

令和2年度 福岡教育大学2次試験前期日程(数学問題)
中等教育(数学専攻) 令和2年2月25日

問題 1 2 3 4

1 次の問いに答えよ.

- (1) 方程式 $|3x^2 - 8x + 4| = 7x - 8$ を解け.
 (2) xy 平面において, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という.
 n を自然数とすると, 連立不等式

$$\begin{cases} y \geq x^2 - nx \\ y \leq nx \end{cases}$$

の表す領域に含まれる格子点の個数を n を用いて表せ.

- (3) $x > 1$ のとき

$$\log_8 \left(\frac{x^3}{16} \right) + \log_x \left(\frac{8}{\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

の最小値と, 最小値をとるときの x の値を求めよ.

2 n を自然数とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 複素数 z が $z \neq 1$, $|z| = 1$ をみたしているとき, $\frac{z}{(1-z)^2}$ は実数であることを示せ.
 (2) 複素数 z が $z \neq 1$ をみたしているとき,

$$\sum_{k=1}^n kz^k = \frac{z}{(1-z)^2} \{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}\}$$

が成り立つことを n に関する数学的帰納法で示せ.

- (3) 実数 θ が $\cos \theta \neq 1$ をみたしているとき,

$$\sum_{k=1}^n k \cos k\theta = \frac{1}{2(\cos \theta - 1)} \{1 - (n+1) \cos n\theta + n \cos(n+1)\theta\}$$

が成り立つことを示せ.

3 $\triangle OAB$ において、辺 OA の中点を C 、辺 OB を $2:1$ の比に内分する点を D 、直線 AD と直線 BC の交点を P とする。また、線分 OA と線分 OB を辺にもつ平行四辺形の辺と直線 OP の交点のうち、 O 以外のものを Q とする。 $OA = 2\sqrt{2}$ 、 $OD = 3$ 、 $AD = 5$ であるとき、次の問いに答えよ。

- (1) \vec{OA} と \vec{OD} の内積 $\vec{OA} \cdot \vec{OD}$ の値を求めよ。また、 $\sin \angle AOD$ の値を求めよ。
- (2) $s = \frac{AP}{AD}$ とおく。 \vec{OP} を s 、 \vec{OB} 、 \vec{OC} を用いて表し、 s の値を求めよ。
- (3) \vec{OQ} を \vec{OA} 、 \vec{OB} を用いて表せ。
- (4) $\triangle OAD$ と四角形 $OAQD$ の面積を求めよ。

4 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x^3 - 2}{x}$$

によって定める。次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ について、原点を通る接線の方程式を求めよ。
- (3) a を定数とするとき、方程式 $x^3 - ax - 2 = 0$ の異なる実数解の個数を求めよ。
- (4) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸、および直線 $x = 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答例

1 (1) 方程式 $|3x^2 - 8x + 4| = 7x - 8$ より $|(x-2)(3x-2)| = 7x - 8$

(i) $\frac{8}{7} \leq x \leq 2$ のとき $-(3x^2 - 8x + 4) = 7x - 8$

ゆえに $(x+1)(3x-4) = 0$ したがって $x = \frac{4}{3}$

(ii) $2 \leq x$ のとき $3x^2 - 8x + 4 = 7x - 8$

ゆえに $(x-1)(x-4) = 0$ したがって $x = 4$

よって $x = \frac{4}{3}, 4$

(2) $y = x^2 - nx$ と $y = nx$ から, y を消去すると

$$x^2 - nx = nx \quad \text{ゆえに } x = 0, 2n$$

$y \geq x^2 - nx$, $y \leq nx$ を同時に満たす x の範囲は $0 \leq x \leq 2n$

この区間において, $x^2 - nx \leq nx$ であるから, 求める格子点の個数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} \{nk - (k^2 - nk) + 1\} &= \sum_{k=0}^{2n} (1 + 2nk - k^2) \\ &= (2n+1) + 2n \cdot \frac{1}{2} 2n(2n+1) \\ &\quad - \frac{1}{6} \cdot 2n(2n+1)(4n+1) \\ &= \frac{1}{3} (2n+1)(2n^2 - n + 3) \end{aligned}$$

(3) $t = \log_8 x$ とおくと ($x > 1$) $t > 0$

$$\log_8 \left(\frac{x^3}{16} \right) = \log_8 x^3 - \log_8 16 = 3t - \frac{4}{3}$$

$$\log_x \left(\frac{8}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = \log_x 8 - \log_x \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{t} - \frac{2}{3}$$

したがって $\log_8 \left(\frac{x^3}{16} \right) + \log_x \left(\frac{8}{\sqrt[3]{x^2}} \right) = 3t + \frac{1}{t} - 2$

相加平均・相乗平均の大小関係により $3t + \frac{1}{t} - 2 \geq 2\sqrt{3} - 2$

上式において, 等号が成立するとき $3t = \frac{1}{t}$ ゆえに $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

よって $x = 2^{3t} = 2^{\sqrt{3}}$ のとき, 最小値 $2\sqrt{3} - 2$ ■

2 (1) $w = \frac{z}{(1-z)^2}$ とおくと, $|z| = 1$ より

$$\bar{w} = \frac{\bar{z}}{(1-\bar{z})^2} = \frac{z^2\bar{z}}{z^2(1-\bar{z})^2} = \frac{z(z\bar{z})}{(z-z\bar{z})^2} = \frac{z|z|^2}{(z-|z|^2)^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$w = \bar{w}$ であるから, $w = \frac{z}{(1-z)^2}$ は実数である.

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n kz^k = \frac{z}{(1-z)^2} \{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}\} \quad \dots (*)$$

[1] $n = 1$ のとき

(*) の左辺 = z ,

$$(*) \text{ の右辺} = \frac{z}{(1-z)^2} (1 - 2z + z^2) = \frac{z}{(1-z)^2} (1-z)^2 = z$$

このとき, (*) は成立する.

[2] $n = j$ のとき, (*) が成立すると仮定すると

$$\sum_{k=1}^j kz^k = \frac{z}{(1-z)^2} \{1 - (j+1)z^j + jz^{j+1}\}$$

上式の両辺に $(j+1)z^{j+1}$ を加えると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{j+1} kz^k &= \frac{z}{(1-z)^2} \{1 - (j+1)z^j + jz^{j+1}\} + (j+1)z^{j+1} \\ &= \frac{z}{(1-z)^2} \{1 - (j+1)z^j + jz^{j+1} + (j+1)(1-z)^2 z^j\} \\ &= \frac{z}{(1-z)^2} \{1 - (j+2)z^{j+1} + (j+1)z^{j+2}\} \end{aligned}$$

したがって, $n = j+1$ のときも, (*) が成立する.

[1], [2] より, すべての自然数 n について, (*) が成立する.

(3) $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおくと, $z + \bar{z} = 2 \cos \theta$ より, (1) で示した w について

$$\begin{aligned} w &= \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z}{1-2z+z^2} = \frac{z}{z\bar{z}-2z+z^2} \\ &= \frac{1}{z+\bar{z}-2} = \frac{1}{2\cos\theta-2} = \frac{1}{2(\cos\theta-1)} \end{aligned}$$

(2) の結果に $z = \cos \theta + i \sin \theta$ を代入すると, ド・モアブルの定理により

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k \{ \cos k\theta + i \sin k\theta \} &= w [1 - (n+1) \{ \cos n\theta + i \sin n\theta \} \\ &\quad + n \{ \cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta \}] \end{aligned}$$

上式の両辺の実部を比較すると

$$\sum_{k=1}^n k \cos k\theta = \frac{1}{2(\cos\theta-1)} \{ 1 - (n+1) \cos n\theta + n \cos(n+1)\theta \}$$

補足 $f(z) = \sum_{k=1}^n z^k = \frac{z - z^{n+1}}{1-z}$ とおくと $(1-z)f(z) = z - z^{n+1}$

これを z について微分すると $-f(z) + (1-z)f'(z) = 1 - (n+1)z^n$

$$\begin{aligned} (1-z)f'(z) &= 1 - (n+1)z^n + f(z) \\ &= 1 - (n+1)z^n + \frac{z - z^{n+1}}{1-z} \\ &= \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{1-z} \end{aligned}$$

ゆえに $zf'(z) = \frac{z}{(1-z)^2} \{ 1 - (n+1)z^n + nz^{n+1} \}$

$$f'(z) = \sum_{k=1}^n kz^{k-1} \text{ より } zf'(z) = \sum_{k=1}^n kz^k$$

よって $\sum_{k=1}^n kz^k = \frac{z}{(1-z)^2} \{ 1 - (n+1)z^n + nz^{n+1} \}$ ■

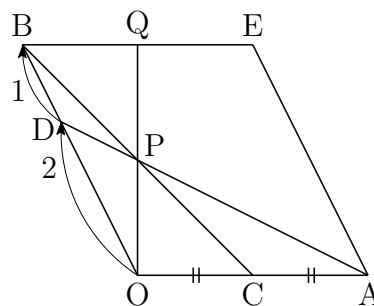
3 (1) $\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA}$ より

$$|\vec{AD}|^2 = |\vec{OD}|^2 - 2\vec{OA} \cdot \vec{OD} + |\vec{OA}|^2$$

$$\begin{aligned} \vec{OA} \cdot \vec{OD} &= \frac{|\vec{OA}|^2 + |\vec{OD}|^2 - |\vec{AD}|^2}{2} \\ &= \frac{8 + 9 - 25}{2} = -4 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに } \cos \angle AOD = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OD}}{|\vec{OA}| |\vec{OD}|} = \frac{-4}{2\sqrt{2} \cdot 3} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{よって } \sin \angle AOD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle AOD} = \sqrt{1 - \frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$



(2) P は線分 AD を $s : 1 - s$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= (1 - s)\vec{OA} + s\vec{OD} = (1 - s) \cdot 2\vec{OC} + s \cdot \frac{2}{3}\vec{OB} \\ &= \frac{2s}{3}\vec{OB} + 2(1 - s)\vec{OC} \end{aligned}$$

P は BC 上の点であるから $\frac{2s}{3} + 2(1 - s) = 1$ これを解いて $s = \frac{3}{4}$

(3) (2) の結果から $\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OC} \dots \textcircled{1}$

$\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{OB}$ とすると, $\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{OA}$ より $\vec{OC} = \frac{1}{2}(\vec{OE} - \vec{OB}) \dots \textcircled{2}$

② を ① に代入すると

$$\vec{OP} = \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(\vec{OE} - \vec{OB}) = \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{1}{4}\vec{OE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vec{OB} + \vec{OE}}{2}$$

Q は直線 BE 上の点であるから

$$\vec{OQ} = \frac{\vec{OB} + \vec{OE}}{2} = \frac{\vec{OB} + (\vec{OA} + \vec{OB})}{2} = \frac{\vec{OA} + 2\vec{OB}}{2}$$

(4) (1), (3) の結果から

$$\triangle OAD = \frac{1}{2}OA \cdot OD \sin \angle AOD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} = \sqrt{14}$$

$$\triangle OAQ = \triangle OAB = \frac{3}{2}\triangle OAD = \frac{3}{2}\sqrt{14}$$

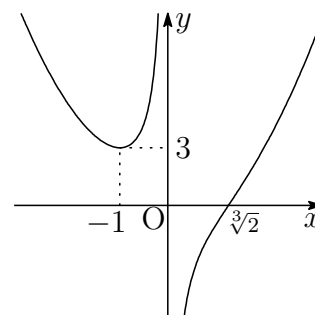
$$\triangle OQD = \frac{2}{3}\triangle OQB = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\triangle OBE = \frac{1}{3}\triangle OAB = \frac{1}{2}\sqrt{14}$$

$$\text{四角形 OAQD} = \triangle OAQ + \triangle OQD = \frac{3}{2}\sqrt{14} + \frac{1}{2}\sqrt{14} = 2\sqrt{14} \quad \blacksquare$$

4 (1) $f(x) = \frac{x^3 - 2}{x} = x^2 - \frac{2}{x}$ より

$$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2}{x^2}(x+1)(x^2 - x + 1)$$

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-		+		+
$f(x)$	↘	極小	↗		↗



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty$$

よって 極小値 $f(-1) = 3$

(2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線の方程式は

$$y - \frac{t^3 - 2}{t} = \left(2t + \frac{2}{t^2}\right)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{2(t^3 + 1)}{t^2}x - t^2 - \frac{4}{t}$$

これが原点を通るから

$$-t^2 - \frac{4}{t} = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -\sqrt[3]{4}$$

よって、求める接線の方程式は $y = -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}x$

(3) $x = 0$ は方程式 $x^3 - ax - 2 = 0$ の解ではないから

$$a = \frac{x^3 - 2}{x}$$

方程式の実数解の個数は、 $y = f(x)$ と直線 $y = a$ の交点の個数に等しい。
したがって、(1) で示したグラフの概形から、求める実数解の個数は

$a < 3$ のとき 1 個、 $a = 3$ のとき 2 個、 $3 < a$ のとき 3 個

(4) $f(x) = 0$ の解は $x = \sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2} \leq x \leq 2$ において $f(x) \geq 0$

求める面積を S とすると

$$S = \int_{\sqrt[3]{2}}^2 \frac{x^3 - 2}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2 \log x \right]_{\sqrt[3]{2}}^2 = 2 - \frac{4}{3} \log 2$$

■