平成 31 年度　福岡教育大学２次試験後期日程 (数学問題)
教育学部中等教育 (数学専攻)　 平成 31 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)$ の値を求めよ．

(2) 長さ 2 の線分 AB の中点を M とする．PM $=3$ を満たす点 P に対して，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は一定の値であることを示し，その値を求めよ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の内積を表す．

(3) $(1-x)^{10}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ の展開式における x^7 の係数を求めよ．

2 θ を実数とする．自然数 n に対して，複素数 z_n を

$$z_n=\sum_{k=0}^{n}2^k(\cos\theta+i\sin\theta)^k$$

と定める．次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位である．

(1) z_n の虚部は $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}2^k\sin k\theta$ であることを示せ．

(2) 等式

$$\frac{2^{n+2}\cos n\theta-2^{n+1}\cos(n+1)\theta-2\cos\theta+1}{5-4\cos\theta}=\sum_{k=0}^{n}2^k\cos k\theta$$

が成立することを示せ．

(3)

$$\sum_{k=0}^{7}\left(-1+\sqrt{3}i\right)^k$$

の実部を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a,\ b,\ c,\ d$ を有理数とする．次の問い答えよ．

(1) $a+\sqrt{5}b=0$ ならば $a=b=0$ となることを示せ．ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることを用いてもよい．

(2) $a^2+b^2 \neq 0$ である $a,\ b$ について $c+\sqrt{5}d$ が $a+\sqrt{5}b$ の逆数であるとき，c，d を a，b を用いて表せ．

(3) (2) において $a,\ b$ が整数であるとする．このとき，$c,\ d$ が整数になる必要十分条件は $|a^2-5b^2|=1$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を正の定数とする．関数 $f(x)=ae^x$ と関数 $g(x)=x(1-x)$ について，実数 x_0 が存在し，

$$f(x_0)=g(x_0), \quad f'(x_0)=g'(x_0)$$

を満たすものとする．次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) a および x_0 の値を求めよ．

(2) $f(x)=g(x)$ を満たす x は x_0 のみであることを示せ．

(3) b を正の定数とする．等式

$$\int_{\log b}^{x} h(t)\,dt = ae^x + x^2 - x$$

を満たす関数 $h(x)$ および b の値を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{\sin x(1+\cos x)}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$ より

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos x}=1\cdot\frac{1}{1+1}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(2) M は線分 AB の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{MB}}=-\overrightarrow{\mathrm{MA}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}},\qquad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{PM}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}}$$

よって $\qquad \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\overrightarrow{\mathrm{PM}}+\overrightarrow{\mathrm{MA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PM}}-\overrightarrow{\mathrm{MA}})$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{PM}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2=3^2-1^2=\mathbf{8}$$

(3) $(1-x)^{10}$ の一般項は ${}_{10}\mathrm{C}_j(-x)^j\quad(j=0,1,2,\cdots,10)$

$\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ の一般項は ${}_{10}\mathrm{C}_k(-x)^{-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,10)$

したがって，$(1-x)^{10}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{10}$ の一般項は

$${}_{10}\mathrm{C}_j(-x)^j\,{}_{10}\mathrm{C}_k(-x)^{-k}={}_{10}\mathrm{C}_j\cdot{}_{10}\mathrm{C}_k(-x)^{j-k}$$

$j-k=7$ となる $j,\ k$ は $\quad j=k+7\ (k=0,1,2,3)$

したがって $\quad\displaystyle\sum_{k=0}^{3}{}_{10}\mathrm{C}_{k+7}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_k(-x)^7=-\sum_{k=0}^{3}{}_{10}\mathrm{C}_{3-k}\cdot{}_{10}\mathrm{C}_k x^7$

よって，求める係数は

$$\begin{aligned}&-({}_{10}\mathrm{C}_3\cdot{}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_2\cdot{}_{10}\mathrm{C}_1+{}_{10}\mathrm{C}_1\cdot{}_{10}\mathrm{C}_2+{}_{10}\mathrm{C}_0\cdot{}_{10}\mathrm{C}_3)\\=&-2({}_{10}\mathrm{C}_3\cdot{}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_2\cdot{}_{10}\mathrm{C}_1)=-2(120\cdot1+45\cdot10)=\mathbf{-1140}\end{aligned}$$

別解 $(1-x)^{10}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{10}=\left(2-x-\dfrac{1}{x}\right)^{10}=(x+x^{-1}-2)^{10}$

上式の一般項は $\quad\dfrac{10!}{j!k!l!}x^jx^{-k}(-2)^l=\dfrac{10!(-2)^l}{j!k!l!}x^{j-k}\quad(j+k+l=10)$

$j-k=7$ となる $j,\ k,\ l$ は $\quad(j,\ k,\ l)=(7,\ 0,\ 3),\ (8,\ 1,\ 1)$

求める係数は $\quad\dfrac{10!(-2)^3}{7!3!}+\dfrac{10!(-2)}{8!1!1!}=-960+(-180)=\mathbf{-1140}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $z_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k(\cos\theta + i\sin\theta)^k$ より

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k(\cos k\theta + i\sin k\theta) = \sum_{k=0}^{n} 2^k \cos k\theta + i\sum_{k=0}^{n} 2^k \sin k\theta \quad \cdots(*)$$

よって，z_n の虚部は $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \sin k\theta$

(2) $w = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと，$|w| = 2$，$w + \overline{w} = 4\cos\theta$ より

$$\begin{aligned} z_n &= \sum_{k=0}^{n} w^k = \frac{1-w^{n+1}}{1-w} = \frac{(1-w^{n+1})(1-\overline{w})}{(1-w)(1-\overline{w})} \\ &= \frac{|w|^2 w^n - w^{n+1} - \overline{w} + 1}{1 + |w|^2 - (w+\overline{w})} = \frac{4w^n - w^{n+1} - \overline{w} + 1}{5 - 4\cos\theta} \end{aligned}$$

$\mathrm{Re}(w^n) = 2^n \cos n\theta$，$\mathrm{Re}(w^{n+1}) = 2^{n+1}\cos(n+1)\theta$，$\mathrm{Re}(\overline{w}) = 2\cos\theta$ より

$$\mathrm{Re}(z_n) = \frac{2^{n+2}\cos n\theta - 2^{n+1}\cos(n+1)\theta - 2\cos\theta + 1}{5 - 4\cos\theta}$$

上式および $(*)$ から，次式が成立する．

$$\frac{2^{n+2}\cos n\theta - 2^{n+1}\cos(n+1)\theta - 2\cos\theta + 1}{5 - 4\cos\theta} = \sum_{k=0}^{n} 2^k \cos k\theta$$

(3) $-1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi + i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)$ であるから

$$\sum_{k=0}^{7}\left(-1+\sqrt{3}i\right)^k$$

の実部は，(2) の結果の左辺に $n = 7$，$\theta = \dfrac{2}{3}\pi$ を代入して

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left\{\sum_{k=0}^{7}\left(-1+\sqrt{3}i\right)^k\right\} &= \frac{2^9\cos\frac{14}{3}\pi - 2^8\cos\frac{16}{3}\pi - 2\cos\frac{2}{3}\pi + 1}{5 - 4\cos\frac{2}{3}\pi} \\ &= \frac{2^9\left(-\frac{1}{2}\right) - 2^8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{5 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{-2^8 + 2^7 + 1 + 1}{5+2} = \frac{-2^7 + 2}{7} = \mathbf{-18} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a+\sqrt{5}b=0$ ($a,\ b$ は有理数) $\cdots$①

$b\neq 0$ のとき　$\sqrt{5}=-\dfrac{a}{b}$

このとき，左辺は無理数，右辺は有理数となり，不適.

$b=0$ を ① に代入すると　$a=0$　よって　$a=b=0$

(2) $c+\sqrt{5}d$ が $a+\sqrt{5}b$ の逆数であるから

$$(c+\sqrt{5}d)(a+\sqrt{5}b)=1$$

したがって　$ac+5bd-1+(ad+bc)\sqrt{5}=0$

このとき，$ac+5bd-1$，$ad+bc$ は有理数であるから，(1) の結論により

$$ac+5bd-1=0,\quad ad+bc=0$$

上の 2 式から　$(a^2-5b^2)c=a,\ (a^2-5b^2)d=-b$

ここで，$a^2-5b^2=0$ と仮定すると

$$a+\sqrt{5}b=0\quad \text{または}\quad a-\sqrt{5}b=0$$

これも (1) の結論により，$a=b=0$ となり，$a^2+b^2\neq 0$ に反し，不適.

したがって，$a^2-5b^2\neq 0$ により

$$\boldsymbol{c=\frac{a}{a^2-5b^2},\quad d=-\frac{b}{a^2-5b^2}}$$

(3) **(必要性)**

(2) の結論から，$a=(a^2-5b^2)c$，$b=-(a^2-5b^2)d$ であるから

$$\begin{aligned}a^2-5b^2&=\{(a^2-5b^2)c\}^2-5\{(a^2-5b^2)d\}^2\\&=(a^2-5b^2)^2(c^2-5d^2)\end{aligned}$$

$a^2-5b^2\neq 0$ であるから　$1=(a^2-5b^2)(c^2-5d^2)$

$a,\ b,\ c,\ d$ は整数であるから　$|a^2-5b^2|=1$

(十分性)

(2) の結論から　$a^2-5b^2=1$ のとき　$c=a$，$d=-b$

$a^2-5b^2=-1$ のとき　$c=-a$，$d=b$

したがって，$a,\ b$ が整数ならば，$c,\ d$ は整数である.

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=ae^x$，$g(x)=x(1-x)$ より　$f'(x)=ae^x$，$g'(x)=1-2x$

$f(x_0)=g(x_0)$，$f'(x_0)=g'(x_0)$ より

$$(*)\begin{cases} ae^{x_0}=x_0(1-x_0) \\ ae^{x_0}=1-2x_0 \end{cases}$$

$a>0$ より　$x_0(1-x_0)>0$，$1-2x_0>0$　すなわち　$0<x_0<\dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

$(*)$ から　$x_0(1-x_0)=1-2x_0$　ゆえに　$x_0{}^2-3x_0+1=0$

① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{x_0=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$

$(*)$ の第 2 式から

$$a=(1-2x_0)e^{-x_0}=\left(1-2\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)e^{-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=\boldsymbol{(\sqrt{5}-2)e^{\frac{\sqrt{5}-3}{2}}}$$

(2) $H(x)=f(x)-g(x)$ とおくと　$H(x)=ae^x+x^2-x$

$$H'(x)=ae^x+2x-1,\qquad H''(x)=ae^x+2>0$$

$H''(x)>0$ より，$H'(x)$ は単調増加で，$H'(x)=0$ を満たす x は，(1) で求めた x_0 のみであり，$H(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	x_0	$\cdots$	1
$H'(x)$		$-$	0	$+$	
$H(x)$	a	$\searrow$	極小	$\nearrow$	ae

極小値は $H(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0$ であるから，$H(x)=0$，すなわち，$f(x)=g(x)$ を満たす x は x_0 のみである．

(3) 等式

$$\int_{\log b}^{x} h(t)\,dt=ae^x+x^2-x\quad\cdots(*)$$

を x について微分することにより

$$h(x)=ae^x+2x-1=\boldsymbol{(\sqrt{5}-2)e^{x+\frac{\sqrt{5}-3}{2}}+2x-1}$$

$(*)$ に (2) で示した $H(x)$ を適用すると

$$\int_{\log b}^{x} h(t)\,dt=H(x)$$

これに，$x=\log b$ を代入すると　$H(\log b)=0$

$\log b$ は，方程式 $H(x)=0$ の唯一の解 x_0 であるから

$$\log b=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\quad\text{よって}\quad \boldsymbol{b=e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}}$$