令和３年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
中等教育 (数学専攻)　令和３年２月２５日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) $0 < a < 1$ のとき $\log_{a^2}(3-x) \leqq \log_a(2x-3)$ を満たす x の範囲を求めよ．

(2) 半径 r の円に内接する正 n 角形の面積を S_n とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \pi r^2$$

となることを示せ．

(3) $\triangle$ABC において，AB $= 3$，AC $= 4$ であって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4\sqrt{5}$ を満たす．点 P が次の条件を満たしながら動くとき，点 P の存在範囲の面積を求めよ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}, \quad s \geqq 0, \quad t \geqq 0, \quad 1 \leqq \frac{3}{2}s + \frac{4}{3}t \leqq 2$$

2 下の表のように，正の偶数を並べ，上から m 行目，左から n 列目の数を $a(m,\ n)$ と表すことにする．例えば，$a(3,\ 2) = 16$ である．

2	6	12	20	30	⋯
4	10	18	28	⋯	⋯
8	16	26	⋯	⋯	⋯
14	24	⋯	⋯	⋯	⋯
22	34	⋯	⋯	⋯	⋯
32	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯
⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯

次の問いに答えよ．

(1) $a(m,\ n) = 360$ のとき，m，n の値を求めよ．

(2) $a(m,\ n)$ を m，n を用いて表せ．

(3) c を 2 以上の整数とするとき，$m + n = c$ となる $a(m,\ n)$ の和 S_c を c を用いて表せ．

3 z を $z \neq 1,\ z \neq -1,\ z \neq i,\ z \neq -i,\ |z| = 1$ を満たす複素数とし，

$$w = \frac{1+z}{1-z}$$

とおく．次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位を表す．

(1) w は純虚数であることを示せ．

(2) 複素数平面において，1，z，w を表す 3 点が一直線上にあることを示せ．

(3) 複素数 $\dfrac{w-z}{i-z}$ の偏角 θ のとりうる値のうち，$0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たすものを全て求めよ．

4 $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+2}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = -1$，$x = 2$ および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ．

(3) a を実数とするとき，関数 $f(x)$ の区間 $a \leqq x \leqq a+1$ における最大値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $0 < a < 1$ のとき　$\log_{a^2}(3-x) \leqq \log_a(2x-3) \quad \cdots (*)$

真数は正であるから

$$3-x>0, \quad 2x-3>0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{3}{2} < x < 3 \quad \cdots ①$$

$(*)$ より　$\log_{a^2}(3-x) \leqq \log_{a^2}(2x-3)^2$

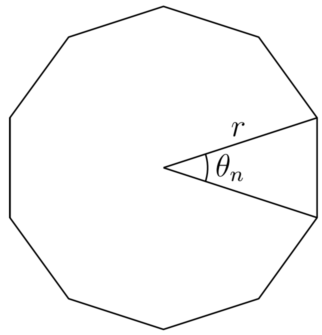
$0 < a^2 < 1$ であるから　$3-x \geqq (2x-3)^2$

整理すると　$4x^2-11x+6 \leqq 0$　ゆえに　$(x-2)(4x-3) \leqq 0$

これを解いて　$\dfrac{3}{4} \leqq x \leqq 2 \quad \cdots ②$

①, ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{\dfrac{3}{2} < x \leqq 2}$

(2) $\theta_n = \dfrac{2\pi}{n}$ とすると　$n = \dfrac{2\pi}{\theta_n}$



$$\begin{aligned} S_n &= n \times \frac{1}{2}r^2 \sin\theta_n \\ &= \frac{2\pi}{\theta_n}\cdot\frac{1}{2}r^2\sin\theta_n = \pi r^2\cdot\frac{\sin\theta_n}{\theta_n} \end{aligned}$$

$n \to \infty$ のとき，$\theta_n \to +0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\theta_n \to +0} \pi r^2 \cdot \frac{\sin\theta_n}{\theta_n} = \pi r^2$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \frac{4\sqrt{5}}{3\cdot4} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$1 \leqq \dfrac{3}{2}s + \dfrac{4}{3}t \leqq 2$ より

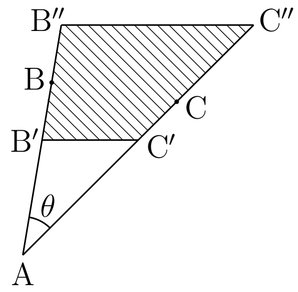
$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{3}{2}s\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) + \frac{4}{3}t\left(\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

$s' = \dfrac{3}{2}s$，$t' = \dfrac{4}{3}t$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}'} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}'} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = s'\overrightarrow{\mathrm{AB}'} + t'\overrightarrow{\mathrm{AC}'},\quad s' \geqq 0,\quad t' \geqq 0,\quad 1 \leqq s' + t' \leqq 2$$

$\mathrm{AB} = 3$，$\mathrm{AC} = 4$ より

$$\mathrm{AB}' = \frac{2}{3}\mathrm{AB} = 2,\quad \mathrm{AC}' = \frac{3}{4}\mathrm{AC} = 3$$



$\triangle\mathrm{AB'C'}$ の面積は

$$\triangle\mathrm{AB'C'} = \frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot2\cdot3\cdot\frac{2}{3} = 2$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}''} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}'}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}''} = 2\overrightarrow{\mathrm{AC}'}$ とすると，求める面積 S は，台形 $\mathrm{B'C'C''B''}$ の面積であるから

$$S = (2^2-1)\triangle\mathrm{AB'C'} = 3\cdot2 = \mathbf{6}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 1 行目の数 $a(1,\ n)$ に着目すると

$$a(1,\ n) = 2\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1) \qquad (*)$$

$a(1,\ 18) = 18{\cdot}19 = 342$，$a(1,\ 19) = 19{\cdot}20 = 380$ であるから

$$\begin{aligned} a(19,\ 1) &= 342 + 2 \\ a(18,\ 2) &= 342 + 2{\cdot}2 \\ a(17,\ 3) &= 342 + 2{\cdot}3 \\ &\vdots \\ a(11,\ 9) &= 342 + 2{\cdot}9 = 360 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{m = 11,\ n = 9}$

(2) $(*)$ により，$a(1,\ m+n-2) = (m+n-2)(m+n-1)$ であるから

$$\begin{aligned} a(m+n-1,\ 1) &= (m+n-2)(m+n-1) + 2 \\ a(m+n-2,\ 2) &= (m+n-2)(m+n-1) + 2{\cdot}2 \\ a(m+n-3,\ 3) &= (m+n-2)(m+n-1) + 2{\cdot}3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{a(m,\ n) = (m+n-2)(m+n-1) + 2n}$

別解 群数列 $2\,|\,4,\ 6\,|\,8,\ 10,\ 12\,|\,14,\ 16,\ 18,\ 20\,|, \cdots$ の第 i 群の j 番目は

$$2\left(\sum_{k=1}^{i-1} k + j\right) = i(i-1) + 2j$$

$a(m,\ n)$ は第 $m+n-1$ 群の n 番目より，$i = m+n-1$，$j = n$ とする．

(3) (2) の諸式から，$m+n = c$ より，$k = 1, 2, 3, \cdots, c-1$ に対して

$$a(c-k,\ k) = (c-2)(c-1) + 2k$$

したがって

$$\begin{aligned} S_c &= \sum_{k=1}^{c-1} a(c-k,\ k) \\ &= \sum_{k=1}^{c-1} \{(c-2)(c-1) + 2k\} \\ &= (c-2)(c-1)^2 + (c-1)c \\ &= \boldsymbol{(c-1)(c^2-2c+2)} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ より ($|z|=1$)

$$w+\overline{w}=\frac{1+z}{1-z}+\frac{1+\overline{z}}{1-\overline{z}}=\frac{1+z}{1-z}+\frac{z+1}{z-1}=0$$

$z\neq -1$ より，$w=\dfrac{1+z}{1-z}\neq 0$ であるから，w は純虚数である．

(2) $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ より ($|z|=1$)

$$w-1=\frac{1+z}{1-z}-1=\frac{2z}{1-z}=\frac{2z(1-\overline{z})}{(1-z)(1-\overline{z})}=\frac{2(z-1)}{|1-z|^2}$$

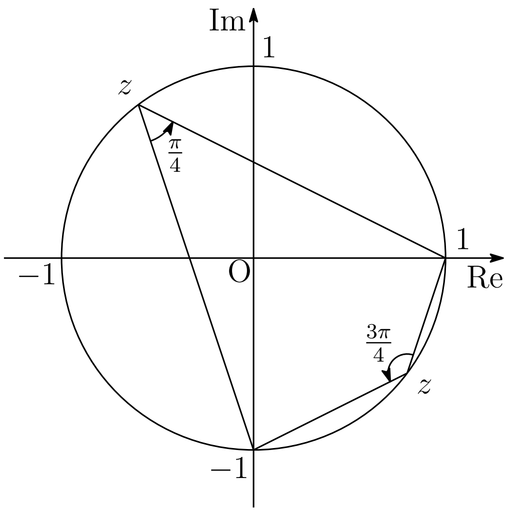
したがって $\quad \dfrac{w-1}{z-1}=\dfrac{2}{|z-1|^2}$

$\dfrac{w-1}{z-1}$ が実数であるから，3 点 $1,\ z,\ w$ は同一直線上にある．

(3) $w=\dfrac{1+z}{1-z}$ より

$$\frac{w-z}{i-z}=\frac{1}{i-z}\left(\frac{1+z}{1-z}-z\right)=\frac{1+z^2}{(i-z)(1-z)}=\frac{i+z}{1-z}$$

z は $z\neq 1,\ z\neq -i$ である原点を中心とする単位円周上の点である．



上の図から $\quad \arg\dfrac{1-z}{-i-z}=\dfrac{\pi}{4} \quad \cdots ①$ $\quad$ または $\quad \arg\dfrac{-i-z}{1-z}=\dfrac{3\pi}{4} \quad \cdots ②$

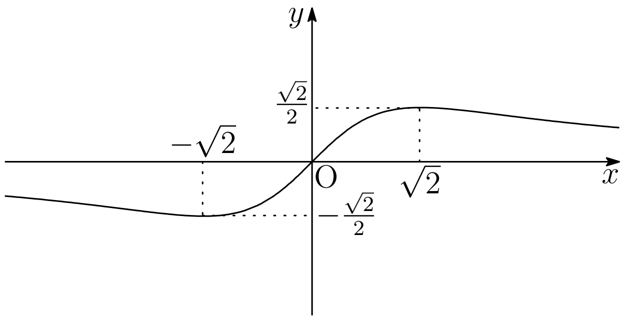
① より $\quad \arg\dfrac{-i-z}{1-z}=-\dfrac{\pi}{4}$ $\quad$ ゆえに $\quad \arg\dfrac{i+z}{1-z}=\dfrac{3\pi}{4}$

② より $\quad \arg\dfrac{i+z}{1-z}=\dfrac{7\pi}{4}$

$\theta=\arg\dfrac{w-z}{i-z}=\arg\dfrac{i+z}{1-z}$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ より $\quad \boldsymbol{\theta=\dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}}$

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ より　$f'(x)=\dfrac{2(x^2+2)-2x\cdot 2x}{(x^2+2)^2}=\dfrac{2(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	極小	↗	極大	↘



よって　極大値 $f(\sqrt{2})=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$，極小値 $f(-\sqrt{2})=\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

(2) $y=f(x)$ のグラフは原点に関して対称であるから，求める面積を S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 f(x)\,dx+\int_0^2 f(x)\,dx \\ &= \Big[\ \log(x^2+2)\ \Big]_0^1+\Big[\ \log(x^2+2)\ \Big]_0^2 \\ &= \log\frac{3}{2}+\log 3=\boldsymbol{\log\frac{9}{2}} \end{aligned}$$

(3) $f(a)=f(a+1)$ とすると　$\dfrac{2a}{a^2+1}=\dfrac{2(a+1)}{(a+1)^2+1}$

整理すると　$(a+2)(a-1)=0$　ゆえに　$a=-2,\ 1$

したがって，関数 $f(x)$ の区間 $a\leqq x\leqq a+1$ における最大値は

$a<-2$ のとき　　$f(a)=\boldsymbol{\dfrac{2a}{a^2+2}}$

$-2\leqq a<\sqrt{2}-1$ のとき　　$f(a+1)=\boldsymbol{\dfrac{2a+2}{a^2+2a+3}}$

$\sqrt{2}-1\leqq a<\sqrt{2}$ のとき　　$f(\sqrt{2})=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

$\sqrt{2}\leqq a$ のとき　　$f(a)=\boldsymbol{\dfrac{2a}{a^2+2}}$