令和５年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　令和５年２月25日

- 中等教育 (数学専攻) $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ (1)(2)(3)(4) $\boxed{4}$
  数 I・II・III・A・B (120 分)
- 初等教育 (数学専修) $\boxed{3}$ (1)(2)(3)(5) $\boxed{4}$ (2)(3) $\boxed{5}$ $\boxed{6}$
  数 I・II・III・A・B (120 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) α を実数とし，$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする．ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ が $|\vec{a}| = 1$，$|\vec{b}| = 2$，$|\vec{c}| = \sqrt{3}$ をみたし，$\vec{a}$ と $\vec{b}$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$，$\vec{c}$ と $\vec{a}$ のなす角がそれぞれ α，$\dfrac{\pi}{2} - \alpha$，$\dfrac{5}{6}\pi$ であるとする．このとき，$|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの α の値をそれぞれ求めよ．

(2) 次の連立方程式を解け．ただし，x，y は正の実数であり，$x \neq 1$，$y \neq 1$ とする．

$$\begin{cases} 2\log_2 \dfrac{x}{4} + \log_3 3y = 2 \\ \log_x 8 + \log_y 9 = 3 \end{cases}$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx$ の値を求めよ．

2 A の袋には白玉が w 個，青玉が b 個入っていて，B の袋にも白玉が w 個，青玉が b 個入っている．次の問いに答えよ．ただし，w，b はそれぞれ自然数とする．

(1) A の袋から玉を２個同時に取り出したとき，白玉，青玉が１個ずつ取り出される確率を求めよ．

(2) A の袋から玉を２個同時に取り出し，それらを B の袋に入れる．よくかき混ぜて B の袋から玉を１個取り出したとき，この玉が白玉である確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{1+i}$ とするとき，次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) 複素数 $1+\sqrt{3}i$ および $1+i$ を極形式で表せ．ただし，偏角 θ の範囲は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(2) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$ を α を用いて表せ．

(3) $\beta = \sqrt{2}\alpha^3$，$\gamma = 2\sqrt{2}\,i$ とおく．複素数平面において，点 β を，点 γ を中心として $-\dfrac{\pi}{12}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ．

(4) $z = \dfrac{\alpha^4}{2}$ とおく．n を 2 より大きい自然とし，

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$$

とする．S_n が純虚数であり S_n の虚部が正となる最小の n とそのときの S_n の値を求めよ．

(5) $z = \dfrac{\alpha^4}{2}$ とおいたとき，$1 + z + z^2 + \cdots + z^8$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x) = |x-1|e^x$ とする．次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 関数 $f(x)$ は $x=1$ において微分可能でないことを示せ．

(2) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(3) $g(x) = 2xe^x$ とする．2 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ と y 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{5}$ 次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}+\vec{b}|=3$ をみたしているとき，$|\vec{a}-2\vec{b}|$ の値を求めよ．

(2) 次の連立方程式を解け．ただし，x，y は正の実数であり，$x \neq 1$，$y \neq 1$ とする．

$$\begin{cases} 2\log_2 \dfrac{x}{4} + \log_3 3y = 2 \\ \log_x 8 + \log_y 9 = 3 \end{cases}$$

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx$ の値を求めよ．

$\boxed{6}$ A の袋には白玉が 3 個，青玉が 4 個入っていて，B の袋にも白玉が 3 個，青玉が 4 個入っている．次の問いに答えよ．ただし，w，b はそれぞれ自然数とする．

(1) A の袋から玉を 2 個同時に取り出したとき，白玉，青玉が 1 個ずつ取り出される確率を求めよ．

(2) A の袋から玉を 2 個同時に取り出し，それらを B の袋に入れる．よくかき混ぜて B の袋から玉を 1 個取り出したとき，この玉が白玉である確率を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 与えられた条件から

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = 1\cdot 2\cdot\cos\alpha = 2\cos\alpha \\ \vec{b}\cdot\vec{c} &= |\vec{b}||\vec{c}|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\sin\alpha = 2\sqrt{3}\sin\alpha \\ \vec{c}\cdot\vec{a} &= |\vec{c}||\vec{a}|\cos\frac{5}{6}\pi = \sqrt{3}\cdot 1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= 1^2+2^2+(\sqrt{3})^2+2\cdot 2\cos\alpha+2\cdot 2\sqrt{3}\sin\alpha+2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) \\ &= 4(\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha)+5 = 8\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+5\end{aligned}$$

$0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ は

$$\boldsymbol{\alpha = \frac{\pi}{3}\,\text{のとき 最大値}\,\sqrt{13},\quad \alpha = 0\,\text{のとき 最小値}\,3}$$

注意 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ のなす角は設定できないため，本題は全員正解.

(2) $x \neq 1,\ y \neq 1$ に注意して，与えられた 2 式をそれぞれ変形すると

$$2\log_2 x + \log_3 y = 5,\quad \frac{3}{\log_2 x}+\frac{2}{\log_3 y} = 3$$

$X = \log_2 x,\ Y = \log_3 y$ とおくと $(X \neq 0,\ Y \neq 0)$

$$(*)\quad 2X+Y = 5,\quad \frac{3}{X}+\frac{2}{Y} = 3$$

上の 2 式から Y を消去すると $\quad \dfrac{3}{X}+\dfrac{2}{5-2X} = 3$

$$6X^2-19X+15 = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (2X-3)(3X-5) = 0$$

上式および $(*)$ の第 1 式から $\quad (X,\ Y) = \left(\dfrac{3}{2},\ 2\right),\ \left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$

よって $\quad \boldsymbol{(x,\ y) = (2\sqrt{2},\ 9),\ (2^{\frac{5}{3}},\ 3^{\frac{5}{3}})}$

(3) $t=\sin x$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=\cos x$

x	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$
t	$0 \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1-\sin^2 x}\cdot \cos x\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-t^2}\,dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t-1}\right)dt$$

$$= \Big[\ \log\left|\frac{t+1}{t-1}\right|\ \Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boldsymbol{2\log(2+\sqrt{3})}$$

■

2 (1) 求める確率は

$$\frac{{}_w\mathrm{C}_1\cdot{}_b\mathrm{C}_1}{{}_{w+b}\mathrm{C}_2} = \boldsymbol{\frac{2wb}{(w+b)(w+b-1)}}$$

(2) 求める確率は

$$\frac{{}_w\mathrm{C}_2}{{}_{w+b}\mathrm{C}_2}\times\frac{w+2}{w+b+2}+\frac{{}_w\mathrm{C}_1\cdot{}_b\mathrm{C}_1}{{}_{w+b}\mathrm{C}_2}\times\frac{w+1}{w+b+2}+\frac{{}_b\mathrm{C}_2}{{}_{w+b}\mathrm{C}_2}\times\frac{w}{w+b+2}$$

$$=\frac{w(w-1)\times(w+2)+2wb\times(w+1)+b(b-1)\times w}{(w+b)(w+b-1)(w+b+2)}$$

$$=\frac{w(w+b-1)(w+b+2)}{(w+b)(w+b-1)(w+b+2)} = \boldsymbol{\frac{w}{w+b}}$$

■

3 (1) $1+\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \boldsymbol{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$

$1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \boldsymbol{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1+i} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12} \quad \cdots ①\end{aligned}$$

よって　$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{\alpha}}$

(3) (2) の結果から

$$\frac{\sqrt{2}}{\alpha} = \frac{\sqrt{2}(1+i)}{1+\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2}(1+i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{2}}$$

上式および (1) の結果から

$$\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{2}} \quad \cdots ②$$

① より　$\alpha^3 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2+2i$

$$\begin{aligned}\beta &= \sqrt{2}\alpha^3 = \sqrt{2}(2+2i) = 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i \\ \beta-\gamma &= (2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i)-2\sqrt{2}i = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

点 β を点 γ を中心として $-\frac{\pi}{12}$ だけ回転した点を β' すると，② より

$$\frac{\beta'-\gamma}{\beta-\gamma} = \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{2}}$$

したがって

$$\begin{aligned}\beta' &= \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{2}}(\beta-\gamma)+\gamma \\ &= \frac{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i}{2\sqrt{2}}\cdot 2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i \\ &= \boldsymbol{1+\sqrt{3}+(1+2\sqrt{2}-\sqrt{3})i}\end{aligned}$$

(4) $\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ より　$\alpha^4 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$z = \frac{\alpha^4}{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \\ &= \frac{2^{n+1}\left(\cos\dfrac{n+1}{3}\pi + i\sin\dfrac{n+1}{3}\pi\right) - 1}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) - 1} \\ &= \frac{\left(2^{n+1}\cos\dfrac{n+1}{3}\pi - 1\right) + 2^{n+1}i\sin\dfrac{n+1}{3}\pi}{\sqrt{3}i} \\ &= \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3}}\sin\frac{n+1}{3}\pi - \frac{i}{\sqrt{3}}\left(2^{n+1}\cos\frac{n+1}{3}\pi - 1\right) \end{aligned}$$

S_n が純虚数のとき，$\dfrac{n+1}{3}$ が整数である．このとき

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{3}}\{-2^{n+1}(-1)^{\frac{n+1}{3}} + 1\}i = \frac{1}{\sqrt{3}}\{2^{n+1}(-1)^{\frac{n-2}{3}} + 1\}i$$

S_n の虚部が正であるから，求める最小の自然数 n は $n > 2$ に注意して

$$\frac{n-2}{3} = 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{n = 8,\quad S_8 = 171\sqrt{3}i}$$

(5) $\alpha = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{12} + i\sin\dfrac{\pi}{12}\right)$ より　$\alpha^4 = 4\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$$z = \frac{\alpha^4}{2} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

したがって

$$\begin{aligned} 1 + z + z^2 + \cdots + z^8 &= \frac{z^9 - 1}{z - 1} = \frac{2^9(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) - 1}{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) - 1} \\ &= \frac{-513}{\sqrt{3}i} = \boldsymbol{171\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

■

4 (1) $f(x) = |x-1|e^x$ より，$f(1) = 0$ に注意して

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{|(1+h)-1|e^{1+h}}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{he^{1+h}}{h} = e,$$

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{|(1+h)-1|e^{1+h}}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{-he^{1+h}}{h} = -e$$

よって，$x = 1$ で微分可能ではない．

(2) $\varphi(x) = (x-1)e^x$ とおくと　$\varphi(1) = 0$,　$\varphi'(x) = xe^x$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$$\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$$

$f(x) = |\varphi(x)|$ であるから，$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	/	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

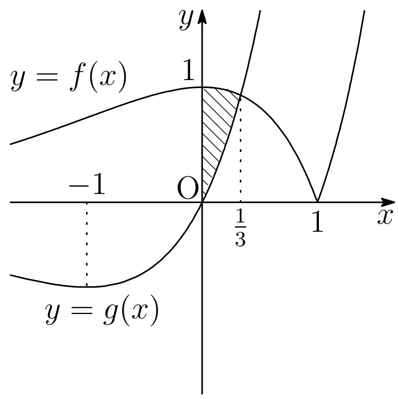
よって　極大値 $f(0) = \mathbf{1}$，極小値 $f(1) = \mathbf{0}$

(3) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ から y を消去すると

$$(|x-1| - 2x)e^x = 0$$

これを解くと

$$x = \frac{1}{3}$$



求める面積は右の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{1}{3}} \{f(x) - g(x)\}\,dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-3x)e^x\,dx$$

$$= \Big[\,(4-3x)e^x\,\Big]_0^{\frac{1}{3}} = \mathbf{3e^{\frac{1}{3}} - 4}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $|\vec{a}+\vec{b}|=3$ より　$|\vec{a}+\vec{b}|^2=9$　ゆえに　$|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=9$

これに $|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2$ を代入すると

$$1^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2^2=9 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=2$$

したがって　$|\vec{a}-2\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=1^2-4\cdot2+4\cdot2^2=9$

よって　$|\vec{a}-2\vec{b}|=\mathbf{3}$

別解 条件から，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は同じ向きのベクトルで，$\vec{b}=2\vec{a},\ |\vec{a}|=1$ より

$$|\vec{a}-2\vec{b}|=|\vec{a}-2\cdot2\vec{a}|=|-3\vec{a}|=3|\vec{a}|=3\cdot1=\mathbf{3}$$

(2) $\boxed{1}$ (2) を参照.

(3) $\boxed{1}$ (3) を参照. ■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{3\cdot4}{21}=\mathbf{\dfrac{4}{7}}$

(2) $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\times\dfrac{5}{9}+\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}\times\dfrac{4}{9}+\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}\times\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{5}{9}+\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{3}{9}=\mathbf{\dfrac{3}{7}}$ ■