right| = \frac{1}{2n^2}$$

この相対誤差が 0.01 以下であるから

$$\frac{1}{2n^2} \leqq 0.01 \quad \text{ゆえに} \quad n^2 \geqq 50$$

これをみたす n の最小値は $\quad \boldsymbol{n = 8}$ ■

12 (1)

$$\sigma_x{}^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k{}^2 - 2\overline{x}\cdot\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}x_k + \overline{x}^2$$
$$= E(x^2) - 2\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = E(x^2) - \overline{x}^2$$

よって $\boldsymbol{\sigma_x = \sqrt{E(x^2) - \overline{x}^2}}$

(2)

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k y_k - \overline{y}x_k - \overline{x}y_k + \overline{x}\,\overline{y})$$
$$= E(xy) - \overline{y}\,\overline{x} - \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} = \boldsymbol{E(xy) - \overline{x}\,\overline{y}}$$

(3) 相関係数の定義により $\boldsymbol{r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}}$

補足 相関係数 r は，2 つの変量 x，y 間の相関すなわち類似性を示す指標であり，$-1 \leqq r \leqq 1$ の値をとる．シュワルツ (Schwartz) の不等式により

$$\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})\right\}^2 \leqq \left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{x})^2\right\}\left\{\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - \overline{y})^2\right\}$$

すなわち $\sigma_{xy}{}^2 \leqq \sigma_x{}^2\sigma_y{}^2$ よって $-1 \leqq \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} \leqq 1$

$r > 0$ のとき「正の相関」，$r < 0$ のとき「負の相関」があるという．相関係数が 0 に近いときは 2 つの変量間の相関は弱い．

(4) 与えらえた等式を t について整理すると

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - tx_k - 1)^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\{x_k{}^2t^2 - 2(x_k y_k - x_k)t + (y_k - 1)^2\}$$
$$= E(x^2)t^2 - 2\{E(xy) - \overline{x}\}t + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}(y_k - 1)^2$$

これは t の 2 次関数で，$E(x^2) > 0$ であるから，上式を最小にする t の値は

$$\boldsymbol{t = \frac{E(xy) - \overline{x}}{E(x^2)}}$$

解説 $\displaystyle\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b)^2$ を最小にする a，b の値を求める．

$$F(a,\ b) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b)^2$$

とおいて，F を a，b について偏微分すると

$$\frac{\partial F}{\partial a} = -\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b)x_k = -2\{E(xy) - aE(x^2) - b\overline{x}\}$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = -\frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N}(y_k - ax_k - b) = -2(\overline{y} - a\overline{x} - b)$$

F が最小となるとき，$\dfrac{\partial F}{\partial a} = \dfrac{\partial F}{\partial b} = 0$ であるから

$$aE(x^2) + b\overline{x} = E(xy), \quad a\overline{x} + b = \overline{y}$$

したがって　$a = \dfrac{E(xy) - \overline{x}\,\overline{y}}{E(x^2) - \overline{x}^2} = \dfrac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2}$，　$b = -a\overline{x} + \overline{y}$

このとき，直線 $y = ax + b$，すなわち

$$y - \overline{y} = \frac{\sigma_{xy}}{{\sigma_x}^2}(x - \overline{x})$$

を回帰直線といい，ある値 x_i に対する y の予測値を計算できる．

また，相関係数 r と回帰直線の傾き a の符号が一致する．■

13 (1) 2点P，Qの y 座標が等しいので，C の頂点の座標は $\left(\frac{t}{2},\ 0\right)$

C の方程式を $y=a\left(x-\frac{t}{2}\right)^2$ とおくと，これがPを通るから

$$(t-2)^2=a\left(t-\frac{t}{2}\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad a=\frac{4}{t^2}(t-2)^2$$

よって $\boldsymbol{f(x)=\frac{4}{t^2}(t-2)^2\left(x-\frac{t}{2}\right)^2}$

(2) 求める面積 $S(t)$ は

$$\begin{aligned} S(t)&=t(t-2)^2-\int_0^t \frac{4}{t^2}(t-2)^2\left(x-\frac{t}{2}\right)^2 dx \\ &=t(t-2)^2-\frac{4}{t^2}(t-2)^2\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{t}{2}\right)^3\right]_0^t \\ &=t(t-2)^2-\frac{1}{3}t(t-2)^2=\boldsymbol{\frac{2}{3}t(t-2)^2} \end{aligned}$$

(3) $S(t)=\frac{2}{3}(t^3-4t^2+4t)$ を微分すると

$$S'(t)=\frac{2}{3}(3t^2-8t+4)=\frac{2}{3}(3t-2)(t-2)$$

したがって，$S(t)$ の増減表は $(0<t<2)$

t	(0)	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	(2)
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	(0)	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	(0)

よって $\boldsymbol{t=\frac{2}{3}}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\frac{64}{81}}$ ■