

平成31年度 福岡教育大学2次試験前期日程(数学問題)
中等教育(数学専攻) 平成31年2月25日

問題 1 2 3 4

1 次の問いに答えよ.

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(1-x) - 2\log_4(y+6) = -2 \\ 3 \cdot 2^x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^y = 2 \end{cases}$$

を解け.

(2) m, n を自然数とする. $m^2 + 1$ と $n^2 + 1$ がともに5で割り切れるならば, $m^3n^3 - mn$ も5で割り切れることを示せ.

(3) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}$ の値を求めよ.

2 a を正の定数とする. 座標平面上の点 $A(a, 0)$, 点 $B(-a, 0)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 任意の点 $P(x, y)$ について,

$$\left(|\vec{PA}||\vec{PB}|\right)^2 = \left(\vec{PA} \cdot \vec{PB}\right)^2 + 4a^2y^2$$

となることを示せ. ただし, $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ は \vec{PA} と \vec{PB} の内積を表し, $|\vec{PA}|$ と $|\vec{PB}|$ はそれぞれ \vec{PA} と \vec{PB} の大きさを表す.

(2) 点 $P(x, y)$ が

$$|\vec{PA}||\vec{PB}| = 2\vec{PA} \cdot \vec{PB}$$

を満たすとき, P はどのような図形上にあるか図示せよ.

3 1から5までの番号を1つずつ書いた5枚のカードがある. この中から1枚のカードを引いて番号を記録して元に戻す作業を n 回繰り返す. このとき, 記録した番号の和が偶数である確率を p_n とする. 次の問いに答えよ.

(1) p_1, p_2, p_3 を求めよ.

(2) p_n と p_{n+1} の関係式を求めよ.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ.

4 曲線 $y = \sqrt{1-x^2} + x - 1$ ($0 \leq x \leq 1$) と x 軸で囲まれた部分を D とする. 次の問いに答えよ.

- (1) 極値, 凹凸を調べて曲線の概形を書け.
- (2) D の面積を求めよ.
- (3) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ.

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad (*) \begin{cases} \log_2(1-x) - 2\log_4(y+6) = -2 \\ 3 \cdot 2^x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^y = 2 \end{cases}$$

(*) の第 1 式において、真数は正であるから

$$1-x > 0, \quad y+6 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad x < 1, \quad y > -6 \quad \dots \textcircled{1}$$

(*) の第 1 式から

$$\log_2(1-x) - \log_2(y+6) = -2 \quad \text{ゆえに} \quad \log_2 \frac{1-x}{y+6} = \log_2 \frac{1}{4}$$

$$\text{上の第 2 式から} \quad \frac{1-x}{y+6} = \frac{1}{4} \quad \text{すなわち} \quad y = -4x - 2 \quad \dots \textcircled{2}$$

これを (*) 第 2 式に代入すると

$$3 \cdot 2^x + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4x-2} = 2 \quad \text{ゆえに} \quad 3 \cdot 2^x + 2 \cdot 2^{2x} = 2$$

ここで、 $t = 2^x$ とおくと ($t > 0$)

$$3t + 2t^2 = 2 \quad \text{ゆえに} \quad (t+2)(2t-1) = 0$$

$$t > 0 \text{ に注意して } t = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad 2^x = 2^{-1} \quad \text{すなわち} \quad x = -1$$

したがって、 $\textcircled{1}$ に注意して、これを $\textcircled{2}$ に代入すると $y = 2$

よって $x = -1, y = 2$

$$(2) \quad m^3n^3 - mn = mn(m^2n^2 - 1) = mn(m^2n^2 + n^2 - n^2 - 1) \\ = mn\{n^2(m^2 + 1) - (n^2 + 1)\}$$

$m^2 + 1$ と $n^2 + 1$ がともに 5 で割り切れるから、次式は 5 で割り切れる。

$$m^3n^3 - mn$$

別解 条件から

$$m^2 + 1 \equiv 0, \quad n^2 + 1 \equiv 0 \quad \text{ゆえに} \quad m^2 \equiv -1, \quad n^2 \equiv -1 \pmod{5}$$

したがって $m^2n^2 \equiv (-1)^2$ ゆえに $m^2n^2 - 1 \equiv 0 \pmod{5}$

よって $m^3n^3 - mn = mn(m^2n^2 - 1) \equiv 0 \pmod{5}$

$$(3) \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{\sin x}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) dx = \frac{1}{2} \left[\log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ = \log \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$$



$$\boxed{2} \quad (1) \quad (p^2 + q^2)(r^2 + s^2) = (pr + qs)^2 + (ps - qr)^2$$

$\vec{PA} = (p, q)$, $\vec{PB} = (r, s)$ とすると, 上式から

$$\left(|\vec{PA}||\vec{PB}|\right)^2 = \left(\vec{PA} \cdot \vec{PB}\right)^2 + (ps - qr)^2 \quad \dots (*)$$

$P(x, y)$, $A(a, 0)$, $B(-a, 0)$ であるから

$$\vec{PA} = (a - x, -y), \quad \vec{PB} = (-a - x, -y) \quad \dots \textcircled{1}$$

ここでは, $p = a - x$, $q = -y$, $r = -a - x$, $s = -y$ より

$$ps - qr = (a - x)(-y) - (-y)(-a - x) = -2ay$$

これを (*) に代入すると, 次式を得る.

$$\left(|\vec{PA}||\vec{PB}|\right)^2 = \left(\vec{PA} \cdot \vec{PB}\right)^2 + 4a^2y^2$$

$$(2) \quad |\vec{PA}||\vec{PB}| = 2\vec{PA} \cdot \vec{PB} \quad \dots (**)$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ より } \vec{PA} \cdot \vec{PB} &= (a - x)(-a - x) + (-y) \cdot (-y) \\ &= x^2 + y^2 - a^2 \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$|\vec{PA}||\vec{PB}| \geq 0$ であるから, (**), ② より

$$x^2 + y^2 - a^2 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + y^2 \geq a^2 \quad \dots \textcircled{3}$$

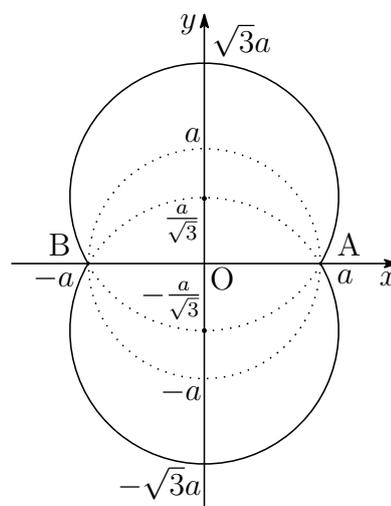
(**) を (1) の結果に代入して整理すると

$$3(\vec{PA} \cdot \vec{PB})^2 = 4a^2y^2 \quad \text{ゆえに} \quad \vec{PA} \cdot \vec{PB} = \pm \frac{2a}{\sqrt{3}}y$$

上の第2式に ② を代入すると

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - a^2 &= \pm \frac{2a}{\sqrt{3}}y \\ x^2 + \left(y \mp \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 &= \frac{4a^2}{3} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

③, ④ より, 点 P の描く図形は, 右の図の実線部分である.



- 3** (1) 1回の試行で偶数のカードを引く確率から

$$p_1 = \frac{2}{5}$$

2回とも偶数または奇数のカードを引く確率から

$$p_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{13}{25}$$

3回とも偶数または1回だけ偶数のカードを引く確率から

$$p_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + {}_3C_1 \left(\frac{2}{5}\right) \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{62}{125}$$

- (2) 条件から、次の確率漸化式が成立する。

$$p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{3}{5}(1-p_n) \quad \text{よって} \quad p_{n+1} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}p_n$$

- (3) (2)の結果から $p_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{5} \left(p_n - \frac{1}{2}\right)$

$\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は、初項 $p_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}$ 、公比 $-\frac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10} \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{1}{2} \left\{1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

よって $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1}{2}$ ■

4 (1) $y = \sqrt{1-x^2} + x - 1$ ($0 \leq x \leq 1$) より

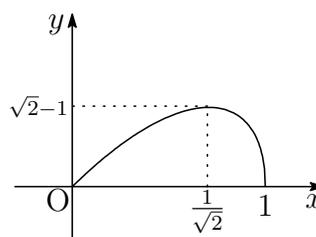
$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1, \quad y'' = -\frac{\sqrt{1-x^2} - x \cdot \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= -\frac{(1-x^2) + x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$y' = 0$ とすると $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 = 0$

これを解いて $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

| | | | | | |
|-------|---|-----|----------------------|-----|---|
| x | 0 | ... | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | ... | 1 |
| y' | | + | 0 | - | |
| y'' | | - | - | - | |
| y | 0 | ↗ | 極大 | ↘ | 0 |



$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき極大値 $\sqrt{2} - 1$

(2) 領域 D の面積を S とすると

$$S = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} + x - 1) dx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^1$$

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ は半径 1 の円の面積の $\frac{1}{4}$ であるから $S = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

(3) 求める立体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi} = \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} + x - 1)^2 dx$$

$$= \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2} dx - 2 \int_0^1 (\sqrt{1-x^2} + x - 1) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 - 2S$$

$$= \frac{2}{3} - 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{5}{3} - \frac{\pi}{2}$$

よって $V = \pi \left(\frac{5}{3} - \frac{\pi}{2} \right)$ ■