令和２年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
中等教育 (数学専攻)　令和２年２月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $|3x^2-8x+4|=7x-8$ を解け．

(2) xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という．n を自然数とするとき，連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2-nx \\ y \leqq nx \end{cases}$$

の表す領域に含まれる格子点の個数を n を用いて表せ．

(3) $x>1$ のとき

$$\log_8\left(\frac{x^3}{16}\right)+\log_x\left(\frac{8}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

の最小値と，最小値をとるときの x の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ n を自然数とする．次の問いに答えよ．

(1) 複素数 z が $z\neq 1$，$|z|=1$ をみたしているとき，$\dfrac{z}{(1-z)^2}$ は実数であることを示せ．

(2) 複素数 z が $z\neq 1$ をみたしているとき，

$$\sum_{k=1}^{n} kz^k=\frac{z}{(1-z)^2}\{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}\}$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で示せ．

(3) 実数 θ が $\cos\theta\neq 1$ をみたしているとき，

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos k\theta=\frac{1}{2(\cos\theta-1)}\{1-(n+1)\cos n\theta+n\cos(n+1)\theta\}$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle$OAB において，辺 OA の中点を C，辺 OB を $2:1$ の比に内分する点を D，直線 AD と直線 BC の交点を P とする．また，線分 OA と線分 OB を辺にもつ平行四辺形の辺と直線 OP の交点のうち，O 以外のものを Q とする．$\mathrm{OA} = 2\sqrt{2}$，$\mathrm{OD} = 3$，$\mathrm{AD} = 5$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の値を求めよ．また，$\sin\angle\mathrm{AOD}$ の値を求めよ．

(2) $s = \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AD}}$ とおく．$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を s，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表し，s の値を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(4) $\triangle$OAD と四角形 OAQD の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}$$

によって定める．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ について，原点を通る接線の方程式を求めよ．

(3) a を定数とするとき，方程式 $x^3 - ax - 2 = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ．

(4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸，および直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 方程式 $|3x^2-8x+4|=7x-8$ より　$|(x-2)(3x-2)|=7x-8$

(i) $\dfrac{8}{7} \leqq x \leqq 2$ のとき　$-(3x^2-8x+4)=7x-8$

ゆえに　$(x+1)(3x-4)=0$　したがって　$x=\dfrac{4}{3}$

(ii) $2 \leqq x$ のとき　$3x^2-8x+4=7x-8$

ゆえに　$(x-1)(x-4)=0$　したがって　$x=4$

よって　$\boldsymbol{x=\dfrac{4}{3},\ 4}$

(2) $y=x^2-nx$ と $y=nx$ から，y を消去すると

$$x^2-nx=nx \quad ゆえに\ x=0,\ 2n$$

$y \geqq x^2-nx$，$y \leqq nx$ を同時に満たす x の範囲は　$0 \leqq x \leqq 2n$
この区間において，$x^2-nx \leqq nx$ であるから，求める格子点の個数は

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}\{nk-(k^2-nk)+1\} &= \sum_{k=0}^{2n}(1+2nk-k^2)\\ &= (2n+1)+2n\cdot\frac{1}{2}2n(2n+1)\\ &\qquad -\frac{1}{6}\cdot 2n(2n+1)(4n+1)\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}(2n+1)(2n^2-n+3)}\end{aligned}$$

(3) $t=\log_8 x$ とおくと $(x>1)$　$t>0$

$$\log_8\left(\frac{x^3}{16}\right)=\log_8 x^3-\log_8 16=3t-\frac{4}{3}$$
$$\log_x\left(\frac{8}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=\log_x 8-\log_x \sqrt[3]{x^2}=\frac{1}{t}-\frac{2}{3}$$

したがって　$\log_8\left(\dfrac{x^3}{16}\right)+\log_x\left(\dfrac{8}{\sqrt[3]{x^2}}\right)=3t+\dfrac{1}{t}-2$

相加平均・相乗平均の大小関係により　$3t+\dfrac{1}{t}-2 \geqq 2\sqrt{3}-2$

上式において，等号が成立するとき　$3t=\dfrac{1}{t}$　ゆえに　$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

よって　$x=2^{3t}=\boldsymbol{2^{\sqrt{3}}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{2\sqrt{3}-2}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $w = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ とおくと，$|z| = 1$ より

$$\overline{w} = \frac{\overline{z}}{(1-\overline{z})^2} = \frac{z^2\overline{z}}{z^2(1-\overline{z})^2} = \frac{z(z\overline{z})}{(z-z\overline{z})^2} = \frac{z|z|^2}{(z-|z|^2)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$w = \overline{w}$ であるから，$w = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ は実数である．

(2) $$\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(n+1)z^n + nz^{n+1}\} \quad \cdots (*)$$

［1］$n = 1$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = z,$$
$$(*) \text{ の右辺} = \frac{z}{(1-z)^2}(1-2z+z^2) = \frac{z}{(1-z)^2}(1-z)^2 = z$$

このとき，$(*)$ は成立する．

［2］$n = j$ のとき，$(*)$ が成立すると仮定すると

$$\sum_{k=1}^{j} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(j+1)z^j + jz^{j+1}\}$$

上式の両辺に $(j+1)z^{j+1}$ を加えると

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{j+1} kz^k &= \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(j+1)z^j + jz^{j+1}\} + (j+1)z^{j+1} \\ &= \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(j+1)z^j + jz^{j+1} + (j+1)(1-z)^2z^j\} \\ &= \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(j+2)z^{j+1} + (j+1)z^{j+2}\}\end{aligned}$$

したがって，$n = j+1$ のときも，$(*)$ が成立する．

［1］,［2］より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成立する．

(3) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，$z+\overline{z}=2\cos\theta$ より，(1) で示した w について

$$\begin{aligned} w &= \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z}{1-2z+z^2} = \frac{z}{z\overline{z}-2z+z^2} \\ &= \frac{1}{z+\overline{z}-2} = \frac{1}{2\cos\theta-2} = \frac{1}{2(\cos\theta-1)} \end{aligned}$$

(2) の結果に $z=\cos\theta+i\sin\theta$ を代入すると，ド・モアブルの定理により

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k\{\cos k\theta+i\sin k\theta\} = w[1-(n+1)\{\cos n\theta+i\sin n\theta\} \\ +n\{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\}] \end{aligned}$$

上式の両辺の実部を比較すると

$$\sum_{k=1}^{n} k\cos k\theta = \frac{1}{2(\cos\theta-1)}\{1-(n+1)\cos n\theta+n\cos(n+1)\theta\}$$

補足 $f(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^k = \frac{z-z^{n+1}}{1-z}$ とおくと　$(1-z)f(z)=z-z^{n+1}$

これを z について微分すると　$-f(z)+(1-z)f'(z)=1-(n+1)z^n$

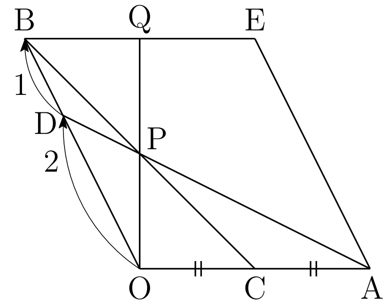
$$\begin{aligned} (1-z)f'(z) &= 1-(n+1)z^n+f(z) \\ &= 1-(n+1)z^n+\frac{z-z^n}{1-z} \\ &= \frac{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}}{1-z} \end{aligned}$$

ゆえに　$zf'(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}\{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}\}$

$f'(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kz^{k-1}$ より　$zf'(z)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kz^k$

よって　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kz^k = \frac{z}{(1-z)^2}\{1-(n+1)z^n+nz^{n+1}\}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より



$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2}{2}$$
$$=\frac{8+9-25}{2}=\mathbf{-4}$$

ゆえに　$\cos\angle\mathrm{AOD}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OD}}|}=\dfrac{-4}{2\sqrt{2}\cdot 3}=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

よって　$\sin\angle\mathrm{AOD}=\sqrt{1-\cos^2\angle\mathrm{AOD}}=\sqrt{1-\dfrac{2}{9}}=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$

(2) P は線分 AD を $s:1-s$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\cdot 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\cdot\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2s}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$$

P は BC 上の点であるから　$\dfrac{2s}{3}+2(1-s)=1$　これを解いて　$\boldsymbol{s=\dfrac{3}{4}}$

(3) (2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　$\cdots$①

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$　$\cdots$②

② を ① に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}$$

Q は直線 BE 上の点であるから

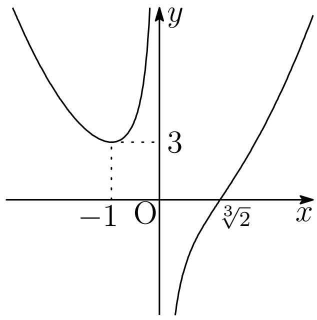
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})}{2}=\boldsymbol{\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}}$$

(4) (1)，(3) の結果から

$$\triangle\mathrm{OAD}=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OD}\sin\angle\mathrm{AOD}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}=\boldsymbol{\sqrt{14}}$$
$$\triangle\mathrm{OAQ}=\triangle\mathrm{OAB}=\frac{3}{2}\triangle\mathrm{OAD}=\frac{3}{2}\sqrt{14}$$
$$\triangle\mathrm{OQD}=\frac{2}{3}\triangle\mathrm{OQB}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\triangle\mathrm{OBE}=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{14}$$

四角形 OAQD $=\triangle\mathrm{OAQ}+\triangle\mathrm{OQD}=\dfrac{3}{2}\sqrt{14}+\dfrac{1}{2}\sqrt{14}=\boldsymbol{2\sqrt{14}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\dfrac{x^3-2}{x}=x^2-\dfrac{2}{x}$ より



$$f'(x)=2x+\frac{2}{x^2}=\frac{2}{x^2}(x+1)(x^2-x+1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$		$+$
$f(x)$	↘	極小	↗		↗

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$

よって　　極小値 $f(-1)=\mathbf{3}$

(2) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-\frac{t^3-2}{t}=\left(2t+\frac{2}{t^2}\right)(x-t)\quad すなわち\quad y=\frac{2(t^3+1)}{t^2}x-t^2-\frac{4}{t}$$

これが原点を通るから

$$-t^2-\frac{4}{t}=0\quad これを解いて\quad t=-\sqrt[3]{4}$$

よって，求める接線の方程式は　　$\boldsymbol{y=-\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}x}$

(3) $x=0$ は方程式 $x^3-ax-2=0$ の解ではないから

$$a=\frac{x^3-2}{x}$$

方程式の実数解の個数は，$y=f(x)$ と直線 $y=a$ の交点の個数に等しい．
したがって，(1) で示したグラフの概形から，求める実数解の個数は

$a<3$ のとき 1 個，　$a=3$ のとき 2 個，　$3<a$ のとき 3 個

(4) $f(x)=0$ の解は　$x=\sqrt[3]{2}$，　$\sqrt[3]{2}\leqq x\leqq 2$ において　$f(x)\geqq 0$
求める面積を S とすると

$$S=\int_{\sqrt[3]{2}}^{2}\frac{x^3-2}{x}\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-2\log x\right]_{\sqrt[3]{2}}^{2}=\mathbf{2-\frac{4}{3}\log 2}$$