平成13年度　鹿児島大学２次試験前期日程(数学問題)
理・工・医・歯・農・水産・教育学部　平成13年2月25日

- 理[数理・物理]・工・医[医]学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から1問選択，$\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ から1問選択，$\boxed{9}$ ～ $\boxed{12}$ から1問選択．数II・III・A・B・C(120分)
- 理[地環]，医[理学療法]・歯・農・水産学部は，$\boxed{13}$ 必答，$\boxed{3}$ ～ $\boxed{5}$ から1問選択，$\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ から1問選択．数II・A・B(90分)
- 教育[数学・理科・技術・教育・心理・家政・養護・健康]学部は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$ 必答，$\boxed{6}$ ～ $\boxed{8}$ から1問選択．数II・III・B(90分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 変数θが$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$の範囲を動くとき，$\theta$の関数

$$f(\theta) = 4\sin^3\theta - 9\sin\theta\cos\theta + 4\cos^3\theta + 1$$

について，次の各問に答えよ．

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$とするとき，$t$のとる値の範囲を求めよ．

(2) θの関数$f(\theta)$をtの関数$g(t)$として表せ．

(3) tが(1)の範囲を動くとき，関数$g(t)$の最大値と最小値を求めよ．また，そのときのtの値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の各問に答えよ．

(1) 関数$f(x) = x - e^{x-1}$について，方程式$f(x) = 0$は正の解をただ1つもつことを示し，その解を求めよ．

(2) $x > 0$で曲線$y = 2x^2\log x$と曲線$y = kx^2 - k$ $(k > 0)$が共有点において，共通の接線をもつように定数kの値を定めよ．

(3) (2)のkの値とそのときの共有点のx座標αに対して，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{\alpha}(2x^2\log x - kx^2 + k)\,dx$$

を求めよ．ただし，必要があれば$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n} = 0$を用いてよい．

$\boxed{3}$ 次の各問に答えよ．

(1) 次の等式を証明せよ．

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

(2) 二つの整数の平方の和で表される数の全体からなる集合を A とする．x，y が集合 A の要素であるとき，積 xy もまた集合 A の要素であることを証明せよ．

(3) (2) の集合 A に対して，5 および 5^5 は A の要素であることを証明せよ．

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_2=3,\ nS_n=(n-1)(2a_n+2-n)\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

をみたしているとき，次の各問に答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ は $na_{n+1}-2(n+1)a_n=n+2$ $(n=1,2,3,\cdots)$ をみたすことを証明せよ．

(2) $b_n=\dfrac{1}{n}(a_n+1)$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2a_k+1)$ を n の式で表せ．

$\boxed{5}$ 円 O の直交する二つの直径 PQ と RS に対して，OR の延長上に点 A を PA $=$ PQ となるようにとる．PA と円 O の交点を M とし，さらに線分 MQ と線分 OA の交点を B とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 点 M は線分 PA の中点であることを証明せよ．

(2) 線分の長さの比 AP : PB と AR : RB を求めよ．

(3) 線分 PR は ∠APB の二等分線であることを証明せよ．

$\boxed{6}$ 三角形 ABC において，AB $=2$，AC $=1$，∠BAC $=120^\circ$ とし，実数 $k>0$，$l>0$ に対して，$4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+k\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ で与えれている点を P，直線 AP と直線 BC との交点を D とし，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=l\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ で与えられている点を Q とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 線分の長さの比 BD : DC を k を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となるとき，k の値を求めよ．

(3) (2) の k の値に対して，点 Q が三角形 ABC の外接円の周上にあるとき，l の値を求めよ．

$\boxed{7}$ i を虚数単位とするとき，次の各問に答えよ．

(1) 複素数 z に対して，$\dfrac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数となるとき，複素数平面において点 z はどのような図形を描くか．

(2) (1) で与えられる図形上の原点 O，A(α)，B(β) が正三角形の頂点をなすとき，複素数 α，β を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \arg\alpha < \arg\beta < 360^\circ$ とし，$\arg z$ は z の偏角を表す．

$\boxed{8}$ 3 個のさいころを同時に振るものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 次の確率を求めよ．

(a) 1 の目のみが 3 個出る確率

(b) 1 と 2 の両方の目が出て，その他の目が出ない確率

(c) 1 と 2 と 3 の 3 種類の目が 1 個ずつ出る確率

(2) 出る目の最大値を M，最小値を m とする．$M-m=k$ となる確率 p_k $(0 \leqq k \leqq 5)$ を求めよ．ただし，必要ならば $k \geqq 2$ の計算には，次の事項 (i), (ii) を用いてもよい．

(i) 出る目の数は，m，$m+k$ の 2 種類の目のみの場合と m，$m+k$，$m+i$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ の 3 種類の目の場合のいずれかである．

(ii) $1 \leqq m \leqq 6-k$ である．

$\boxed{9}$ 行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ について，以下の手順で A^n を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(1) $x^2-yz=1$，$x>0$ とする．行列 $P=\begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$ が $P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P=A$ をみたすように x，y，z を定めよ．

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ であることを証明せよ．

(3) A^n を求めよ．

$\boxed{10}$ xy 平面において，原点 O と直線 $x = 2$ からの距離の比が $\sqrt{r} : 1$ であるような点 P について，次の問に答えよ．

(1) 点 P の軌跡を C とするとき，曲線 C の方程式を求めよ．

(2) $r = 2$ のとき，軌跡 C はどのような図形になるか答え，その軌跡の概形を描け．

(3) 軌跡 C が，長軸の長さが $\sqrt{5}$ であるような楕円になるときの r の値を求めよ．

$\boxed{11}$ 関数 $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$ について，次の各問に答えよ．

(1) 3 次関数 $f(x) = 0$ の正の解の個数は 1 個であることを証明せよ．

(2) (1) の解をニュートン法で計算する式は

$$x_{n+1} = \frac{2{x_n}^3 - {x_n}^2 + 1}{3{x_n}^2 - 2x_n - 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

となることを証明せよ．

(3) この方程式の正の解の近似値を，ニュートン法を用いて計算する．$f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ と $f(2)$ の絶対値 $\left|f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right|$，$|f(2)|$ の小さい方の x の値 x_1 を求めよ．さらに，x_1 を初期値として，正の解の近似値 x_2 を求めよ．

$\boxed{12}$ 確率変数 X は，n 個の値 1, 2, $\cdots$, n を等しい確率でとるものとする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 確率変数 X の平均値と標準偏差を求めよ．

(2) 確率変数 $Y = 2X - 1$ の平均値 m と標準偏差 σ を求めよ．

(3) $|Y - m| < \sqrt{3}\sigma$ を証明せよ．ただし，$n \geqq 2$ とする．

$\boxed{13}$ 曲線 $y = -x^2 + 4$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ を C とする．曲線 C と y 軸との交点を P とし，x 軸との交点を Q とする．さらに，原点 O と点 Q を結ぶ線分上に点 R をとる．点 R を通り，x 軸に垂直な直線がこの曲線 C と交わる点を S とする．このとき，次の各問に答えよ．

(1) 曲線 C と x 軸および y 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(2) R の座標を $(t,\ 0)$ とするとき，線分 PR と線分 RS および曲線 C とで囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めよ．

(3) $S(t)$ の最大値を求めよ．また，そのときの t の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$45^\circ \leqq \theta+45^\circ \leqq 225^\circ$ であるから

$$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$$

(2) $t=\sin\theta+\cos\theta$ より

$$\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1\}=\frac{1}{2}(t^2-1)$$

したがって

$$\begin{aligned}
f(\theta) &= 4\sin^3\theta-9\sin\theta\cos\theta+4\cos^3\theta+1\\
&= 4\{(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)\}-9\sin\theta\cos\theta+1\\
&= 4\left\{t^3-3\cdot\frac{1}{2}(t^2-1)\cdot t\right\}-9\cdot\frac{1}{2}(t^2-1)+1\\
&= -2t^3-\frac{9}{2}t^2+6t+\frac{11}{2}
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{g(t)=-2t^3-\frac{9}{2}t^2+6t+\frac{11}{2}}$

(3) (2) の結果から

$$g'(t)=-6t^2-9t+6=-3(t+2)(2t-1)$$

したがって，$g(t)$ の増減表は次のようになる．

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	-3	$\nearrow$	$\frac{57}{8}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}-\frac{7}{2}$

よって　　**$t=\frac{1}{2}$ のとき　最大値 $\frac{57}{8}$**
$t=-1$ のとき　最小値 -3

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $f(x)=x-e^{x-1}$ を微分すると　$f'(x)=1-e^{x-1}$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

よって，方程式 $f(x)=0$ の解は　$\boldsymbol{x=1}$

(2) 曲線 $y=2x^2\log x$ と曲線 $y=kx^2-k$ $(k>0)$ の接点の座標を $\alpha>0$ とする．$g(x)=2x^2\log x-k(x^2-1)$ とおくと

$$g'(x)=4x\log x+2x-2kx=2x(2\log x+1-k)$$

このとき，$g(\alpha)=0$，$g'(\alpha)=0$ であるから

$$2\alpha^2\log\alpha-k(\alpha^2-1)=0,\quad 2\log\alpha+1-k=0\quad\cdots(*)$$

上の 2 式から k を消去すると

$$2\alpha^2\log\alpha-(2\log\alpha+1)(\alpha^2-1)=0$$

整理すると　$2\log\alpha-\alpha^2+1=0$　ゆえに　$\log\alpha^2=\alpha^2-1$

したがって　$\alpha^2=e^{\alpha^2-1}$　(1) の結果から　$\alpha^2=1$

$\alpha>0$ であるから　$\alpha=1$　これを $(*)$ に代入すると　$\boldsymbol{k=1}$

(3) (2) の結果により

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}(2x^2\log x-x^2+1)\,dx=\left[\,\frac{2}{3}x^3\log x-\frac{5}{9}x^3+x\,\right]_{\frac{1}{n}}^{1}$$
$$=\frac{4}{9}+\frac{2}{3n^2}\cdot\frac{\log n}{n}+\frac{5}{9n^3}-\frac{1}{n}$$

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^{1}(2x^2\log x-x^2+1)\,dx=\boldsymbol{\frac{4}{9}}$$

3 (1)
$$\begin{aligned}(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 &= a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2\\ &= (a^2+b^2)(c^2+d^2)\end{aligned}$$

(2) $x=a^2+b^2$，$y=c^2+d^2$ とおくと (a，b，c，d は整数)

$$xy=(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2$$

$ac+bd$，$ad-bc$ は整数であるから，xy は A の要素である．

(3) $5=1^2+2^2$ であるから

$$5^5=5^4\cdot 5=5^4(1^2+2^2)=(5^2)^2+(5^2\cdot 2)^2=25^2+50^2$$

よって，5，5^5 は A の要素である．

補足 n を自然数とすると，5^n は A の要素である．

i) $5=1^2+2^2$ より，$n=1$ のとき成立する．

ii) $n=k$ のとき，成立すると仮定すると，(2) において，$x=5$，$y=5^k$ とすると，$xy=5^{k+1}$ は A の要素である．

i), ii) により，すべての自然数 n に対して，5^n は A の要素である．

4 (1) 与えらえた漸化式から

$$\begin{aligned}nS_n &= (n-1)(2a_n+2-n) &\cdots ①\\ (n+1)S_{n+1} &= n(2a_{n+1}+1-n) &\cdots ②\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}n(n+1)S_{n+1} &= n^2(2a_{n+1}+1-n) &\cdots ② \times n\\ n(n+1)S_n &= (n+1)(n-1)(2a_n+2-n) &\cdots ① \times (n+1)\end{aligned}$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$\begin{aligned}n(n+1)(S_{n+1}-S_n) &= 2n^2a_{n+1}-2(n+1)(n-1)a_n-(n-1)(n+2)\\ n(n+1)a_{n+1} &= 2n^2a_{n+1}-2(n+1)(n-1)a_n-(n-1)(n+2)\end{aligned}$$

整理すると　$n(n-1)a_{n+1}-2(n+1)(n-1)a_n=(n-1)(n+2)$

$n\neq 1$ のとき　$na_{n+1}-2(n+1)a_n=n+2 \quad \cdots (*)$

$n=1$ のとき，① より，$a_1=S_1$ であるから　$a_1=0$

$a_1=0$，$a_2=3$ より，$n=1$ のとき，$(*)$ は成立する．

よって，すべての自然数 n に対して，$(*)$ は成立する．

(2) $(*)$ より　$n(a_{n+1}+1)=2(n+1)(a_n+1)$

上式の両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$\frac{1}{n+1}(a_{n+1}+1)=\frac{2}{n}(a_n+1)\quad \text{ゆえに}\quad b_{n+1}=2b_n$$

$b_1=a_1+1=1$ より，数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 2 の等比数列であるから

$$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=\boldsymbol{2^{n-1}}$$

(3) $b_n=\dfrac{1}{n}(a_n+1)$ より　$a_n=nb_n-1=n\cdot 2^{n-1}-1$

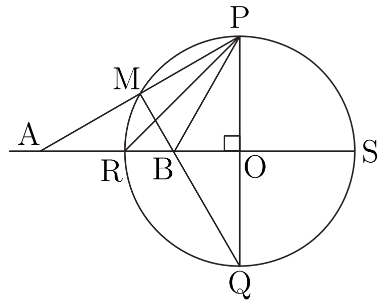
ここで，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}$ とおくと

$$\begin{aligned}
2T_n&=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^k=\sum_{k=0}^{n-1}k\cdot 2^k+n\cdot 2^n\\
&=\sum_{k=1}^{n}(k-1)\cdot 2^{k-1}+n\cdot 2^n\\
&=\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}+n\cdot 2^n\\
&=T_n-(2^n-1)+n\cdot 2^n\\
T_n&=(n-1)\cdot 2^n+1
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(2a_k+1)&=\sum_{k=1}^{n}\{2(k\cdot 2^{k-1}-1)+1\}\\
&=2\sum_{k=1}^{n}k\cdot 2^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}\\
&=2T_n-n\\
&=2\{(n-1)\cdot 2^n+1\}-n\\
&=\boldsymbol{(n-1)2^{n+1}+2-n}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 円 O の半径を r とする．PA $=$ PQ より，直角三角形 APO について，$\mathrm{PA} = 2r$，$\mathrm{PO} = r$ であるから　$\angle\mathrm{APO} = 60^\circ$



PQ は円 O の直径であるから　$\angle\mathrm{PMQ} = 90^\circ$

ゆえに　$\mathrm{PM} = \mathrm{PQ}\cos 60^\circ = 2r\cdot\dfrac{1}{2} = r$

よって　$\mathrm{PA} : \mathrm{PM} = 2r : r = 2 : 1$

したがって，M は PA の中点である．

(2) (1) の結果から，△PQM について

$$\angle\mathrm{PQM} = 180^\circ - (\angle\mathrm{MPQ} + \angle\mathrm{PMQ}) = 30^\circ$$

$\triangle\mathrm{PBO} \equiv \triangle\mathrm{QBO}$ であるから　$\angle\mathrm{BPO} = 30^\circ$

ゆえに　$\mathrm{PB} = \dfrac{\mathrm{PO}}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2r}{\sqrt{3}}$　よって　$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = 2r : \dfrac{2r}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\sqrt{3} : 1}$

また　$\mathrm{AR} = \mathrm{AO} - \mathrm{RO} = \mathrm{AP}\sin 60^\circ - \mathrm{RO} = \sqrt{3}\,r - r = (\sqrt{3}-1)r$

$$\mathrm{RB} = \mathrm{RO} - \mathrm{BO} = \mathrm{RO} - \mathrm{PO}\tan 30^\circ = r - \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}r$$

よって　$\mathrm{AR} : \mathrm{RB} = (\sqrt{3}-1)r : \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}r = \boldsymbol{\sqrt{3} : 1}$

(3) (2) の結果から　$\mathrm{PA} : \mathrm{PB} = \mathrm{AR} : \mathrm{RB}$

よって，PR は $\angle\mathrm{APB}$ の二等分線である．

6 (1) $4\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{PB}+k\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ より　$-4\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+k(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$

したがって　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{k+2}{k+6}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{k+2}$　　ゆえに　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{k+2}$

よって　　$\mathbf{BD : DC} = \boldsymbol{k} \mathbf{: 2}$

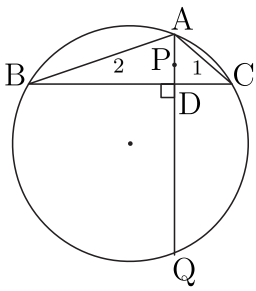
(2) $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$ より，$(2\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$ であるから

$$-2|\overrightarrow{AB}|^2+(2-k)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+k|\overrightarrow{AC}|^2=0$$

$$-2\cdot2^2+(2-k)\cdot2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+k\cdot1^2=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{k=5}$

(3) △ABC に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{BC}^2=2^2+1^2-2\cdot1\cos120^\circ=7$$

ゆえに　　$\mathrm{BC}=\sqrt{7}$

また　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot2\cdot1\sin120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\dfrac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\mathrm{BC}=\triangle\mathrm{ABC}$ であるから

$$\frac{1}{2}\mathrm{AD}\cdot\sqrt{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{ゆえに}\quad\mathrm{AD}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

(1)，(2) の結果から　$\mathrm{BD}=\dfrac{5}{7}\mathrm{BC}=\dfrac{5}{\sqrt{7}}$，$\mathrm{DC}=\dfrac{2}{7}\mathrm{BC}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$

方べきの定理により，$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DQ}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$ であるから

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\mathrm{DQ}=\frac{5}{\sqrt{7}}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\quad\text{ゆえに}\quad\mathrm{DQ}=\frac{10}{\sqrt{21}}$$

したがって　　$\mathrm{AD}:\mathrm{DQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}:\dfrac{10}{\sqrt{21}}=3:10$

よって　　$l=\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AD}}=\dfrac{\mathrm{AD}+\mathrm{DQ}}{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{\dfrac{13}{3}}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\dfrac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数であるから

$$\frac{z-2i}{i(z-2)}=\overline{\left(\frac{z-2i}{i(z-2)}\right)} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{z-2i}{i(z-2)}=\frac{\overline{z}+2i}{-i(\overline{z}-2)}$$

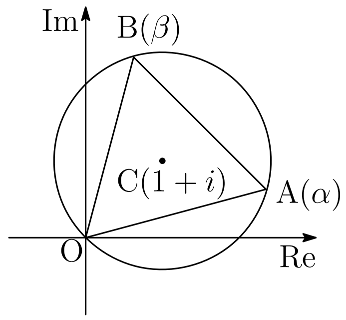
したがって

$$\begin{aligned}(z-2i)(\overline{z}-2)+(z-2)(\overline{z}+2i)&=0\\ z\overline{z}+(-1+i)z+(-1-i)\overline{z}&=0\\ |z|^2+\overline{(-1-i)}z+(-1-i)\overline{z}+|-1-i|^2&=|-1-i|^2\\ |z-1-i|^2&=2\end{aligned}$$

よって，**中心 $1+i$，半径 $\sqrt{2}$ の円を描く．(ただし，$z\neq 2$)**

補足 $\dfrac{z-2i}{i(z-2)}$ が実数であるから，$\dfrac{z-2i}{z-2}$ は純虚数．ゆえに，$z-2$ と $z-2i$ は垂直である．よって，z は 2 点 2，$2i$ を直径の両端とする円周上の点である．

(2) A，B は C を中心に O をそれぞれ 120°，-120° だけ回転させたものであるから



$$\begin{aligned}&(1+i)+(-1-i)(\cos 120^\circ \pm i\sin 120^\circ)\\ =&(1+i)+(-1-i)\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ =&\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}+\frac{3\mp\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{\alpha=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}i,\ \beta=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}i}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) (a) 1の目が出る確率は $\dfrac{1}{6}$ であるから，求める確率は

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \mathbf{\frac{1}{216}}$$

(b) 1または2の目が出る確率から1だけまたは2だけが出る場合の確率を引けばよいから

$$\left(\frac{2}{6}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \mathbf{\frac{1}{36}}$$

(c) 1，2，3の目が1個ずつ出る確率は

$$\frac{3!}{6^3} = \mathbf{\frac{1}{36}}$$

(2) i) $k = 0$ のとき，3個とも m であるから $(1 \leqq m \leqq 6)$，(1)-(a) より

$$p_0 = \frac{1}{216} \times 6 = \mathbf{\frac{1}{36}}$$

ii) $k = 1$ のとき，m または $m+1$ である確率であるから $(1 \leqq m \leqq 5)$，(1)-(b) より

$$p_1 = \frac{1}{36} \times 5 = \mathbf{\frac{5}{36}}$$

iii) $2 \leqq k \leqq 5$ のとき
m，$m+k$ の2種類の目である確率は $(1 \leqq m \leqq 6-k)$，(1)-b より

$$\frac{1}{36}(6-k)$$

m，$m+k$，$m+i$ $(1 \leqq i \leqq k-1)$ の3種類である確率は $(1 \leqq m \leqq 6-k)$，(1)-c より

$$\frac{1}{36}(k-1)(6-k)$$

したがって　$p_k = \dfrac{1}{36}(6-k) + \dfrac{1}{36}(k-1)(6-k) = \dfrac{1}{36}k(6-k)$

よって　$\boldsymbol{p_2 = \frac{2}{9}}$，$\boldsymbol{p_3 = \frac{1}{4}}$，$\boldsymbol{p_4 = \frac{2}{9}}$，$\boldsymbol{p_5 = \frac{5}{36}}$

$\boxed{\mathbf{9}}$ (1) $P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P = A$ の両辺に P を左から掛けると $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P = PA$

ゆえに $\quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+x \\ 2z & 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y & x+3y \\ z-x & z+3x \end{pmatrix}$$

よって $\quad 2x+z = x-y,\ \ 2y+x = x+3y,\ \ 2z = z-x,\ \ 2x = z+3x$

これから $\qquad x+z=0,\ \ y=0$

上の 2 式と $x^2-yz=1,\ x>0$ から $\qquad \boldsymbol{x=1,\ y=0,\ z=-1}$

(2) 数学的帰納法により $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdots (*)$ を証明する.

i) $n=1$ のとき

$$左辺 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad 右辺 = \begin{pmatrix} 2^1 & 1{\cdot}2^0 \\ 0 & 2^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ.

ii) $n=k$ のとき

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^k & k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^{k+1} & (k+1)2^k \\ 0 & 2^{k+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ.

i)，ii) から，すべての自然数 n に対して $(*)$ が成り立つ.

(3) $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ とおくと，$A=P^{-1}BP$ であるから

$$\begin{aligned} A^n &= (P^{-1}BP)^n \\ &= (P^{-1}BP)(P^{-1}BP)\cdots(P^{-1}BP)(P^{-1}BP) \\ &= P^{-1}BPP^{-1}BP\cdots P^{-1}BPP^{-1}BP \\ &= P^{-1}B^nP \end{aligned}$$

(1)，(2) の結果から

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \boldsymbol{2^{n-1}\begin{pmatrix} 2-n & n \\ -n & n+2 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{10}}$ (1) 点 P を $(x,\ y)$ とおくと，条件により

$$\sqrt{x^2+y^2} : |x-2| = \sqrt{r} : 1 \quad ゆえに \quad r(x-2)^2 = x^2+y^2$$

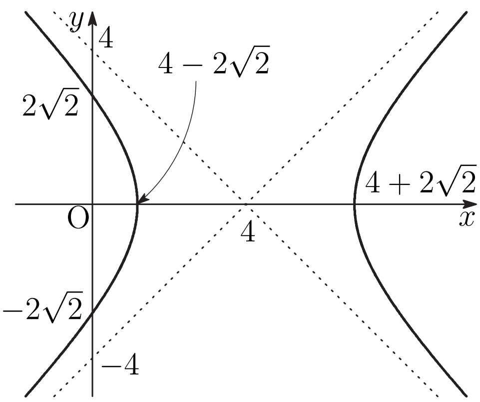
整理すると　$\boldsymbol{(r-1)x^2-4rx-y^2+4r=0}$

(2) $r=2$ を (1) の結果に代入すると

$$\begin{aligned} x^2-8x-y^2+8&=0 \\ (x-4)^2-y^2&=8 \end{aligned}$$

ゆえに　$\boldsymbol{\dfrac{(x-4)^2}{(2\sqrt{2})^2}-\dfrac{y^2}{(2\sqrt{2})^2}=1}$

よって，C は右の図のような双曲線.
中心 $(4,\ 0)$，焦点 $(0,\ 0)$，$(8,\ 0)$
漸近線は　$y=\pm(x-4)$



(3) (1) の結果から　$(1-r)x^2+4rx+y^2-4r=0 \quad \cdots(*)$

この曲線が楕円であるとき　$1-r>0$　ゆえに　$0<r<1$

$(*)$ を変形すると　$(1-r)\left(x+\dfrac{2r}{1-r}\right)^2+y^2=\dfrac{4r}{1-r}$

したがって　$\dfrac{\left(x+\dfrac{2r}{1-r}\right)^2}{\dfrac{4r}{(1-r)^2}}+\dfrac{y^2}{\dfrac{4r}{1-r}}=1$

$0<r<1$ のとき，$\dfrac{4r}{(1-r)^2}>\dfrac{4r}{1-r}$ であるから

$$2\sqrt{\frac{4r}{(1-r)^2}}=\sqrt{5} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{16r}{(1-r)^2}=5$$

整理すると　$5r^2-26r+5=0$　すなわち　$(r-5)(5r-1)=0$

$0<r<1$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{r=\dfrac{1}{5}}$

解説 (2) のとき，C の離心率 $e=\sqrt{2}>1$ から，C は双曲線である (鹿大 2012 年一般前期数学 $\boxed{\mathbf{6}}$ の解説[1]を参照．).

また，O を極とする極方程式は　$r=\dfrac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\cos\theta}$

(3) のとき，C が楕円であるとき，離心率 $\sqrt{r}<1$ から　$0<r<1$

このとき，楕円の長軸は，O を通り準線 $x=2$ に垂直な直線上 (x 軸上) にあるから，$(*)$ に $y=0$ を代入すると

$$(1-r)x^2+4rx-4r=0$$

この方程式の 2 つの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-\frac{4r}{1-r},\quad \alpha\beta=-\frac{4r}{1-r}$$

$|\alpha-\beta|=\sqrt{5}$ であるから，$(\alpha-\beta)^2=5$ より

$$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=5 \quad \text{ゆえに} \quad \left(-\frac{4r}{1-r}\right)^2-4\cdot\frac{-4r}{1-r}=5$$

整理すると　$(r-5)(5r-1)=0$　$0<r<1$ であるから　$r=\dfrac{1}{5}$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kagoshima/kagoshima_2012.pdf

$\boxed{\mathbf{11}}$ (1) $f(x)=x^3-x^2-x-1$ を微分すると

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

よって，$f(x)=0$ の正の解は $x>1$ の範囲に 1 個存在する．

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(x_n,\ f(x_n))$ における接線の方程式は

$$y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$$

この直線と x 軸の交点が $(x_{n+1},\ 0)$ であるから

$$-f(x_n)=f'(x_n)(x_{n+1}-x_n) \quad \text{ゆえに} \quad x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

よって $\quad x_{n+1}=x_n-\dfrac{{x_n}^3-{x_n}^2-x_n-1}{3{x_n}^2-2x_n-1}=\dfrac{2{x_n}^3-{x_n}^2+1}{3{x_n}^2-2x_n-1}$

(3) $f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{11}{8}$，$f(2)=1$ より $\left|f\left(\dfrac{3}{2}\right)\right|>|f(2)|$ であるから

$$\boldsymbol{x_1=2}$$

よって，(2) の結果から

$$x_2=\frac{2{x_1}^3-{x_1}^2+1}{3{x_1}^2-2x_1-1}=\boldsymbol{\frac{13}{7}}$$

$\boxed{\mathbf{12}}$ (1) 確率変数 X の平均 $E(X)$，分散 $V(X)$ は

$$E(X)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)=\boldsymbol{\frac{n+1}{2}}$$

$$\begin{aligned}V(X)&=E(X^2)-\{E(X)\}^2\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{4}(n+1)^2\\&=\frac{1}{12}(n^2-1)\end{aligned}$$

よって，標準偏差は　$\sqrt{V(X)}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}}$

(2) (1) の結果により

$$m=E(Y)=E(2X-1)=2E(X)-1=2\cdot\frac{n+1}{2}-1=\boldsymbol{n}$$

$$V(Y)=V(2X-1)=2^2V(X)$$

よって　$\sigma=\sqrt{V(Y)}=2\sqrt{V(X)}=2\cdot\frac{\sqrt{n^2-1}}{2\sqrt{3}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{3}}}$

(3) Y は $1,\ 3,\ 5,\ \cdots,\ 2n-1$ をとるので，$2Y-m$ は $1-n,\ 3-n,\ 5-n,\cdots,\ n-1$ をとる．ゆえに，$|Y-m|$ の最大値は $n-1$ である．
したがって，$n\geqq 2$ のとき

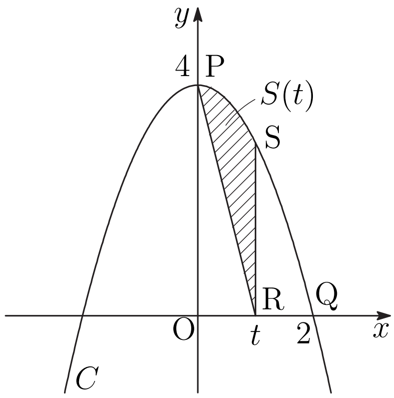
$$\begin{aligned}(\sqrt{3}\sigma)^2-(n-1)^2&=\left(\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{3}}\right)^2-(n-1)^2\\&=2(n-1)>0\end{aligned}$$

よって　$|Y-m|<\sqrt{3}\sigma$

$\boxed{\mathbf{13}}$ (1) 求める面積は

$$\int_0^2 (-x^2+4)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^2 = \mathbf{\frac{16}{3}}$$

(2) 右の図から



$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t (-x^2+4)\,dx - \frac{1}{2}\mathrm{OR}\cdot\mathrm{OP} \\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_0^t - \frac{1}{2}\cdot t\cdot 4 \\ &= -\frac{t^3}{3}+4t-2t \\ &= \boldsymbol{-\frac{t^3}{3}+2t} \end{aligned}$$

(3) (2) の結果から

$$S'(t) = -t^2+2 = -(t+\sqrt{2})(t-\sqrt{2})$$

したがって，$S(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{2}}{3}$	$\searrow$	$\frac{4}{3}$

よって，$\boldsymbol{t=\sqrt{2}}$ のとき最大値 $\mathbf{\frac{4\sqrt{2}}{3}}$ をとる．