令和４年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
中等教育 (数学専攻)　令和４年２月25日

問題 1 2 3 4

1 次の問いに答えよ．

(1) z，w を複素数とする．$|z|=1$ または $|w|=1$ のとき

$$|z\overline{w}+1|=|z+w|$$

が成り立つことを示せ．ただし，$\overline{w}$ は w の共役な複素数を表す．

(2) a，r を実数とし，$a>0$，$r\neq 0$ とする．$\{b_n\}$ を初項 2，公比 r の等比数列とするとき，次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

$$a_1=a,\quad a_{n+1}={a_n}^r e^{b_n}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

(3) θ を $\sin\theta\neq 0$ である実数とし，n を自然数とする．n に関する数学的帰納法によって次の等式を示せ．

$$1+2\sum_{k=1}^{n}\cos 2k\theta=\frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}$$

2 n を 6 以下の自然数とする．1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，出た目の最大値が n となる確率を P_n とし，出た目の最小値が n となる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) P_1，p_1 をそれぞれ求めよ．

(2) P_n，p_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(3) $P_n \leqq p_n$ を満たす n をすべて求めよ．

3 複素数 z の実部と虚部がともに正であり，z は

$$z^2+\frac{1}{z^2}=1$$

を満たしている．次の問いに答えよ．

(1) z を極形式で表せ．ただし，偏角 θ は $0\leqq\theta<2\pi$ とする．

(2) $z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}$ を求めよ．

(3) 複素数平面上の 3 点 z，z^2，$z^{100}+\dfrac{1}{z^{100}}$ を頂点とする三角形の面積を求めよ．

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) k が自然数のとき，次の不等式を示せ．

$$\frac{1}{k+1} \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \frac{1}{k}$$

(2) n が 2 以上の自然数のとき，次の不等式を示せ．

$$\log(n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq 1 + \log n$$

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $|z|=1$ のとき，$z\overline{z}=1$ より

$$\begin{aligned}|z\overline{w}+1| &= |z\overline{w}+z\overline{z}| = |z(\overline{w}+\overline{z})| \\ &= |z||\overline{z}+\overline{w}| = |\overline{z+w}| = |z+w|\end{aligned}$$

$|w|=1$ のとき，$w\overline{w}=1$ より

$$\begin{aligned}|z\overline{w}+1| &= |w||z\overline{w}+1| = |w(z\overline{w}+1)| \\ &= |zw\overline{w}+w| = |z+w|\end{aligned}$$

(2) 漸化式 $a_1=a>0$，$a_{n+1}={a_n}^re^{b_n}$ より，$a_n>0$ に注意して

$$\log a_{n+1} = r\log a_n + b_n$$

$\{b_n\}$ は初項 2，公比 r の等比数列より，$b_n=2r^{n-1}$ であるから

$$\log a_{n+1} = r\log a_n + 2r^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\log a_{n+1}}{r^{n+1}} = \frac{\log a_n}{r^n} + \frac{2}{r^2}$$

$\left\{\dfrac{\log a_n}{r^n}\right\}$ は初項 $\dfrac{\log a}{r}$，公差 $\dfrac{2}{r^2}$ の等差数列であるから

$$\frac{\log a_n}{r^n} = \frac{\log a}{r} + \frac{2}{r^2}(n-1)$$

したがって　$\log a_n = r^{n-1}\log a + 2r^{n-2}(n-1)$

よって　$\boldsymbol{a_n = e^{r^{n-1}\log a + 2r^{n-2}(n-1)}}$

補足 $a_n = a^{r^{n-1}}e^{2r^{n-2}(n-1)}$ と表記してもよい．

(3) 加法定理により

$$\begin{aligned}\sin(2k+1)\theta &= \sin 2k\theta\cos\theta + \cos 2k\theta\sin\theta \\ \sin(2k-1)\theta &= \sin 2k\theta\cos\theta - \cos 2k\theta\sin\theta\end{aligned}$$

上の第 1 式から第 2 式を引くと

$$\sin(2k+1)\theta - \sin(2k-1)\theta = 2\sin\theta\cos 2k\theta$$

$\sin\theta \neq 0$ であるから

$$2\cos 2k\theta = \frac{\sin(2k+1)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(2k-1)\theta}{\sin\theta} \qquad (*)$$

n を自然数とする等式

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos 2k\theta = \frac{\sin(2n+1)\theta}{\sin\theta}$$

を (A) とする．

［1］ $n = 1$ のとき，$k = 1$ を $(*)$ に代入すると

$$2\cos 2\theta = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin\theta}{\sin\theta} \quad \text{ゆえに} \quad 1 + 2\cos 2\theta = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}$$

よって，$n = 1$ のとき，(A) は成立する．

［2］ $n = m$ のとき，(A) が成立すると仮定すると

$$1 + 2\sum_{k=1}^{m} \cos 2k\theta = \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}$$

$k = m + 1$ を $(*)$ に代入すると

$$2\cos 2(m+1)\theta = \frac{\sin(2m+3)\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(2m+1)\theta}{\sin\theta}$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$1 + 2\sum_{k=1}^{m+1} \cos 2k\theta = \frac{\sin(2m+3)\theta}{\sin\theta}$$

よって，$n = m + 1$ のときも (A) は成立する．

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する． ■

$\boxed{2}$ (1) P_1 は3回続けて1の目が出る確率であるから　$P_1 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \mathbf{\frac{1}{216}}$

出た目の最小値が2以上である確率は　$\left(\frac{5}{6}\right)^3$

p_1 はこの余事象の確率であるから　$p_1 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \mathbf{\frac{91}{216}}$

(2) 出た目の最大値が n 以下である確率は　$\left(\frac{n}{6}\right)^3$

出た目の最大値が $n-1$ 以下である確率は　$\left(\frac{n-1}{6}\right)^3$

したがって　$P_n = \left(\frac{n}{6}\right)^3 - \left(\frac{n-1}{6}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{3n^2-3n+1}{216}}$

出た目の最小値が n 以上である確率は　$\left(\frac{7-n}{6}\right)^3$

出た目の最小値が $n+1$ 以上である確率は　$\left(\frac{6-n}{6}\right)^3$

したがって　$p_n = \left(\frac{7-n}{6}\right)^3 - \left(\frac{6-n}{6}\right)^3$

ここで，$A = 7-n$ とおくと，前の計算に注意して

$$p_n = \left(\frac{A}{6}\right)^3 - \left(\frac{A-1}{6}\right)^3 = \frac{3A^2-3A+1}{216} \qquad (*)$$

よって　$p_n = \frac{3(7-n)^2-3(7-n)+1}{216} = \boldsymbol{\frac{3n^2-39n+127}{216}}$

(3) P_n および $(*)$ を $P_n \leqq p_n$ に代入すると

$$\frac{3n^2-3n+1}{216} \leqq \frac{3A^2-3A+1}{216}$$

ゆえに　$(n-A)(n+A-1) \leqq 0$　すなわち　$6(2n-7) \leqq 0$

n は6以下の自然数であるから　$\boldsymbol{n = 1,\ 2,\ 3}$

補足 P_n，p_n の結果をそのまま利用してもよい． ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $z^2+\dfrac{1}{z^2}=1$ より $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2=3,\quad \left(z-\dfrac{1}{z}\right)^2=-1$

したがって $\quad z+\dfrac{1}{z}=\pm\sqrt{3},\quad z-\dfrac{1}{z}=\pm i$

上の 2 式から $\quad z=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i\quad$ (複号任意)

z の実部と虚部がともに正であるから

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}z^{100}&=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{100}=\cos\frac{100\pi}{6}+i\sin\frac{100\pi}{6}\\&=\cos\left(16\pi+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(16\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

$z\overline{z}=1$ より，$\dfrac{1}{z}=\overline{z}$ であるから

$$\frac{1}{z^{100}}=\overline{z^{100}}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\quad よって\quad z^{100}+\frac{1}{z^{100}}=\mathbf{-1}$$

(3) 3 点 $-1,\ z,\ z^2$ を頂点とする三角形の面積を S とすると [1]

$$S=\frac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\{(\overline{z+1})(z^2+1)\}\right|$$

このとき
$$\begin{aligned}(\overline{z+1})(z^2+1)&=(\overline{z}+1)(z^2+1)\\&=z+\overline{z}+1+z^2\end{aligned}$$

したがって $\quad \mathrm{Im}\{(\overline{z+1})(z^2+1)\}=\mathrm{Im}(z^2)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，三角形の面積は $\quad S=\dfrac{1}{2}\left|\mathrm{Im}\{(\overline{z+1})(z^2+1)\}\right|=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{4}}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2020.pdf $\boxed{2}$ (2) を参照．

$\boxed{4}$ (1) $k \leqq x \leqq k+1$ のとき (k は自然数)　$\dfrac{1}{k+1} \leqq \dfrac{1}{x} \leqq \dfrac{1}{k}$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,dx \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx$$

したがって　$\dfrac{1}{k+1} \leqq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \frac{1}{k}$

(2) (1) の結果から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = \int_1^n \frac{1}{x}\,dx$

両辺に 1 を加えると　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq 1 + \log n$　$(*)$

(1) の結果から　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{ゆえに} \quad \log(n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad (**)$$

$(*)$，$(**)$ より

$$\log(n+1) \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq 1 + \log n$$

(3) (2) の結果から，n を 2 以上の自然数とすると

$$\frac{\log(n+1)}{\log n} \leqq \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqq \frac{1}{\log n} + 1$$

ここで

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n+1)}{\log n} &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log(n+1) - \log n}{\log n} + 1 \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\log n} + 1 \right\} = 1,\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\log n} + 1 \right) = 1$$

はさみうちの原理により　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mathbf{1}$　■