令和４年度　福岡教育大学２次試験後期日程 (数学問題)
教育学部中等教育 (数学専攻)　令和４年３月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $x+y+z=20,\ x \geqq 3,\ y \geqq 4,\ z \geqq 5$ を満たす整数 $x,\ y,\ z$ の組は何通りあるか．

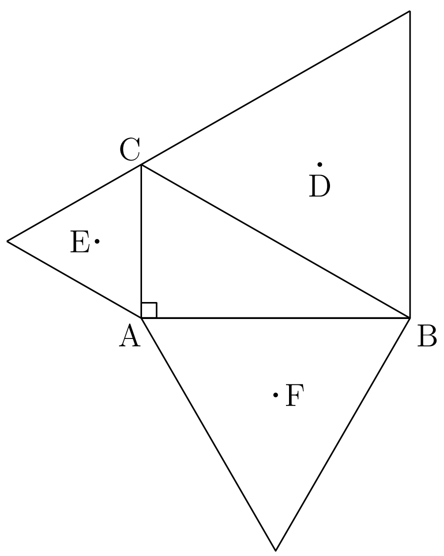
(2) $8^x+8^{-x}-4(4^x+4^{-x})+2(2^x+2^{-x})-4=0$ を満たす実数 x をすべて求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ において，常に $f(-x)=-f(x)$ が成り立っている．$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f(x)$ は $x=-a$ で微分可能であって

$$f'(-a)=f'(a)$$

となることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$ABC において，AB $=\sqrt{3}$，AC $=1$，$\angle$BAC $=\dfrac{\pi}{2}$ とする．下の図のように，$\triangle$ABC の外側に BC を１辺とする正三角形をつくりその重心を D，$\triangle$ABC の外側に CA を１辺とする正三角形をつくりその重心を E，$\triangle$ABC の外側に AB を１辺とする正三角形をつくりその重心を F とする．次の問いに答えよ．



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{b}$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ のなす角を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{1}{9}, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{8(n+1)a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定められているとき，次の問いに答えよ．

(1) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} と b_n の関係式を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$ の収束，発散について調べ，収束すればその和を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad (0 \leqq x < 1)$$

によって定める．曲線 $y = f(x)$ 上の点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ における接線を ℓ とする．また，曲線 $y = f(x)$，x 軸，y 軸および接線 ℓ で囲まれた部分を D とする．次の問いに答えよ．

(1) ℓ の方程式を求めよ．

(2) D の面積を求めよ．

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

解答例

1 (1) $x+y+z=20,\ x \geqq 3,\ y \geqq 4,\ z \geqq 5$ より，$x'=x-3,\ y'=y-4,\ z'=z-5$ とおくと

$$x'+y'+z'=8,\quad x' \geqq 0,\quad y' \geqq 0,\ z' \geqq 0$$

を満たす整数 $x',\ y',\ z'$ の組の総数であるから

$$_3\mathrm{H}_8 = {}_{3+8-1}\mathrm{C}_8 = {}_{10}\mathrm{C}_2 = \mathbf{45} \quad (\text{通り})$$

(2) $t=2^x+2^{-x}$ とおくと　$t=(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}})^2+2 \geqq 2$

$$\begin{aligned} 4^x+4^{-x} &= (2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2 \\ 8^x+8^{-x} &= (2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x})=t^3-3t \end{aligned}$$

方程式 $8^x+8^{-x}-4(4^x+4^{-x})+2(2^x+2^{-x})-4=0$ を t で表すと

$$\begin{aligned} t^3-3t-4(t^2-2)+2t-4&=0 \\ t^3-4t^2-t+4&=0 \\ (t+1)(t-1)(t-4)&=0 \end{aligned}$$

$t \geqq 2$ に注意して　$t=4$

したがって　$2^x+2^{-x}=4$　ゆえに　$(2^x)^2-4\cdot 2^x+1=0$
$2^x>0$ に注意して　$2^x=2\pm\sqrt{3}$　よって　$\boldsymbol{x=\log_2(2\pm\sqrt{3})}$

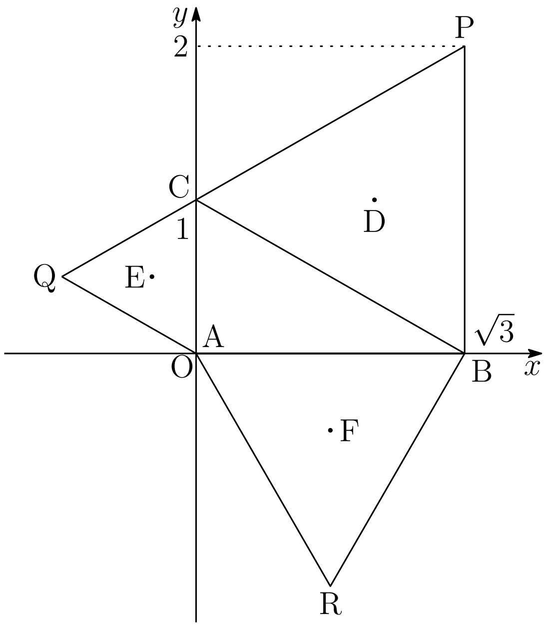
(3) $f'(-a)=\displaystyle\lim_{b\to -a}\frac{f(b)-f(-a)}{b-(-a)}$ において $b=-c$ とおくと，$c\to a$ より

$$\begin{aligned} f'(-a) &= \lim_{c\to a}\frac{f(-c)-f(-a)}{-c+a} \\ &= \lim_{c\to a}\frac{-f(c)+f(a)}{-c+a} = \lim_{c\to a}\frac{f(c)-f(a)}{c-a} = f'(a) \end{aligned}$$

補足 $f(-x)=-f(x)$ の両辺を x について微分すると

$$f'(-x)\cdot(-x)'=-f'(x) \quad \text{ゆえに} \quad f'(-x)=f'(x)$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えられた図形を下の図のように A を原点とする座標平面上にとり，三角形の残りの頂点を図のように P，Q，R とする．



BP は y 軸に平行で，BP $=$ BC $= 2$ より　P$(\sqrt{3},\ 2)$

AQ の偏角は $\dfrac{5\pi}{6}$ で，AQ $=$ AC $= 1$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \left(\cos\frac{5\pi}{6},\ \sin\frac{5\pi}{6}\right) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Q}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

AR の偏角は $-\dfrac{\pi}{3}$，AR $=$ AB $= \sqrt{3}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}} = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{R}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

したがって，D，E，F の座標は

$$\mathrm{D}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ 1\right),\quad \mathrm{E}\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2}\right),\quad \mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$\vec{a} = (\sqrt{3},\ 0)$，$\vec{b} = (0,\ 1)$ より

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{AE}} = -\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}}$$

(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}} = \overrightarrow{\mathrm{AD}} - \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{FE}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}} - \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \left(-\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = -\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}$$

$|\vec{a}|^2 = 3$，$|\vec{b}|^2 = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FE}} = -\frac{1}{9}|\vec{a}|^2 + \frac{3}{2}|\vec{b}|^2 = \boldsymbol{\frac{7}{6}}$$

(3) (2) の結果から

$$|\overrightarrow{\mathrm{FD}}|^2 = \left|\frac{1}{6}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right|^2 = \frac{1}{36}|\vec{a}|^2 + \frac{9}{4}|\vec{b}|^2 = \frac{1}{36}\cdot 3 + \frac{9}{4}\cdot 1 = \frac{7}{3},$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{FE}}|^2 = \left|-\frac{2}{3}\vec{a} + \vec{b}\right|^2 = \frac{4}{9}|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = \frac{4}{9}\cdot 3 + 1 = \frac{7}{3}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{FD}}||\overrightarrow{\mathrm{FE}}| = \dfrac{7}{3}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FE}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{FD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FE}}}{|\overrightarrow{\mathrm{FD}}||\overrightarrow{\mathrm{FE}}|} = \frac{7}{6}\bigg/\frac{7}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$$

3 (1) 与えられた漸化式から

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 8(n+1) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_{n+1} = b_n + 8(n+1)}$$

(2) (1) の結果および $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 9$ より，$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 8(k+1) = 9 + 8\cdot\frac{1}{2}n(n-1) + 8(n-1)$$
$$= 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

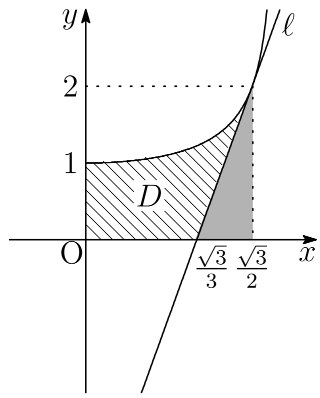
$n = 1$ のときも上式は成立するから　$b_n = (2n+1)^2$

よって　$a_n = \dfrac{1}{b_n} = \boldsymbol{\dfrac{1}{(2n+1)^2}}$

(3) (2) の結果から

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ を微分すると



$$f'(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2$，$f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=4\sqrt{3}$ より，接線 ℓ は

$$y-2=4\sqrt{3}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって　　$\boldsymbol{y=4\sqrt{3}x-4}$

(2) $x=\sin\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\cos\theta$

x	$0 \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$
θ	$0 \longrightarrow \frac{\pi}{3}$

D の表す領域は上の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{dx}{d\theta}d\theta-\frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta-\frac{\sqrt{3}}{6}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{6}} \end{aligned}$$

(3) 求める立体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{1-x^2}\,dx-\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\pi\Big[\ \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\ \Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi \\ &= \boldsymbol{\pi\left\{\log(2+\sqrt{3})-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right\}} \end{aligned}$$