平成 31 年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
中等教育 (数学専攻)　平成 31 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(1-x) - 2\log_4(y+6) = -2 \\ 3\cdot 2^x + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^y = 2 \end{cases}$$

を解け．

(2) m，n を自然数とする．m^2+1 と n^2+1 がともに 5 で割り切れるならば，$m^3n^3 - mn$ も 5 で割り切れることを示せ．

(3) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin x}$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を正の定数とする．座標平面上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(-a,\ 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 任意の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，

$$\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\right)^2 = \left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right)^2 + 4a^2y^2$$

となることを示せ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の内積を表し，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$ はそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の大きさを表す．

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}| = 2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$$

を満たすとき，P はどのような図形上にあるか図示せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 1 から 5 までの番号を 1 つずつ書いた 5 枚のカードがある．この中から 1 枚のカードを引いて番号を記録して元に戻す作業を n 回繰り返す．このとき，記録した番号の和が偶数である確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_1，p_2，p_3 を求めよ．

(2) p_n と p_{n+1} の関係式を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲線 $y=\sqrt{1-x^2}+x-1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸で囲まれた部分を D とする．次の問いに答えよ．

(1) 極値，凹凸を調べて曲線の概形を書け．

(2) D の面積を求めよ．

(3) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$(*)\begin{cases}\log_2(1-x)-2\log_4(y+6)=-2\\ 3\cdot2^x+\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^y=2\end{cases}$$

$(*)$ の第 1 式において，真数は正であるから

$$1-x>0,\quad y+6>0 \quad ゆえに \quad x<1,\quad y>-6 \quad \cdots ①$$

$(*)$ の第 1 式から

$$\log_2(1-x)-\log_2(y+6)=-2 \quad ゆえに \quad \log_2\frac{1-x}{y+6}=\log_2\frac{1}{4}$$

上の第 2 式から $\quad \dfrac{1-x}{y+6}=\dfrac{1}{4} \quad$ すなわち $\quad y=-4x-2 \quad \cdots ②$

これを $(*)$ 第 2 式に代入すると

$$3\cdot2^x+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-4x-2}=2 \quad ゆえに \quad 3\cdot2^x+2\cdot2^{2x}=2$$

ここで，$t=2^x$ とおくと $(t>0)$

$$3t+2t^2=3 \quad ゆえに \quad (t+2)(2t-1)=0$$

$t>0$ に注意して $\quad t=\dfrac{1}{2} \quad$ ゆえに $\quad 2^x=2^{-1} \quad$ すなわち $\quad x=-1$

したがって，① に注意して，これを ② に代入すると $\quad y=2$

よって $\qquad \boldsymbol{x=-1,\ y=2}$

(2) $$\begin{aligned} m^3n^3-mn &= mn(m^2n^2-1)=mn(m^2n^2+n^2-n^2-1)\\ &= mn\{n^2(m^2+1)-(n^2+1)\}\end{aligned}$$

m^2+1 と n^2+1 がともに 5 で割り切れるから，次式は 5 で割り切れる．

$$m^3n^3-mn$$

別解 条件から

$$m^2+1\equiv0,\quad n^2+1\equiv0 \quad ゆえに \quad m^2\equiv-1,\quad n^2\equiv-1 \pmod 5$$

したがって $\quad m^2n^2\equiv(-1)^2 \quad$ ゆえに $\quad m^2n^2-1\equiv0 \pmod 5$

よって $\qquad m^3n^3-mn=mn(m^2n^2-1)\equiv0 \pmod 5$

(3) $$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sin x}&=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)dx=\frac{1}{2}\Big[\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\\ &=\boldsymbol{\log\frac{3+2\sqrt{3}}{3}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $$(p^2+q^2)(r^2+s^2)=(pr+qs)^2+(ps-qr)^2$$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(p,\ q)$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(r,\ s)$ とすると，上式から

$$\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\right)^2=\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right)^2+(ps-qr)^2 \quad \cdots(*)$$

$\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(-a,\ 0)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(a-x,-y),\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-a-x,-y) \quad \cdots①$$

ここでは，$p=a-x$，$q=-y$，$r=-a-x$，$s=-y$ より

$$ps-qr=(a-x)(-y)-(-y)(-a-x)=-2ay$$

これを $(*)$ に代入すると，次式を得る．

$$\left(|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\right)^2=\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right)^2+4a^2y^2$$

(2) $$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=2\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} \quad \cdots(**)$$

① より　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(a-x)(-a-x)+(-y)\cdot(-y)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad = x^2+y^2-a^2 \quad \cdots②$

$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|\geqq 0$ であるから，$(**)$，② より

$$x^2+y^2-a^2\geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad x^2+y^2\geqq a^2 \quad \cdots③$$

$(**)$ を (1) の結果に代入して整理すると

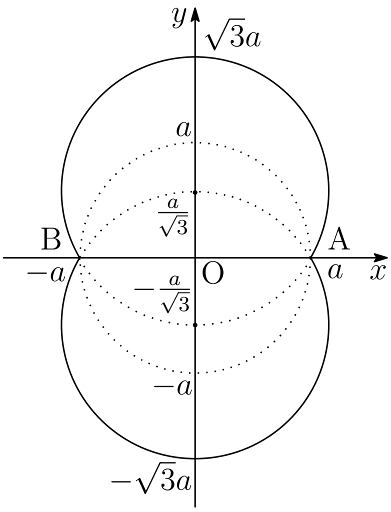
$$3(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}})^2=4a^2y^2 \quad \text{ゆえに} \quad \overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\pm\frac{2a}{\sqrt{3}}y$$

上の第 2 式に ② を代入すると

$$x^2+y^2-a^2=\pm\frac{2a}{\sqrt{3}}y$$

$$x^2+\left(y\mp\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{4a^2}{3} \quad \cdots④$$

③，④ より，点 P の描く図形は，右の図の実線部分である．



$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 1回の試行で偶数のカードを引く確率から

$$p_1 = \mathbf{\frac{2}{5}}$$

2回とも偶数または奇数のカードを引く確率から

$$p_2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \mathbf{\frac{13}{25}}$$

3回とも偶数または1回だけ偶数のカードを引く確率から

$$p_3 = \left(\frac{2}{5}\right)^3 + {}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \mathbf{\frac{62}{125}}$$

(2) 条件から，次の確率漸化式が成立する．

$$p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n + \frac{3}{5}(1 - p_n) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p_{n+1} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}p_n}$$

(3) (2) の結果から　$p_{n+1} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{5}\left(p_n - \dfrac{1}{2}\right)$

$\left\{p_n - \dfrac{1}{2}\right\}$ は，初項 $p_1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{10}$，公比 $-\dfrac{1}{5}$ の等比数列であるから

$$p_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{10}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad p_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right\}$$

よって　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}}$

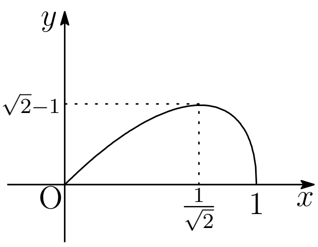
$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y=\sqrt{1-x^2}+x-1\ (0 \leqq x \leqq 1)$ より

$$y'=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+1, \qquad y''=-\frac{\sqrt{1-x^2}-x\cdot\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$
$$=-\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$y'=0$ とすると $\quad -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+1=0$

これを解いて $\quad x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'		$+$	0	$-$	
y''		$-$	$-$	$-$	
y	0	↗	極大	↘	0



$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき極大値 $\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$

(2) 領域 D の面積を S とすると

$$S=\int_0^1(\sqrt{1-x^2}+x-1)\,dx$$
$$=\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_0^1$$

$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ は半径 1 の円の面積の $\dfrac{1}{4}$ であるから $\qquad S=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}}$

(3) 求める立体の体積を V とすると

$$\frac{V}{\pi}=\int_0^1(\sqrt{1-x^2}+x-1)^2\,dx$$
$$=\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx-2\int_0^1(\sqrt{1-x^2}+x-1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1-2S$$
$$=\frac{2}{3}-2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

よって $\qquad V=\boldsymbol{\pi\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)}$