令和６年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　令和６年２月２５日

- 中等教育 (数学専攻) $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$
  数 I・II・III・A・B (120 分)

- 初等教育 (数学専修) $\boxed{3}$ $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$
  数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ に内接する長方形で，各辺が座標軸に平行な長方形の面積の最大値を求めよ．

(2) 次の連立方程式を満たす整数 x，y，z の組をすべて求めよ．

$$\begin{cases} 4^x 2^y 2^z = 128^3 \\ 2^z = (8^x)^y \end{cases}$$

(3) z を複素数とし，$w=i\dfrac{z+2}{z-1}$ とする．複素数平面において点 z が原点 O を中心とする半径 2 の円上を動くとき，点 w が描く図形を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 1 個のさいころを繰り返し投げるゲームを行う．1 の目が k 回出た時点でゲームは終わる．このとき，ゲームが終わった時点でさいころを投げた回数が n である確率を p_n とする．ただし，k は 2 以上の整数で，n は k 以上の整数とする．

(1) p_k，p_{k+1} を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

(3) $p_n < p_{n+1}$ を満たす n の範囲を求め，さらに p_n が最大となる n をすべて求めよ．

3 点 O を原点とする座標空間内に 3 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(-2,\ 0,\ 0)$，C$(1,\ 2,\ 3)$ をとる．O，A，B と異なる点 P$(x,\ y,\ z)$ が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ となるように動くとき，次の問いに答えよ．

(1) x，y，z の満たす条件を求めよ．

(2) 直線 AP と yz 平面との交点を Q$(0,\ \beta,\ \gamma)$ とする．次の (ア)，(イ)，(ウ) に答えよ．

(ア) β，γ をそれぞれ x，y，z を用いて表せ．

(イ) x，y，z をそれぞれ β，γ を用いて表せ．

(ウ) 点 P がさらに $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となるように動くとき，Q は yz 平面上でどのような図形を描くか．Q の描く図形を求めよ．

4 区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos 2x$ と 2 つの直線 $x=0$，$x=\dfrac{\pi}{2}$ とで囲まれた部分を D とする．次の問いに答えよ．

(1) D の面積を求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で $|\sin x| \geqq |\cos 2x|$ を解け．

(3) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=3^x+3^{-x}-3(3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{x}{2}})+14$ の最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ．

(2) $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とするとき，

$$z^5+z^4+2z^3+2z^2+2z+3$$

の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

(3) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ に内接する長方形で，各辺が座標軸に平行な長方形の面積の最大値を求めよ．

$\boxed{6}$ 1 個のさいころを繰り返し投げるゲームを行う．1 の目が 2 回出た時点でゲームは終わる．このとき，ゲームが終わった時点でさいころを投げた回数が n である確率を p_n とする．ただし，n は 2 以上の整数とする．

(1) p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_n を求めよ．

(3) $p_n=p_{n+1}$ となる n を求めよ．

$\boxed{7}$ 区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos 2x$ と 2 つの直線 $x=0$，$x=\dfrac{\pi}{4}$ とで囲まれた部分を D とする．次の問いに答えよ．

(1) 区間 $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において，2 つの曲線 $y=\sin x$，$y=\cos 2x$ の交点の座標を求めよ．

(2) D の面積を求めよ．

(3) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上の4点 $(\pm a,\ \pm b)$ (複号任意) を頂点とする四角形の面積を S とすると $(a>0,\ b>0)$

$$S=4ab$$

2つの正の数 $\dfrac{a^2}{4},\ \dfrac{b^2}{9}$ の相加平均・相乗平均の大小関係から

$$1=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{9}\geqq 2\sqrt{\frac{a^2}{4}\cdot\frac{b^2}{9}}=\frac{ab}{3}=\frac{S}{12}\quad ゆえに\quad S\leqq 12$$

よって，求める面積の最大値は　**12**

別解 楕円 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上の4点 $(\pm 2\cos\theta,\ \pm 3\sin\theta)$ (複号任意) を頂点とする四角形の面積を S とすると $(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

$$S=4\cos\theta\cdot 6\sin\theta=12\sin 2\theta\leqq 12$$

よって，求める面積の最大値は　**12**

(2) 与えられた不等式から

$$\begin{cases}2^{2x+y+z}=2^{21}\\ 2^z=2^{3xy}\end{cases}\quad ゆえに\quad (*)\begin{cases}2x+y+z=21\\ z=3xy\end{cases}$$

$(*)$ から z を消去すると

$$2x+y+3xy=21\quad ゆえに\quad (3x+1)(3y+2)=65$$

$3x+1$ が 65 の約数となるとき

$$3x+1=-65,-5,\ 1,\ 13$$

それぞれの場合について

$$3y+2=-1,-13,\ 65,\ 5$$

したがって，整数 $(x,\ y)$ の組は

$$(x,\ y)=(-22,-1),\ (-2,-5),\ (0,\ 21),\ (4,\ 1)$$

$z=3xy$ より，求める $(x,\ y,\ z)$ の組は

$$\boldsymbol{(x,\ y,\ z)=(-22,-1,\ 66),\ (-2,-5,\ 30),}$$
$$\boldsymbol{(0,\ 21,\ 0),\ (4,\ 1,\ 12)}$$

(3) $w = i\dfrac{z+2}{z-1}$ より　$(w-i)z = w+2i$

上式において $w \neq i$ であるから　$z = \dfrac{w+2i}{w-i}$

$|z| = 2$ であるから

$$\left|\frac{w+2i}{w-i}\right| = 2 \quad ゆえに \quad |w+2i| = 2|w-i| \qquad (*)$$

したがって　$|w+2i|^2 = 4|w-i|^2$

$$(w+2i)(\overline{w}-2i) = 4(w-i)(\overline{w}+i)$$

整理すると　$w\overline{w} + 2iw - 2i\overline{w} = 0$

$$(w-2i)(\overline{w}+2i) = 4 \quad ゆえに \quad |w-2i| = 2$$

よって，**点 $\boldsymbol{w}$ は中心 $\boldsymbol{2i}$，半径 $\boldsymbol{2}$ の円を描く．**

■

2 (1) p_k は k 回投げて，k 回とも 1 の目が出る確率であるから

$$p_k = \left(\frac{1}{6}\right)^k = \boldsymbol{\frac{1}{6^k}}$$

p_{k+1} は k 回目までに 1 の目が $k-1$ 回出て，$k+1$ 回目に 1 の目が出る確率であるから

$$p_{k+1} = {}_k\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\cdot\frac{5}{6}\times\frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{5k}{6^{k+1}}}$$

(2) p_n は $n-1$ 回目までに 1 の目が $k-1$ 回出て，n 回目に 1 の目が出る確率であるから

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}\times\frac{1}{6} = \boldsymbol{{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}}$$

(3) (2) の結論を $p_n < p_{n+1}$ に代入すると

$${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} < {}_n\mathrm{C}_{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k}\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1-k}$$

${}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = \dfrac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}$，${}_n\mathrm{C}_{k-1} = \dfrac{n!}{(n+1-k)!(k-1)!}$ より

$$1 < \frac{n}{n+1-k}\cdot\frac{5}{6} \quad \text{ゆえに} \quad n < 6k-6$$

$p_n < p_{n+1}$ となるとき，$k \leqq n$ に注意して　$\boldsymbol{k \leqq n < 6k-6}$

$p_n = p_{n+1}$ となるとき，$n = 6k-6$ より　$p_{6k-6} = p_{6k-5}$

$p_n > p_{n+1}$ となるとき，$n > 6k-6$ より　$n \geqq 6k-5$

したがって　$p_k < p_{k+1} < \cdots < p_{6k-6} = p_{6k-5} > p_{6k-4} > \cdots$

よって，p_n が最大になる n は　$\boldsymbol{6k-6,\ 6k-5}$ ■

$\boxed{3}$ (1) A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(-2,\ 0,\ 0)$，P$(x,\ y,\ z)$ から

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = (x-2,\ y,\ z), \quad \overrightarrow{\mathrm{BP}} = (x+2,\ y,\ z)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$ であるから

$$(x-2)(x+2) + y^2 + z^2 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$\mathrm{P} \neq \mathrm{A}$，$\mathrm{P} \neq \mathrm{B}$ に注意して　$\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x \neq \pm 2}$

(2)

(ア) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とすると (t は媒介変数)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} &= (2,\ 0,\ 0) + t(x-2,\ y,\ z) \\ &= (2 + t(x-2),\ ty,\ tz)\end{aligned}$$

Q は yz 平面上の点であるから　$2 + t(x-2) = 0$

このとき，$x - 2 \neq 0$ であるから　$t = \dfrac{2}{2-x}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \left(0,\ \frac{2y}{2-x},\ \frac{2z}{2-x}\right) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\beta = \frac{2y}{2-x},\ \gamma = \frac{2z}{2-x}}$$

(イ) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ とすると (s は媒介変数)，$\mathrm{P} \neq \mathrm{A}$ より，$s \neq 0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (2,\ 0,\ 0) + s(-2,\ \beta,\ \gamma) \\ &= (2-2s,\ \beta s,\ \gamma s) \qquad (*)\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = 4$ であるから

$$(2-2s)^2 + (\beta s)^2 + (\gamma s)^2 = 4 \quad \text{ゆえに} \quad s\{(\beta^2 + \gamma^2 + 4)s - 8\} = 0$$

$s \neq 0$ より，$s = \dfrac{8}{\beta^2 + \gamma^2 + 4}$ を $(*)$ に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(\frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 8}{\beta^2 + \gamma^2 + 4},\ \frac{8\beta}{\beta^2 + \gamma^2 + 4},\ \frac{8\gamma}{\beta^2 + \gamma^2 + 4}\right)$$

よって　$\boldsymbol{x = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - 8}{\beta^2 + \gamma^2 + 4},\ \ y = \dfrac{8\beta}{\beta^2 + \gamma^2 + 4},\ \ z = \dfrac{8\gamma}{\beta^2 + \gamma^2 + 4}}$

(ウ) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ であるから

$$x+2y+3z=0$$

(1) で求めた球面および上の平面の共通部分であるから，これに (イ) の結果を代入すると

$$\frac{2\beta^2+2\gamma^2-8}{\beta^2+\gamma^2+4}+\frac{16\beta}{\beta^2+\gamma^2+4}+\frac{24\gamma}{\beta^2+\gamma^2+4}=0$$

これを整理すると　　$\beta^2+\gamma^2+8\beta+12\gamma-4=0$

したがって　　$(\beta+4)^2+(\gamma+6)^2=56$

よって　$\boldsymbol{yz}$ **平面上の $\mathbf{(-4,-6)}$ を中心とする半径 $\mathbf{2\sqrt{14}}$ の円** ■

$\boxed{4}$ (1) $\sin x = \cos 2x$ とすると $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\quad \sin x = 1 - 2\sin^2 x$

$$(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0 \quad これを解いて \quad x = \frac{\pi}{6}$$

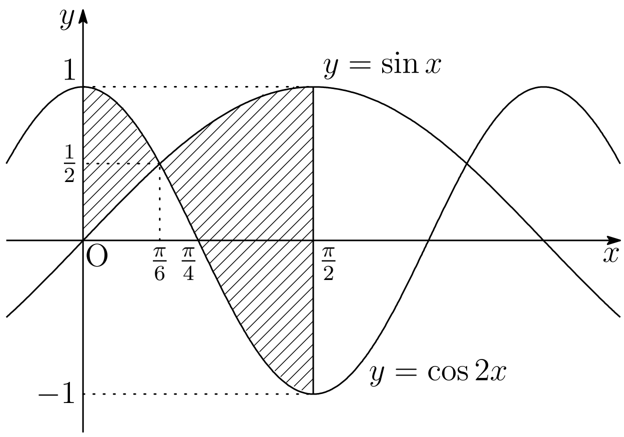
$f(x) = \cos 2x - \sin x$ の原始関数の 1 つを $F(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \cos x$ とおく．

D は，下の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx \\ &= 2F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

$F(0) = 1$，$F\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ であるから

$$S = 2 \times \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1 - 0 = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1}$$



(2) $|\sin x| \geqq |\cos 2x|$ より $\quad \sin^2 x - \cos^2 2x \geqq 0$

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos 2x)(\sin x - \cos 2x) &\geqq 0 \\ (-2\sin^2 x + \sin x + 1)(2\sin^2 x + \sin x - 1) &\geqq 0 \\ -(\sin x - 1)(2\sin x + 1)(\sin x + 1)(2\sin x - 1) &\geqq 0 \\ \cos^2 x(2\sin x + 1)(2\sin x - 1) &\geqq 0 \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意して解くと $\quad \boldsymbol{\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}}$

(3) $$g(x) = \cos^2 2x - \sin^2 x = \frac{1+\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x$$

$g(x)$ の原始関数の 1 つを $G(x) = \dfrac{1}{8}\sin 4x + \dfrac{1}{4}\sin 2x$ とする．

求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x)\,dx - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx$$
$$= 2G\left(\frac{\pi}{6}\right) - G(0) - G\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left[\ \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\ \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 2\times\frac{3\sqrt{3}}{16} - 0 - \frac{1}{4} + \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{8}$$

よって $\quad V = \boldsymbol{\pi\left(\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{8}\right)}$ ■

5 (1) 相加平均・相乗平均の大小関係により

$$3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{x}{2}} \geqq 2\sqrt{3^{\frac{x}{2}}\cdot 3^{-\frac{x}{2}}}=2$$

上式において等号が成立するのは，

$$3^{\frac{x}{2}}=3^{-\frac{x}{2}} \quad \text{すなわち} \quad x=0$$

のときに限る．$t=3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{x}{2}}$ とおくと　　$t \geqq 2$

$$3^x+3^{-x}=\left(3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{x}{2}}\right)^2-2=t^2-2$$

したがって

$$\begin{aligned}3^x+3^{-x}-3(3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{x}{2}})+14&=(t^2-2)-3t+14\\&=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{39}{4}\end{aligned}$$

よって　$t=2$，すなわち，$\boldsymbol{x=0}$ のとき，最小値 **10**

(2) $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ より　$z^3=1 \quad \cdots①$

$$z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=0$$

$z-1\neq 0$ であるから　　$z^2+z+1=0 \quad \cdots②$

①，② より

$$\begin{aligned}z^5+z^4+2z^3+2z^2+2z+3&=z^3(z^2+z+2)+2z^2+2z+3\\&=z^2+z+2+2z^2+2z+3\\&=3(z^2+z+1)+2=\mathbf{2}\end{aligned}$$

(3) 1 (1) を参照. ■

$\boxed{6}$ (1) p_2 は 2 回投げて，2 回とも 1 の目が出る確率であるから

$$p_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{36}}$$

p_3 は 2 回目までに 1 の目が 1 回出て，3 回目に 1 の目が出る確率であるから

$$p_3 = {}_2\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{5}{108}}$$

(2) p_n は $n-1$ 回目までに 1 の目が 1 回出て，n 回目に 1 の目が出る確率であるから

$$p_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_1 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \times \frac{1}{6} = \boldsymbol{\frac{n-1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}}$$

(3) (2) の結論を $p_n = p_{n+1}$ に代入すると

$$\frac{n-1}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} = \frac{n}{36}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \qquad \text{ゆえに} \quad n-1 = \frac{5}{6}n$$

これを解いて　　$\boldsymbol{n = 6}$ ■

$\boxed{7}$ (1) $y=\sin x$，$y=\cos 2x$ から y を消去すると $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\sin x = 1-2\sin^2 x \quad \text{ゆえに} \quad (\sin x+1)(2\sin x-1)=0$$

これを解いて　$x=\dfrac{\pi}{6}$　　よって　$\boldsymbol{\left(\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

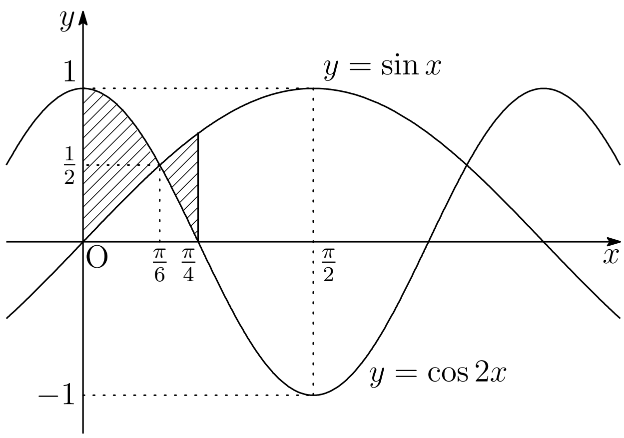
(2) $f(x)=\cos 2x-\sin x$ の原始関数の 1 つを $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ とおく．

D は，下の図の斜線部分であるから，その面積を S とすると

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=2F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F(0)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$F(0)=1$，$F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であるから

$$S=2\times\frac{3\sqrt{3}}{4}-1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{2}}$$



(3) $$g(x)=\cos^2 2x-\sin^2 x=\frac{1+\cos 4x}{2}-\frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x$$

$g(x)$ の原始関数の 1 つを $G(x)=\dfrac{1}{8}\sin 4x+\dfrac{1}{4}\sin 2x$ とする．

求める回転体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^{\frac{\pi}{6}} g(x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} g(x)\,dx=2G\left(\frac{\pi}{6}\right)-G(0)-G\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\times\frac{3\sqrt{3}}{16}-0-\frac{1}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{4}$$

よって　　$V=\boldsymbol{\pi\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}-\dfrac{1}{4}\right)}$ ■