令和３年度　福岡教育大学２次試験後期日程 (数学問題)
教育学部中等教育 (数学専攻)　令和３年３月１２日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 2 次方程式 $x^2+ax+2-3a=0$ が 2 つの整数の解をもつような定数 a の値を求めよ．

(2) t が 1 より大きい実数の範囲を動くとき

$$(\log_2 t+\log_t 2)(\log_2 t+\log_t 4)$$

の最小値を求めよ．

(3) 方程式 $x^6=1$ の解を 1 つ選び，1 個のさいころを投げる．選んだ解を z，さいころの出た目を a とするとき $z^a=1$ となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=4\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす四面体 OABC について，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の値を求めよ．

(2) 点 B から 3 点 O，A，C を通る平面 α に下ろした垂線と α の交点を H とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(3) BH の長さを求めよ．

(4) 2 点 O，H を通る直線と直線 AC の交点を I とおく．四面体 HABI の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a,\ b$ を実数とし，k を正の実数とする．3 次方程式 $3x^3+ax^2+bx-2k^3=0$ は虚数解 α をもち，α は $|\alpha|=k$，$\alpha^2+k\overline{\alpha}=0$ を満たしている．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す．次の問いに答えよ．

(1) $\overline{\alpha}$ が $3x^3+ax^2+bx-2k^3=0$ の解であることを示せ．

(2) $a,\ b$ を k を用いて表せ．

(3) $k=2$ のとき 3 次方程式 $3x^3+ax^2+bx-2k^3=0$ の虚数解で虚部が負であるものを β とおく．複素数平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(\beta-\gamma)$，$\mathrm{B}(\beta+\gamma)$ を頂点とする三角形が O を直角の頂点とする直角二等辺三角形になるような複素数 γ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x) = \sin 2x + 2\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の最大値を M とする．次の問いに答えよ．

(1) M の値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と y 軸および直線 $y = M$ によって囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) a を実数とするとき，$\displaystyle\int_0^{\pi} \{f(x) - a\}^2\,dx$ の最小値とそのときの a の値を求めよ．

解答例

1 (1) 2次方程式

$$x^2+ax+2-3a=0 \qquad (*)$$

の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=-a,\quad \alpha\beta=2-3a \qquad (**)$$

上の2式から a を消去すると

$$\alpha\beta-3(\alpha+\beta)=2 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha-3)(\beta-3)=11$$

$\alpha-3$，$\beta-3$ は整数であるから，上の第2式より

$$(\alpha-3)+(\beta-3)=\pm(1+11) \quad \text{ゆえに} \quad \alpha+\beta=6\pm12$$

$(**)$ の第1式から　$a=-18,\ 6$　これらを $(*)$ に代入すると

$a=-18$ のとき　$x^2-18x+56=0$　ゆえに　$(x-4)(x-14)=0$
$a=6$ のとき　$x^2+6x-16=0$　ゆえに　$(x-2)(x+8)=0$

このとき，$(*)$ は整数解をもつ．よって　$\boldsymbol{a=-18,\ 6}$

(2)
$$\begin{aligned}(\log_2 t+\log_t 2)(\log_2 t+\log_t 4) &= \left(\log_2 t+\frac{1}{\log_2 t}\right)\left(\log_2 t+\frac{2}{\log_2 t}\right)\\ &= (\log_2 t)^2+\frac{2}{(\log_2 t)^2}+3\\ &\geqq 2\sqrt{(\log_2 t)^2\cdot\frac{2}{(\log_2 t)^2}}+3=2\sqrt{2}+3\end{aligned}$$

$(\log_2 t)^2=\dfrac{2}{(\log_2 t)^2}$　すなわち　$t=2^{2^{\frac{1}{4}}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{2}+3}$

(3) $w=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$ とおくと，$x^6=1$ の解は

$$1,\ w,\ w^2,\ w^3,\ w^4,\ w^5$$

さいころの出た目 a により，$z^a=1$ となるは

15通り

よって　$\dfrac{15}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{5}{12}}$

z \ a	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	1	1	1	1	1
$\boldsymbol{w}$						1
$\boldsymbol{w^2}$			1			1
$\boldsymbol{w^3}$		1		1		1
$\boldsymbol{w^4}$			1			1
$\boldsymbol{w^5}$						1

疑問 福岡教育大学の解答では，それぞれの $z=w^k(k=0,1,2,3,4,5)$ に対する確率を求めている．

$$1,\quad \frac{1}{6},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{6}$$

拙者以外にも「選ぶ」確率と考えた受験生も多かったのではないだろうか．誤解がないように「それぞれの z に対する $z^a=1$ となる確率」とすべきであったと思う．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=4\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle\mathrm{COA}=\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=\mathbf{2}\\
\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{8}\\
\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\frac{\pi}{2}=\mathbf{0}
\end{aligned}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ により

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{(\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})}{|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$

(3) (1)，(2) の結果から

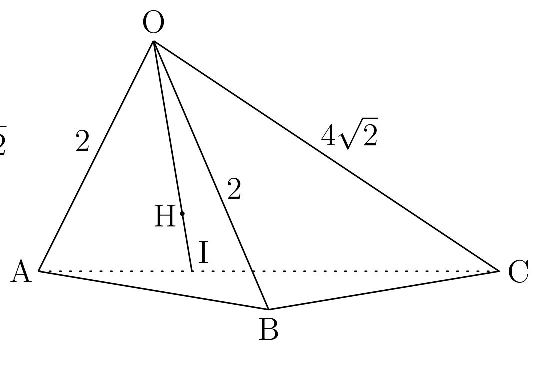
$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2&=\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{1}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\frac{1}{4}\cdot2^2+\frac{1}{16}(4\sqrt{2})^2=3,\\
\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}\cdot2+\frac{1}{4}\cdot8=3,\\
|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\\
&=3-2\cdot3+2^2=1
\end{aligned}$$

よって　　$\mathbf{BH=1}$

(4) $\triangle\mathrm{OAC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=4\sqrt{2}$

四面体 OABC の体積を V とすると

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAC}\cdot\mathrm{BH}=\frac{1}{3}\cdot4\sqrt{2}\cdot1=\frac{4}{3}\sqrt{2}$$



(2) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OI}}$$

I は AC を $1:2$ に内分し，H は OI を $3:1$ に内分するから，求める四面体 HABI の体積は

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{9}}$$

補足 $a = \mathrm{OA}$, $b = \mathrm{OB}$, $c = \mathrm{OC}$，$\alpha = \angle\mathrm{BOC}$，$\beta = \angle\mathrm{COA}$，$\gamma = \angle\mathrm{AOB}$ とすると，四面体 OABC の体積 V は[1]

$$V = \frac{1}{6}abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)}$$

$\boxed{\textbf{3}}$ (1) α は 3 次方程式 $3x^3 + ax^2 + bx - 2k^3 = 0$ の解であるから

$$3\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha - 2k^3 = 0$$

a, b, k が実数であることに注意して，両辺の共役複素数をとると

$$3\overline{\alpha^3} + a\overline{\alpha^2} + b\overline{\alpha} - 2k^3 = 0$$

$\overline{\alpha^3} = \overline{\alpha}^3$, $\overline{\alpha^2} = \overline{\alpha}^2$ であるから

$$3\overline{\alpha}^3 + a\overline{\alpha}^2 + b\overline{\alpha} - 2k^3 = 0$$

よって，$\overline{\alpha}$ は方程式 $3x^3 + ax^2 + bx - 2k^3 = 0$ の解である．

(2) $\alpha^2 + k\overline{\alpha} = 0$ より　$\overline{\alpha}^2 + \alpha = 0$　ゆえに　$(\alpha^2 - \overline{\alpha}^2) = k(\alpha - \overline{\alpha})$
α は虚数であるから，$\alpha - \overline{\alpha} \neq 0$ より

$$\alpha + \overline{\alpha} = k \quad \cdots ①$$

3 次方程式 $3x^3 + ax^2 + bx - 2k^3 = 0$ の解を α, $\overline{\alpha}$, c とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \overline{\alpha} + c = -\frac{a}{3}, \quad \alpha\overline{\alpha} + c(\alpha + \overline{\alpha}) = \frac{b}{3}, \quad \alpha\overline{\alpha}c = \frac{2k^3}{3}$$

① および $\alpha\overline{\alpha} = |\alpha|^2 = k^2 \cdots ②$ を代入すると

$$k + c = -\frac{a}{3}, \quad k^2 + ck = \frac{b}{3}, \quad k^2c = \frac{2k^3}{3}$$

第 3 式より $(k > 0)$，$c = \dfrac{2}{3}k$．これを第 1 式，第 2 式に代入すると

$$k + \frac{2}{3}k = -\frac{a}{3}, \quad k^2 + \frac{2}{3}k^2 = \frac{b}{3}$$

よって　$\boldsymbol{a = -5k,\ b = 5k^2}$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/N/THdai/THdai_ri_2015.pdf (p.11)

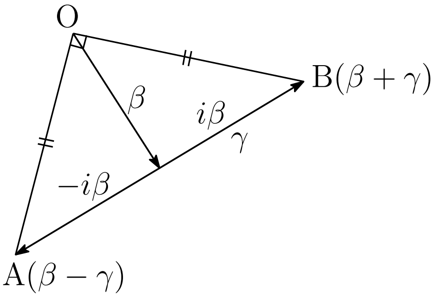
(3) $k=2$ のとき，①，② より，$\alpha,\ \overline{\alpha}$ は 2 次方程式

$$x^2-2x+4=0$$

の解である．これを解いて　$x=1\pm\sqrt{3}i$　したがって　$\beta=1-\sqrt{3}i$

条件から

$$\begin{aligned}\gamma&=\pm i\beta=\pm i(1-\sqrt{3}i)\\&=\boldsymbol{\pm(\sqrt{3}+i)}\end{aligned}$$

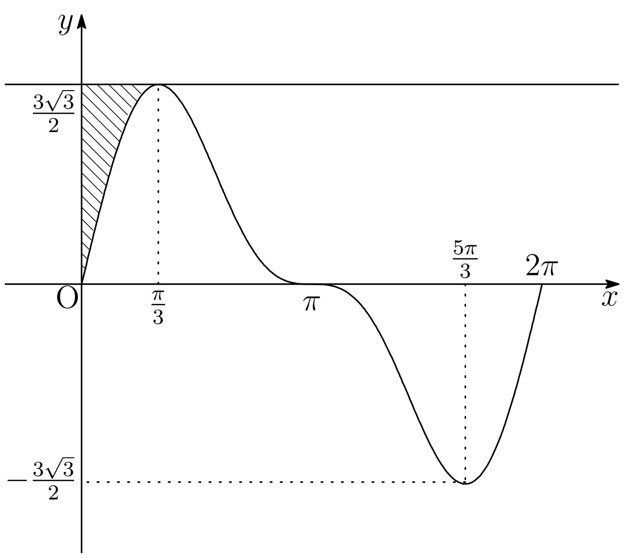


$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\sin 2x+2\sin x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ より

$$\begin{aligned}f'(x)&=2\cos 2x+2\cos x=2(2\cos^2 x+\cos x-1)\\&=2(2\cos x-1)(\cos x+1)\end{aligned}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	0

よって　$M=f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$



(2) 求める面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{\pi}{3} f\left(\frac{\pi}{3}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx \\
&= \frac{\pi}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x + 2\sin x)\,dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi - \Big[-\frac{1}{2}\cos 2x - 2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}\pi - \frac{7}{4}}
\end{aligned}
$$

(3) まず

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x)\,dx &= \int_0^{\pi} (\sin 2x + 2\sin x)\,dx \\
&= \Big[-\frac{1}{2}\cos 2x - 2\cos 2x\Big]_0^{\pi} = 4, \\
\int_0^{\pi} f(x)^2\,dx &= \int_0^{\pi} (\sin 2x + 2\sin x)^2\,dx \\
&= \int_0^{\pi} (\sin^2 2x + 4\sin 2x \sin x + 4\sin^2 x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x - 2\cos 3x - 2\cos 2x + 2\cos x\right) dx \\
&= \Big[\ \frac{5}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{2}{3}\sin 3x - \sin 2x + 2\sin x\ \Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{5}{2}\pi
\end{aligned}
$$

したがって

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \{f(x) - a\}^2\,dx &= \int_0^{\pi} f(x)^2\,dx - 2a\int_0^{\pi} f(x)\,dx + a^2\int_0^{\pi} dx \\
&= \frac{5\pi}{2} - 8a + \pi a^2 \\
&= \pi\left(a - \frac{4}{\pi}\right)^2 + \frac{5\pi}{2} - \frac{16}{\pi}
\end{aligned}
$$

よって　$\boldsymbol{a = \frac{4}{\pi}}$ のとき　最小値 $\boldsymbol{\frac{5\pi}{2} - \frac{16}{\pi}}$