令和６年度　福岡教育大学２次試験後期日程 (数学問題)
教育学部中等教育 (数学専攻)　 令和 **6** 年 **3** 月 **12** 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 9 個の整数 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 から，一度に異なる数を無作為に取り出すとき，5 つの数の中央値が 5 である確率を求めよ．

(2) 次の連立方程式を解け．

$$\begin{cases} x^2 + xy + zx = -5 \\ xy + y^2 + yz = 10 \\ zx + yz + z^2 = 20 \end{cases}$$

(3) a を正の定数とする．関数 $f(x)$ が実数全体で連続であり，常に

$$f(x+a) = f(x)$$

が成り立っている．このとき，

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$$

が成り立つことを置換積分を利用して示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を正の実数とし，$\{a_n\}$ を初項 a，公差 3 の等差数列とする．また，

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_3} + \frac{1}{a_2 a_4} + \frac{1}{a_3 a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2} a_n} \quad (n = 3, 4, 5, \cdots)$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $n \geqq 3$ のとき，S_n を a と n を用いて表せ．

(3) $a = 3$ のとき，$S_n > \dfrac{1}{15}$ を満たす自然数 n の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a，b を定数とし，$a \neq 0$，$b \neq 0$ とする．次の関数 $f(x)$ が $x = \dfrac{\pi}{2}$ で微分可能であるとする．

$$f(x) = \begin{cases} (x+a)(b-\cos x) & \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{\pi}{2}\log\left(x+1-\dfrac{\pi}{2}\right) & \left(x \geqq \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}+e-1} f(x)\,dx$ の値を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問いに答えよ．

(1) a，b，c を正の整数とする．このとき，次の $(*)$ が成り立つ．

> a，b が互いに素であり，bc が a で割り切れるならば，
> c は a で割り切れる．　　　$(*)$

この事実について，以下の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) 次の記述はユークリッドの互除法を利用した $(*)$ の証明である．(1) の空欄を適切に埋め，(2) および (3) の空欄にあてはまる数式をそれぞれ答えよ．

> **証明**　a，b が互いに素だから，$\boxed{\quad(1)\quad}$ は 1 である．このとき，ユークリッドの互除法から
>
> $$\boxed{\quad(2)\quad}$$
>
> を満たす整数 x，y が存在する．bc が a で割り切れるから，
>
> $$bc = a{\cdot}k$$
>
> を満たす整数 k が存在する．$\boxed{\quad(2)\quad}$ の両辺に c を掛けて，
>
> $$l = \boxed{\quad(3)\quad}$$
>
> とおけば，l は整数であり，
>
> $$c = a{\cdot}l$$
>
> と表せる．よって，c は a で割り切れる．

(イ) a，b が互いに素であるとき，c が a，b の両方で割り切れるならば c は ab で割り切れることを，$(*)$ を利用して示せ．

(2) x，y を自然数とする．1 つ 90 円の商品 A を x 個，1 つ 130 円の商品 B を y 個あわせて総額が 5000 円になるような x と y の組み合わせを全て求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 中央値が 5 であるとき，5 以外に 1，2，3，4 から 2 個，6，7，8，9 から 2 個取り出す確率であるから

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_5} = \frac{6\times 6}{9\cdot 7\cdot 2} = \boldsymbol{\frac{2}{7}}$$

(2) 与えられた連立方程式から

$$\begin{cases} x(z+y+z) = -5 \\ y(x+y+z) = 10 \\ z(x+y+z) = 20 \end{cases}$$

$y=-2x,\ z=-4x$ であるから，これらを上の第 1 式に代入すると

$$x(x-2x-4x) = -5 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad x = \pm 1$$

よって　　$\boldsymbol{(x,\ y,\ z) = (\pm 1,\ \mp 2,\ \mp 4)}$　**(複号同順)**

(3) $\displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\frac{a}{2}}^{0} f(x+a)\,dx$ であるから，$u = x + a$ とおくと

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \begin{array}{c||ccc} \hline x & -\frac{a}{2} & \longrightarrow & 0 \\ \hline u & \frac{a}{2} & \longrightarrow & a \\ \hline \end{array}$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{0} f(x+a)\,dx = \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(u)\,du = \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)\,dx$$

したがって　$\displaystyle\int_{-\frac{a}{2}}^{0} f(x)\,dx = \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)\,dx$

よって

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx &= \int_{-\frac{a}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx \\ &= \int_{\frac{a}{2}}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{a}{2}} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 初項 a，公差 3 の等差数列の数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n-1)\cdot 3 = \boldsymbol{3n + a - 3}$$

(2) $a_3 - a_1 = a_4 - a_2 = a_5 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-2} = 6$ より

$$\begin{aligned}6S_n &= \frac{6}{a_1a_3} + \frac{6}{a_2a_4} + \frac{6}{a_3a_5} + \cdots + \frac{6}{a_{n-2}a_n} \\ &= \frac{a_3 - a_1}{a_1 - a_3} + \frac{a_4 - a_2}{a_2a_4} + \frac{a_5 - a_3}{a_5a_3} + \cdots + \frac{a_n - a_{n-2}}{a_{n-2}a_n} \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_5} + \cdots + \frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_n} \\ &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n-2}} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{3n+a-6} - \frac{1}{3n+a-3}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+3} - \frac{1}{3n+a-6} - \frac{1}{3n+a-3}\right)}$

(3) $a = 3$ を (2) の結果に代入すると

$$S_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n-3} - \frac{1}{3n}\right)$$

$S_n > \frac{1}{15}$ より　　$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n-3} - \frac{1}{3n}\right) > \frac{1}{15}$

整理すると　　$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} < \frac{3}{10}$

$$n(23 - 3n) < 10$$

これを満たす最小の自然数 n は　$\boldsymbol{n = 8}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = b\left(\frac{\pi}{2}+a\right)$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = \begin{cases} b - \cos x + (x+a)\sin x & \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{x+1-\frac{\pi}{2}} & \left(x > \dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$f(x)$ が $x = \dfrac{\pi}{2}$ で微分可能であるとき,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f'(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f'(x)$$

であるから

$$b\left(\frac{\pi}{2}+a\right) = 0, \quad b + \frac{\pi}{2} + a = \frac{\pi}{2}$$

$a \neq 0,\ b \neq 0$ に注意して解くと　$\boldsymbol{a = -\dfrac{\pi}{2},\ b = \dfrac{\pi}{2}}$

(2) (1) の結果を代入して

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}+e-1} f(x)\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+e-1} f(x)\,dx \\ &= \left[\ \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}x - \sin x\right) - \left(\frac{\pi}{4}x^2 + \cos x\right)\ \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\qquad + \frac{\pi}{2}\left[\ \left(x+1-\frac{\pi}{2}\right)\left\{\log\left(x+1-\frac{\pi}{2}\right) - 1\right\}\ \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+e-1} \\ &= \boldsymbol{1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{16}}\end{aligned}$$

$\boxed{4}$ (1)(ア) (1) **最大公約数** (2) $\boldsymbol{ax+by=1}$ (3) $\boldsymbol{cx+ky}$

(2) の両辺に c を掛けると　$acx+bcy=c$

$bc=ak$ とおくと　$acx+aky=c$　ゆえに　$c=a(cx+ky)$

$l=cx+ky$ とおくと　$c=a{\cdot}l$

(2) c は a で割り切れるから，$\dfrac{c}{a}$ は整数

$$c=a{\cdot}\frac{c}{a}$$

上式において，c は b で割り切れ，a と b は互いに素であるから，$\dfrac{c}{a}$ は b で割り切れる．したがって，整数 m を用いて

$$\frac{c}{a}=mb \quad \text{ゆえに} \quad c=mab$$

上の第 2 式から，c は ab で割り切れる．

(3) 条件から　$90x+130y=5000$　ゆえに　$9x+13y=500$　$\cdots$①

$9{\cdot}3+13{\cdot}(-2)=1$ より　$9{\cdot}1500+13{\cdot}(-1000)=500$　$\cdots$②

① − ② より　$9(x-1500)+13(y+1000)=0$

$$9(1500-x)=13(y+1000)$$

上式から，整数 k を用いて

$$1500-x=13k,\quad y+1000=9k$$

ゆえに　$x=1500-13k,\quad y=9k-1000$　$\cdots(*)$

x，y は自然数，k は整数であるから

$$1500-13k>0,\quad 9k-1000>0 \quad \text{ゆえに} \quad k=112,\ 113,\ 114,\ 115$$

これらを $(*)$ に代入して

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(44,\ 8),\ (31,\ 17),\ (18,\ 26),\ (5,\ 35)}$$

別解 $13\equiv 0,\ 500\equiv 6 \pmod{13}$ であるから，① より

$$9x+13y\equiv 500 \iff 9x\equiv 6 \iff 3x\equiv 2 \pmod{13}$$

$$\iff 27x\equiv 18 \iff x\equiv 5 \pmod{13}$$

$x=13k+5$ を ① に代入すると (k は整数)

$$9(13k+5)+13y=500 \quad \text{ゆえに} \quad y=35-9k$$

x，y は自然数，k は整数であるから

$$13k+5>0,\quad 35-9k>0 \quad \text{ゆえに} \quad k=0,\ 1,\ 2,\ 3$$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y)=(5,\ 35),\ (18,\ 26),\ (31,\ 17),\ (44,\ 8)}$