令和５年度　福岡教育大学２次試験後期日程 (数学問題)
教育学部中等教育 (数学専攻)　令和 5 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，不等式 $1 + 4\cos\theta - 2\cos 2\theta < 0$ をみたす θ の範囲を求めよ．

(2) $a,\ b$ は互いに素な自然数で $b > 2$ とする．このとき，

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \cdots,\ (b-1)a$$

を b で割った余りが全て異なることを示せ．

(3) 極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k \log\left(\frac{n+k}{n}\right)$$

の値を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$OAB において，辺 OA を $1:2$ に内分する点を C とし，辺 OB を $3:1$ に外分する点を D とする．線分 CD と辺 AB の交点を E とし，線分 OE，BC，AD の中点をそれぞれ F，G，H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) 3 点 F，G，H が一直線上にあることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x)$ は常に正の値をとり，どんな実数 x，y についても

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

が成り立っている．次の問いに答えよ．

(1) x を実数とするとき，$f\left(\dfrac{x}{2}\right)=\sqrt{f(x)}$ が成り立つことを示せ．

(2) k を自然数とする．初項 1，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ の第 2^k+1 項から第 2^{k+1} 項までの和

$$S=a_{2^k+1}+a_{2^k+2}+a_{2^k+3}+\cdots+a_{2^{k+1}}$$

を求めよ．

(3) n を自然数とする．2^n 個の実数 x_1，x_2，x_3，$\cdots$，x_{2^n} に対して

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2^n}}{2^n}\right)\leqq\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2^n})}{2^n}$$

が成り立つことを，n に関する数学的帰納法によって示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$ $(n=0,1,2,\cdots)$ とする．次の問いに答えよ．ただし，$\tan^0 x=1$ とする．

(1) I_0 および I_1 の値を求めよ．

(2) n を 0 以上の整数とするとき，

$$I_n+I_{n+1}=\frac{1}{2n+1}$$

が成り立つことを示せ．

(3) 無限級数

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots$$

の和を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 与えられた不等式から　$1+4\cos\theta-2(2\cos^2\theta-1)<0$

$$4\cos^2\theta-4\cos\theta-3>0 \quad \text{ゆえに} \quad (2\cos\theta+1)(2\cos\theta-3)>0$$

$2\cos\theta-3<0$ であるから　　$2\cos\theta+1<0$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{\frac{2}{3}\pi<\theta<\frac{4}{3}\pi}$

(2) 整数 $m,\ n$ を $b-1 \geqq m > n \geqq 1$ とする．法 b について

$$ma \equiv na \pmod{b}$$

と仮定すると

$$(m-n)a \equiv 0 \pmod{b}$$

このとき，$m-n \not\equiv 0 \pmod{b}$ であるから

$$a \equiv 0 \pmod{b}$$

となり，a が b と互いに素であることに反する．

よって，題意は成立する．

(3) 求める極限値を I とすると

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\log\left(\frac{k}{n}+1\right) \\
&= \int_0^1 x\log(x+1)\,dx \\
&= \int_0^1 \left\{\frac{1}{2}(x+1)^2-(x+1)\right\}'\log(x+1)\,dx \\
&= \Big[\ \left\{\frac{1}{2}(x+1)^2-(x+1)\right\}\log(x+1)\ \Big]_0^1 \\
&\qquad\qquad -\int_0^1\left\{\frac{1}{2}(x+1)^2-(x+1)\right\}\cdot\frac{1}{x+1}\,dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)\,dx = -\frac{1}{4}\Big[\ (x-1)^2\ \Big]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) C は辺 OA を $1:2$ に内分し，D は OB を $3:1$ に外分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

線分 CD 上の点 E は，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{3}(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\quad\cdots ①$$

点 E は，線分 AB 上の点であるから

$$\frac{1}{3}(1-t)+\frac{3}{2}t=1\quad \text{ゆえに}\quad t=\frac{4}{7}$$

これを ① に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{6}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boldsymbol{\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}}$$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\vec{a}+\frac{6}{7}\vec{b}\right)=\frac{1}{14}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}})=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

したがって

$$\overrightarrow{\mathrm{FH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\left(\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}\right)-\left(\frac{1}{14}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{3}{28}(4\vec{a}+3\vec{b})}$$

(3) BC の中点が G であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}\right)=\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\left(\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)-\left(\frac{1}{14}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}\right)=\frac{1}{42}(4\vec{a}+3\vec{b})$$

上式および (2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{FH}}=\dfrac{9}{2}\overrightarrow{\mathrm{FG}}$

よって，3 点 F，G，H は一直線上にある．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 与えられた関係式から

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$f(x)>0,\ f\left(\dfrac{x}{2}\right)>0$ であるから

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\sqrt{f(x)}$$

(2) 初項 1，公差 2 の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は　$a_n=2n-1$

$$a_{2^k+1}=2(2^k+1)-1=2^{k+1}+1,$$
$$a_{2^{k+1}}=2\cdot2^{k+1}-1=2\cdot2^{k+1}-1$$

S は初項 a_{2^k+1}，末項 $a_{2^{k+1}}$，項数 2^k の等差数列の和であるから

$$S=\frac{1}{2}\cdot2^k\{(2^{k+1}+1)+(2\cdot2^{k+1}-1)\}=\frac{1}{2}\cdot2^k\times3\cdot2^{k+1}=\mathbf{3\cdot2^{2k}}$$

(3) n を自然数とする．2^n 個の実数 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_{2^n}$ に対して

$$(*)\quad f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2^n}}{2^n}\right)\leqq\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2^n})}{2^n}$$

とする．$f(x_1),\ f(x_2)$ について，相加平均・相乗平均の大小関係および (1) の結果から

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geqq\sqrt{f(x_1)f(x_2)}=\sqrt{f(x_1+x_2)}=f\left(\frac{x_1+x_1}{2}\right)\qquad(\#)$$

したがって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成立する．

$n=k$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると，次の 2 式が成立する．

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{2^k}}{2^k}\right)\leqq\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+\cdots+f(x_{2^k})}{2^k}$$
$$f\left(\frac{y_1+y_2+y_3+\cdots+y_{2^k}}{2^k}\right)\leqq\frac{f(y_1)+f(y_2)+f(y_3)+\cdots+f(y_{2^k})}{2^k}$$

上の 2 式の辺々を加えて，2 で割ると

$$\frac{1}{2}\left\{f\left(\sum_{j=1}^{2^k}\frac{x_j}{2^k}\right)+f\left(\sum_{j=1}^{2^k}\frac{y_j}{2^k}\right)\right\}\leqq\sum_{j=1}^{2^k}\frac{f(x_j)+f(y_j)}{2^{k+1}}\qquad(**)$$

このとき，$(**)$ の左辺は $(\#)$ より

$$f\left(\sum_{j=1}^{2^k}\frac{x_j+y_j}{2^{k+1}}\right) \leqq \frac{1}{2}\left\{f\left(\sum_{j=1}^{2^k}\frac{x_j}{2^k}\right)+f\left(\sum_{j=1}^{2^k}\frac{y_j}{2^k}\right)\right\}$$

したがって

$$f\left(\sum_{j=1}^{2^k}\frac{x_j+y_j}{2^{k+1}}\right) \leqq \sum_{j=1}^{2^k}\frac{f(x_j)+f(y_j)}{2^{k+1}}$$

$y_j = x_{2^k+j}$ とおくと $(j=1,2,\cdots,2^k)$

$$f\left(\sum_{j=1}^{2^{k+1}}\frac{x_j}{2^{k+1}}\right) \leqq \sum_{j=1}^{2^{k+1}}\frac{f(x_j)}{2^{k+1}}$$

$n=k+1$ のときも $(*)$ が成立する．

よって，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

補足 $f(x+y)=f(x)f(y)$ より　$f(x)=\displaystyle\prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{x}{n}\right)=f\left(\frac{x}{n}\right)^n$

相加平均・相乗平均の大小関係および $f(x)^{\frac{1}{n}}=f\left(\dfrac{x}{n}\right)$ により

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{n} \geqq \prod_{k=1}^{n} f(x_k)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_k}{n}\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{n}\right)$$

解説 $f(x+y)=f(x)f(y)$ に $x=y=0$ を代入すると，$f(0)\neq 0$ より　$f(0)=1$

$f'(0)=c$ とすると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\cdot f(x) = cf(x) \end{aligned}$$

$f'(x)e^{-cx}+f(x)(e^{-cx})'=0$ より　$\{f(x)e^{-cx}\}'=0$

$f(0)=1$ より　$f(x)e^{-cx}=1$　ゆえに　$f(x)=e^{cx}$

$a=e^c$ とすると　$f(x)=a^x$

これを用いて，補足で示した変形を示すこともできる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $(*)$ $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x\, dx$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ より

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}, \\
I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx \\
&= \Big[\ \tan x - x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{1 - \frac{\pi}{4}}
\end{aligned}
$$

(2) $(*)$ より

$$
\begin{aligned}
I_n + I_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x(1 + \tan^2 x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} x(\tan x)'\, dx \\
&= \frac{1}{2n+1}\Big[\ \tan^{2n+1} x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}
$$

(3) (2) の結果から，0 以上の整数 k について

$$
I_k + I_{k+1} = \frac{1}{2k+1} \quad \text{ゆえに} \quad (-1)^k I_k - (-1)^{k+1} I_{k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} &= \sum_{k=0}^{n} \left\{(-1)^k I_k - (-1)^{k+1} I_{k+1}\right\} \\
&= I_0 - (-1)^n I_{n+1} = \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1} I_{n+1} \qquad (*)
\end{aligned}
$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において　　$0 \leqq \tan x \leqq \dfrac{4}{\pi} x$

$$
0 \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} x\, dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n+2} x^{2n+2}\, dx = \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{\pi}{4}
$$

上式から　$0 \leqq I_{n+1} \leqq \dfrac{1}{2n+3} \cdot \dfrac{\pi}{4}$　　ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_{n+1} = 0$

これと $(*)$ から　　$1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \dfrac{1}{11} + \cdots = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$