令和２年度　福岡教育大学２次試験後期日程 (数学問題)
教育学部中等教育 (数学専攻)　令和２年３月１２日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 24^{15} は何桁の整数か求めよ．また，24^{15} の最高位の数字を求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(2) 一万円札，五千円札，千円札を使って 34000 円をちょうど支払う方法は何通りあるか求めよ．ただし，使用しない種類の札があってもよいものとする．

(3) 平面上の 3 点 A，B，C について，内積の和が

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$$

を満たしていれば，A，B，C は同一の点であることを示せ．

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{8+\cos^2 x}\,dx$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 複素数 z が $z \neq 0$，$z \neq 2$ を満たしているとき，

$$\left(z+\frac{4}{z}\right)^2 + 2\left(z+\frac{4}{z}\right) - 4 = \frac{2^4}{z^2}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{z}{2}\right)^5}{1-\dfrac{z}{2}}$$

が成り立つことを示せ．

(2) 複素数 α は実部が $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ であって，$|\alpha| = 2$ とする．次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) $(\alpha+\overline{\alpha})^2 + 2(\alpha+\overline{\alpha})$ の値を求めよ．ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役な複素数を表す．

(イ) α^5 の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\{a_n\}$ を正の数からなる数列とし，$a_1 = 1$ とする．また，$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおいたとき

$$(S_n)^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k)^3$$

が成り立っている．次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) $a_{n+1}(S_{n+1} + S_n) = (a_{n+1})^3$ を示し，これを用いて

$$(a_{n+1})^2 - a_{n+1} - 2S_n = 0$$

を示せ．

(3) $S_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)$ となることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $x > 0$ において，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & (0 < x \leqq 1) \\ \dfrac{\log x}{x} & (x > 1) \end{cases}$$

と定め，$f(x)$ の最大値を M，最小値を m とする．次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) $m = -M$ となることを示せ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ $(x > 1)$ の変曲点を求めよ．

(3) 曲線 $y = |f(x)|$ と直線 $y = M$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 24^{15} の常用対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10} 24^{15} &= 15(3\log 2 + \log 3) = 15(3\times 0.3010 + 0.4771)\\ &= 15\times 1.3801 = 20.7015\end{aligned}$$

ここで　$\log_{10} 5 = 1 - \log_{10} 2 = 1 - 0.3010 = 0.6990$,

$\log_{10} 6 = \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$

$20 + \log_{10} 5 < \log_{10} 24^{15} < 20 + \log_{10} 6$ より

$$5\times 10^{20} < 24^{15} < 6\times 10^{20}$$

よって　**最高位の数字が 5 の 21 桁の数**

(2) 求める場合の総数は次の **16 通り**

1 万円札	3	2	2	2	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
5 千円札	0	2	1	0	4	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0
千円札	4	4	9	14	4	9	14	19	24	4	9	14	19	24	29	34

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0$ より

$$\begin{aligned}(\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} + \overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= 0\\ -\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= 0\\ |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= 0\\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 + \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= 0\\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 &= 0\\ \left|\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 + \frac{3}{4}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 &= 0\end{aligned}$$

したがって　$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 0$　ゆえに　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 0$

よって　A，B，C は同一の点である．

(4) $$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{8+\cos^2 x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{9-\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(3+\sin x)(3-\sin x)}\,dx\\ &= \frac{1}{6}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{3+\sin x} + \frac{\cos x}{3-\sin x}\right)dx\\ &= \frac{1}{6}\Big[\log\frac{3+\sin x}{3-\sin x}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{6}\log 2}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\dfrac{2^4}{z^2}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{z}{2}\right)^5}{1-\dfrac{z}{2}}=\dfrac{2^4}{z^2}\left\{1+\dfrac{z}{2}+\left(\dfrac{z}{2}\right)^2+\left(\dfrac{z}{2}\right)^3+\left(\dfrac{z}{2}\right)^4\right\}$

$$=\frac{16}{z^2}+\frac{8}{z}+4+2z+z^2$$

$$=\left(z^2+8+\frac{16}{z^2}\right)+2\left(z+\frac{4}{z}\right)-4$$

$$=\left(z+\frac{4}{z}\right)^2+2\left(z+\frac{4}{z}\right)-4$$

よって，複素数 $z\neq 0,\ z\neq 2$ を満たしているとき，次式が成立する．

$$\left(z+\frac{4}{z}\right)^2+2\left(z+\frac{4}{z}\right)-4=\frac{2^4}{z^2}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{z}{2}\right)^5}{1-\dfrac{z}{2}}$$

(2)(ア) 複素数 α の実部が $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ であるから

$$\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad\text{ゆえに}\quad\alpha+\overline{\alpha}=-1+\sqrt{5}$$

$(\alpha+\overline{\alpha})^2=(-1+\sqrt{5})^2=6-2\sqrt{5}$ より

$$(\alpha+\overline{\alpha})^2+2(\alpha+\overline{\alpha})=6-2\sqrt{5}+2(-1+\sqrt{5})=\mathbf{4}$$

(イ) $z=\alpha$ とすると $(|\alpha|=2)$

$|z|^2=z\overline{z}=4$ より，$\dfrac{4}{z}=\overline{z}=\overline{\alpha}$ であるから

$$z+\frac{4}{z}=\alpha+\overline{\alpha}$$

(1) の結果に $z=\alpha$ を代入すると

$$(\alpha+\overline{\alpha})^2+2(\alpha+\overline{\alpha})-4=\frac{2^4}{\alpha^2}\cdot\frac{1-\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^5}{1-\dfrac{\alpha}{2}}$$

上式の左辺は (ア) の結果から，0 であるから

$$1-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^5=0\quad\text{よって}\quad\alpha^5=\mathbf{32}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $$(S_n)^2 = \sum_{k=1}^{n}(a_k)^3 \quad \cdots (*)$$

$n=2$ のとき，$a_1=1$ および $(*)$ より

$$(1+a_2)^2 = 1^3 + {a_2}^3 \quad \text{整理すると} \quad a_2(a_2+1)(a_2-2)=0$$

$a_2>0$ であるから　　$\boldsymbol{a_2=2}$

$n=3$ のとき，上の結果および $(*)$ より

$$(1+2+a_3)^2 = 1^3+2^3+{a_3}^3 \quad \text{整理すると} \quad a_3(a_3+2)(a_3-3)=0$$

$a_3>0$ であるから　　$\boldsymbol{a_3=3}$

(2) $(*)$ より　$$(S_{n+1})^2-(S_n)^2 = \sum_{k=1}^{n+1}(a_k)^3 - \sum_{k=1}^{n}(a_k)^3$$

$$(S_{n+1}-S_n)(S_{n+1}+S_n) = (a_{n+1})^3$$

$S_{n+1}-S_n = a_{n+1}$ であるから　$\boldsymbol{a_{n+1}(S_{n+1}+S_n)=(a_{n+1})^3}$

$a_{n+1}\neq 0$ であるから　　$S_{n+1}+S_n=(a_{n+1})^2$

$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}$ より　　$(S_n+a_{n+1})+S_n=(a_{n+1})^2$

よって　　$\boldsymbol{(a_{n+1})^2-a_{n+1}-2S_n=0}$

(3) (2) の結果から，$a_{n+1}>0$ に注意して　$a_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{1+8S_n}}{2}$

$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ より　$S_{n+1}=\dfrac{2S_n+1+\sqrt{8S_n+1}}{2} \quad \cdots (**)$

次式が成立することを数学的帰納法で示す．

$$S_n=\frac{1}{2}n(n+1) \quad \cdots \text{(A)}$$

［1］$n=1$ のとき，$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2=1$，$S_1=a_1=1$

したがって，このとき，(A) は成立する．

［2］$n=k$ のとき，(A) が成立すると仮定すると，$(**)$ より

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= \frac{2S_k+1+\sqrt{8S_k+1}}{2} = \frac{k(k+1)+1+\sqrt{4k(k+1)+1}}{2} \\ &= \frac{k^2+k+1+(2k+1)}{2} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) \end{aligned}$$

$n=k+1$ のときも (A) が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，(A) は成立する．

4 (1)
$$f(x)=\begin{cases} x\log x & (0<x\leqq 1)\\ \dfrac{\log x}{x} & (x>1)\end{cases}$$

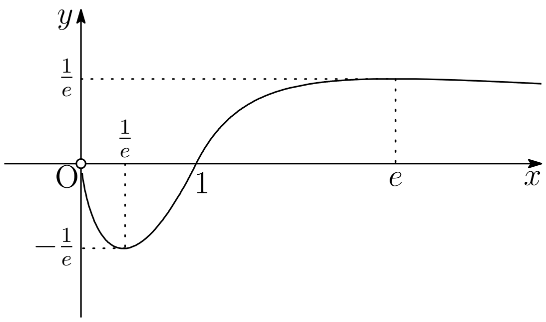
$0<x\leqq 1$ のとき，$f(x)=x\log x$ より

$$f'(x)=\log x+1$$

$x>1$ のとき，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{x}\log x$ より

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\log x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$



最大値 $M=f(e)=\dfrac{1}{e}$，最小値 $m=f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$　よって　$m=-M$

(2) (1) の結果から　$f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & (0<x<1)\\ \dfrac{2\log x-3}{x^3} & (x>1)\end{cases}$

$x=e^{\frac{3}{2}}$ の前後で，$f''(x)$ の符号が変化するから，変曲点は

$$(e^{\frac{3}{2}},\ f(e^{\frac{3}{2}}))\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{\left(e^{\frac{3}{2}},\ \frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)}$$

(3) $y=|f(x)|$，$y=M$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left(\frac{1}{e} - |f(x)| \right) dx \\
&= \frac{1}{e}\left(e - \frac{1}{e} \right) + \int_{\frac{1}{e}}^{1} x \log x \, dx - \int_{1}^{e} \frac{\log x}{x} \, dx \\
&= 1 - \frac{1}{e^2} + \left[\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \left[\frac{(\log x)^2}{2} \right]_{1}^{e} \\
&= 1 - \frac{1}{e^2} + \frac{1}{2e^2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4e^2} - \frac{1}{2} = \boldsymbol{\frac{1}{4} - \frac{1}{4e^2}}
\end{aligned}
$$