令和７年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　令和７年２月25日

- 中等教育 (数学専攻) $\boxed{1}$ (1)(2)(3) $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$
  数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 初等教育 (数学専修) $\boxed{1}$ (1)(2)(4) $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$
  数 I・II・III・A・B・C (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $(x-5y+2z)^7$ の展開式における x^4y^2z の係数を求めよ．

(2) n は自然数とする．4^n-3n+8 は 9 の倍数であることを，n に関する数学的帰納法によって示せ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x\log(x+1)\,dx$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(4) 不定積分 $\displaystyle\int (x+1)\log(x+1)\,dx$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$OAB に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおく．実数 s，t が

$$2s+t=1,\quad s\geqq 0,\quad t\geqq 0$$

を満たしながら変化するとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P の存在する範囲を求めよ．

(2) 線分 AB を 2 : 3 に内分する点を C とする．線分 OC 上に点 P があるとき，OP : PC を求めよ．

(3) 線分 OA 上の点 D，線分 OB 上の点 E をとり，平行四辺形 ODPE をつくる．この平行四辺形の面積が最大になるとき，直線 OP と線分 AB の交点を F とする．AF : FB を求めよ．

3 次の各問いに答えよ．

(1) 複素数 z が $z^5 = 1$，$z \neq 1$ を満たしている．$w = z + \dfrac{1}{z}$ とおいたとき，$w^2 + w$ の値を求めよ．

(2) 複素数 α の実部と虚部がともに正であり，$\alpha^5 = 1$ が成り立つとする．このとき，次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$，$\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}$ の値をそれぞれ求めよ．

(イ) t を実数とする．$|4t - \alpha| < |2t - \alpha^2|$ を満たす t の範囲を求めよ．

4 $-\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ の範囲で，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}, \quad g(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

と定める．次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の座標を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および y 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\triangle$OAB に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおく．実数 s，t が

$$2s + t = 1, \quad s \geqq 0, \quad t \geqq 0$$

を満たしながら変化するとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P の存在する範囲を求めよ．

(2) 線分 AB を 2 : 3 に内分する点を C とする．線分 OC 上に点 P があるとき，OP : PC を求めよ．

(3) 点 O，A，B の座標がそれぞれ $(0,\ 0)$，$(-2,\ 1)$，$(1,\ 3)$ のとき，

$$\mathrm{OP} \perp \mathrm{AB}$$

となるように s，t の値を定めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の各問いに答えよ．

(1) 複素数 z が $z^5 = 1$，$z \neq 1$ を満たしている．このとき，次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) $z + z^2 + z^3 + z^4$ の値を求めよ．

(イ) $w = z + \dfrac{1}{z}$ とおいたとき，$w^2 + w$ の値を求めよ．

(2) 複素数 α の実部と虚部がともに正であり，α は $\alpha^5 = 1$ を満たしている．このとき，

$$\alpha + \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$$

の値をそれぞれ求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi$ の範囲で，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}, \quad g(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$$

と定める．次の各問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int g(x)\,dx$ を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ および直線 $x = \dfrac{\pi}{4}$ によって囲まれる部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $\dfrac{7!}{4!2!1!}x^4(-5y)^2\cdot 2z = 5250x^4y^2z$ より，求める係数は　**5250**

(2) $f(n) = 4^n - 3n + 8$ とする．

$(*)$「$f(n)$ は 9 の倍数である」

［1］$n = 1$ のとき，$f(1) = 9$ より，$(*)$ は成立する

［2］$n = k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 4^{k+1} - 3(k+1) + 8 \\ &= 4(4^k - 3k + 8) + 9(k-3) \\ &= 4f(k) + 9(k-3) \end{aligned}$$

したがって，$n = k+1$ のときも $(*)$ は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について $(*)$ は成立する．

補足 $4^3 \equiv 1 \pmod 9$ に注目する．

$n \equiv 0 \pmod 3$ のとき　$f(n) \equiv 1 - 0 + 8 \equiv 0 \pmod 9$

$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき　$f(n) \equiv 4 - 3 + 8 \equiv 0 \pmod 9$

$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき　$f(n) \equiv 4^2 - 6 + 8 \equiv 0 \pmod 9$

よって，すべての自然数 n について $(*)$ は成立する．

(3) (C は積分定数)

$$\begin{aligned}\int x\log(x+1)\,dx &= \frac{1}{2}\int (x^2-1)'\log(x+1)\,dx\\ &= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{2}\int (x^2-1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{2}\int (x-1)\,dx\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + C}\end{aligned}$$

別解 $t=\log(x+1)$ とおくと　$x+1=e^t$，$\dfrac{dx}{dt}=e^t$

$$\begin{aligned}\int x\log(x+1)\,dx &= \int (e^t-1)te^t\,dt = \int t(e^{2t}-e^t)\,dt\\ &= \int t\left(\frac{1}{2}e^{2t}-e^t\right)'\,dt\\ &= t\left(\frac{1}{2}e^{2t}-e^t\right) - \left(\frac{1}{4}e^{2t}-e^t\right) + C\\ &= \left\{\frac{1}{2}(x+1)^2-(x+1)\right\}\log(x+1)\\ &\qquad -\frac{1}{4}(x+1)^2+(x+1)+C\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x^2-1)\log(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)(x-3) + C}\end{aligned}$$

(4) (C は積分定数)

$$\begin{aligned}\int (x+1)\log(x+1)\,dx &= \frac{1}{2}\int \{(x+1)^2\}'\log(x+1)\,dx\\ &= \frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\int (x+1)^2\cdot\frac{1}{x+1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1) - \frac{1}{2}\int (x+1)\,dx\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1) - \frac{1}{4}(x+1)^2 + C}\end{aligned}$$

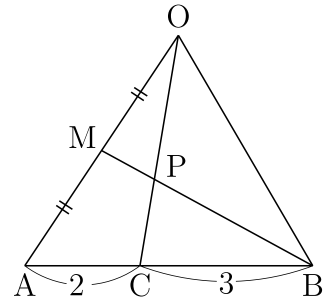
■

$\boxed{2}$ (1) $s'=2s$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，$2s+t=1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2s\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=s'\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\qquad(s'+t=1,\ s'\geqq 0,\ t\geqq 0)\end{aligned}$$

OA の中点を M とすると，P は両端を含む線分 MB 上の点である．

(2) △OAC と直線 MB について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CB}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{MO}}=1$$

ゆえに $\quad \dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{1}{1}=1$

よって $\quad$ **OP : PC = 5 : 3**

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より $\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

平行四辺形 ODPE の面積を S とすると $(2s+t=1, s\geqq 0,\ t\geqq 0)$

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}})^2}=\sqrt{|s\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|t\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot t\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\\&=st\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}\end{aligned}$$

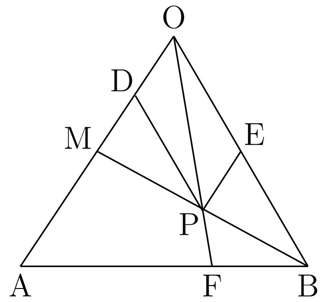
$s\geqq 0$，$t=1-2s\geqq 0$ より $\quad 0\leqq s\leqq\dfrac{1}{2}$

$$st=s(1-2s)=-2s^2+s=-2\left(s-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{8}$$

したがって，$s=\dfrac{1}{4}$，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，S は最大となる．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\quad \text{ゆえに}\quad \overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}$$

よって $\quad$ **AF : FB = 2 : 1** ■



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $z^5=1$ より　$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z-1\neq 0$ であるから　$z^4+z^3+z^2+z+1=0$

$$z^2+z+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z+\frac{1}{z}\right)^2+z+\frac{1}{z}=1 \qquad (*)$$

よって　$\boldsymbol{w^2+w=1}$

(2)

(ア) $(*)$ の第 1 式に $z=\alpha$ を代入すると

$$\alpha^2+\alpha+1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)=-1$$

$\alpha^5=1$ より，$\alpha^3=\dfrac{1}{\alpha^2}$，$\dfrac{1}{\alpha^3}=\alpha^2$ および $(*)$ の第 2 式を利用すると

$$\begin{aligned}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)&=\alpha^3+\frac{1}{\alpha}+\alpha+\frac{1}{\alpha^3}\\&=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha}+\alpha+\alpha^2\\&=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\alpha+\frac{1}{\alpha}-2\\&=1-2=-1\end{aligned}$$

したがって，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$，$\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ を解とする 2 次方程式は

$$x^2+x-1=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$\dfrac{1}{\alpha}=\overline{\alpha}$，$\mathrm{Re}(\alpha)>0$ より，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}=2\mathrm{Re}(\alpha)>0$ であるから

$$\boldsymbol{\alpha+\frac{1}{\alpha}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad \alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

別解 $z=\alpha$ は $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ の解であるから，$z=\alpha$ は $(*)$ を満たす．また，$\alpha^5=1$ に注意すると

$$(\alpha^2)^4+(\alpha^2)^3+(\alpha^2)^2+\alpha^2+1=\alpha^3+\alpha+\alpha^4+\alpha^2+1=0$$

であるから，$z=\alpha^2$ も $z^4+z^3+z^2+z+1=0$ の解で，$z=\alpha^2$ も $(*)$ を満たす．したがって，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$ と $\alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}$ は方程式

$$w^2+w=1$$

の解である．(以下同様)

(イ) $|4t-\alpha|<|2t-\alpha^2|$ より　$|4t-\alpha|^2<|2t-\alpha^2|^2$

$$(4t-\alpha)(4t-\overline{\alpha})<(2t-\alpha^2)(2t-\overline{\alpha^2})$$
$$16t^2-4(\alpha+\overline{\alpha})t+|\alpha|^2<4t^2-2(\alpha^2+\overline{\alpha^2})+|\alpha|^2$$
$$16t^2-4\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)t<4t^2-2\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)t$$

(ア) の結果を代入すると

$$16t^2-4\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t<4t^2-2\cdot\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t$$
$$12t^2-(3\sqrt{5}-1)t<0$$
$$t\{12t-(3\sqrt{5}-1)\}<0$$

よって　　$\boldsymbol{0<t<\dfrac{3\sqrt{5}-1}{12}}$ ■

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+\sin x}$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{\cos x(1+\sin x)-\sin x\cos x}{(1+\sin x)^2}=\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$$

x	$(-\frac{\pi}{2})$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

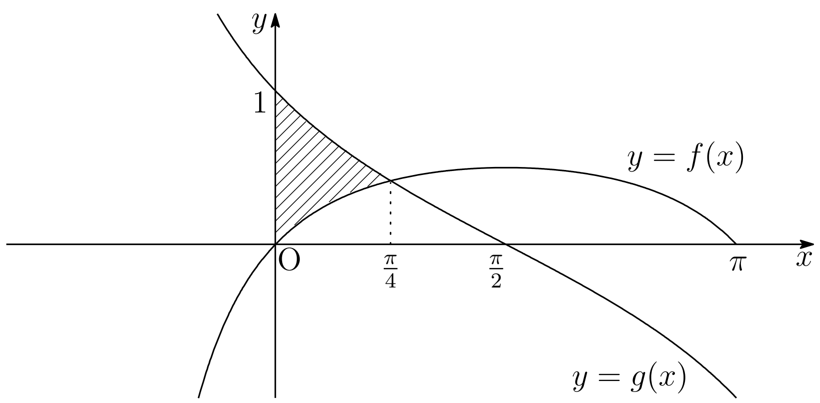
よって　　**極大値** $\boldsymbol{f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}}$

(2) $f(x)=g(x)$ より　$\sin x=\cos x$　ゆえに　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

$-\dfrac{\pi}{2}<x<\pi$ に注意して　$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$　よって　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{4},\ \sqrt{2}-1\right)}$

(3) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ において，$g(x)\geqq f(x)$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{g(x)-f(x)\}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}-1+\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)dx\\&=\left[\log(1+\sin x)-x+\tan x-\frac{1}{\cos x}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\boldsymbol{\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{\pi}{4}+2-\sqrt{2}}\end{aligned}$$



$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\boxed{\mathbf{2}}$ (1) を参照

(2) $\boxed{\mathbf{2}}$ (2) を参照

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-2,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1,\ 3)$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = 5, \quad |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = 10, \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 1$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}(s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) &= -s|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 + (s-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 \\ &= -5s + (s-t) + 10t \\ &= -4s + 9t = 0\end{aligned}$$

これと $2s + t = 1$ を連立して解くと $\boldsymbol{s = \frac{9}{22},\ t = \frac{2}{11}}$ ■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1)

(ア) $z^5 = 1$ より $(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$

$z - 1 \neq 0$ であるから $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ $(*)$

したがって $\boldsymbol{z + z^2 + z^3 + z^4 = -1}$

(イ) $(*)$ から

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + z + \frac{1}{z} = 1 \qquad (**)$$

よって $\boldsymbol{w^2 + w = 1}$

(2) $\boxed{\mathbf{3}}$ (2)(ア) を参照 ■

$\boxed{7}$ (1) $f(x) = \dfrac{1}{1+\sin x}$ より　$f'(x) = -\dfrac{\cos x}{(1+\sin x)^2}$

x	$(-\frac{\pi}{2})$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$(\frac{3\pi}{2})$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

よって　　**極小値** $\boldsymbol{f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{2}}$

(2) $g(x) = \dfrac{\cos x}{1+\sin x} = \dfrac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}$ より

$$\int g(x) = \boldsymbol{\log(1+\sin x) + C} \qquad \textbf{(}\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数)}$$

(3) $f(x) = g(x)$ を解くと　$x = 0$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において，$f(x) \geqq g(x)$ であるから，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{1+\sin x} - \frac{\cos x}{1+\sin x}\right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{1+\sin x}\right) dx \\ &= \left[\ \tan x - \frac{1}{\cos x} - \log(1+\sin x)\ \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \boldsymbol{2 - \sqrt{2} - \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \end{aligned}$$