平成30年度　福岡教育大学2次試験後期日程 (数学問題)
教育学部中等教育 (数学専攻)　平成30年3月12日

- 数 I・II・III・A・B (120分)

1 次の問いに答えよ．

(1) 正八面体の6個の頂点に1, 2, 3, 4, 5, 6の番号を付ける．この番号の付け方は何通りあるか求めよ．ただし，各頂点の番号はすべて異なるものとし，正八面体を回転して一致する番号付けは同じものとする．

(2) $\tan\dfrac{5}{12}\pi$ の値を求めよ．

(3) n を自然数とし，$S_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j$ とおく．$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(1+3S_n-3S_k)$ を計算せよ．

2 p を2でない素数，a，b を正の整数とする．$p=(a+bi)(a-bi)$ が成り立っているとき，次の問いに答えよ．ただし，i は虚数単位とする．

(1) p を4で割った余りは1であることを示せ．

(2) 複素数 $z=x+yi$ において，$xy\neq 0$ ならば3辺の長さが $|x|,\ |y|,\ |z|$ の三角形が直角三角形になることを使って，斜辺の長さが p で残りの2辺の長さが整数である直角三角形が作れることを示せ．

3 $\mathrm{P}(a,\ b)$ と $\mathrm{Q}(a+b,\ a)$ を座標平面上の点とし，点Pは原点Oを中心とする半径1の円周上にあるとする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ (k は実数) となるとき，$k^2-k-1=0$ が成り立つことを示せ．

(2) (1) において，$k>0$ のとき，点Pの座標 $(s,\ t)$ を求めよ．

(3) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を (2) で求めた $(s,\ t)$ を除く円周上の点とする．$k^2-k-1=0$ を満たす正の実数 k に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-k\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ となるような点Rの座標を $(c,\ d)$ とするとき，点 $\mathrm{S}(c+d,\ c)$ が直線OR上にあることを示せ．また，その直線の方程式を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x) = \log x$，$g(x) = \dfrac{1}{n}\log x$ について，次の問いに答えよ．ただし，n は 2 以上の自然数，対数は自然対数とする．

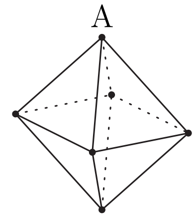
(1) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線 ℓ の方程式を求めよ．また，曲線 $y = g(x)$ 上の点 $(\beta,\ g(\beta))$ における接線 m の方程式を求めよ．

(2) (1) で求めた接線 ℓ，m が一致するとき，α，β を n を用いて表せ．また，そのときの ℓ の方程式を求めよ．

(3) $n = 2$ のとき，2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ と (2) で求めた接線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 番号 6 を付ける頂点を固定し，残り 1〜5 の番号の付け方を求めればよい．このとき，番号 6 を付けた頂点の向側にある頂点を A とする．A の番号の付け方は 1〜5 の 5 通り，残り 4 個の頂点への番号の付け方は，残り 4 つの番号の円順列になる．よって，求める場合の総数は



$$5\cdot 3! = \mathbf{30}\ \textbf{(通り)}$$

(2) 正接の加法定理により

$$\tan\frac{5}{12}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \boldsymbol{2+\sqrt{3}}$$

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{1}{2}n(n+1)$ より，$S_k = \dfrac{1}{2}k(k+1)$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}(1+3S_n-3S_k) = \sum_{k=1}^{n}(1+3S_n) - 3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)$$
$$= n\left\{1+3\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\right\} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\}$$
$$= \frac{1}{2}n(3n^2+3n+2) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$
$$= \frac{1}{2}n(3n^2+3n+2) - \frac{1}{2}n(n+1)(n+2) = \boldsymbol{n^3}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $$p=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2 \quad \cdots(*)$$

p は 2 でない素数であるから，p は奇数である．$(*)$ より，整数 a，b の一方が奇数で，他方が偶数であるから，整数 m，n を用いて

$$p=(2m+1)^2+(2n)^2=4(m^2+m+n^2)+1$$

よって，p を 4 で割った余りは 1 である．

(2) $z=a+bi$ のとき，$|z|^2=|a|^2+|b|^2$ であるから

$$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi \quad \text{ゆえに} \quad |z^2|^2=|a^2-b^2|^2+|2ab|^2$$

このとき，$|z^2|=|z|^2=a^2+b^2=p$ であるから

$$p^2=|a^2-b^2|^2+|2ab|^2$$

よって，$a\neq b$ のとき，斜辺が p，残りの 2 辺が整数 $|a^2-b^2|$，$|2ab|$ である直角三角形が作れる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{P}(a,\ b)$，$\mathrm{Q}(a+b,\ a)$ を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ に適用すると

$$(a+b,\ a)=k(a,\ b) \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} b=(k-1)a & \cdots① \\ a=kb & \cdots② \end{cases}$$

① を ② に代入すると

$$a=k(k-1)a \quad \text{ゆえに} \quad a(k^2-k-1)=0$$

ここで，$a=0$ と仮定すると，① より　$b=0$

これは，点 $(a,\ b)$ が，原点を中心とする半径 1 の円周上の点であることに反する．よって，次式が成立する．

$$k^2-k-1=0$$

(2) $\mathrm{P}(a,\ b)$ は，原点を中心とする半径 1 の円周上にあるから

$$a^2+b^2=1 \quad \text{これに②を代入すると} \quad (k^2+1)b^2=1$$

したがって　$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}},\ a=\pm\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$　(複号同順)

$k>0$ に注意して，$k^2-k-1=0$ を解くと　$k=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

よって　$\boldsymbol{(s,\ t)=\pm\left(\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}},\ \sqrt{\dfrac{2}{5+\sqrt{5}}}\right)}$

(3) $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，$\mathrm{Q}(a+b,\ a)$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(a+b,\ a)-k(a,\ b)=((1-k)a+b,\ a-kb)\end{aligned}$$

ここで，(1) の結果から　$(1-k)k=-1$　ゆえに　$1-k=-\dfrac{1}{k}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(-\dfrac{1}{k}a+b,\ a-kb\right)=\dfrac{-a+kb}{k}(1,-k)$

$c=\dfrac{-a+kb}{k}$ とおくと，$\mathrm{R}(c,-kc)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(c-kc,\ c)=c(1-k,\ 1)=c\left(-\frac{1}{k},\ 1\right)=-\frac{c}{k}(1,-k)$$

$(a,\ b)\neq(s,\ t)$ であるから，$-a+kb\neq0$ に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=-\frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OR}} \quad (\neq\vec{0})$$

よって，点 S は直線 OR 上にある．また，この直線の方向ベクトルが $(1,-k)$ であるから，直線の方程式は

$$y=-kx \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x}$$

$\boxed{4}$ (1) $f(x)=\log x$ より　$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$y=f(x)$ 上の点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-\log\alpha=\frac{1}{\alpha}(x-\alpha)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{x}{\alpha}+\log\alpha-1}$$

$g(x)=\dfrac{1}{n}\log x$ より　$g'(x)=\dfrac{1}{nx}$

$y=g(x)$ 上の点 $(\beta,\ g(\beta))$ における接線 m の方程式は

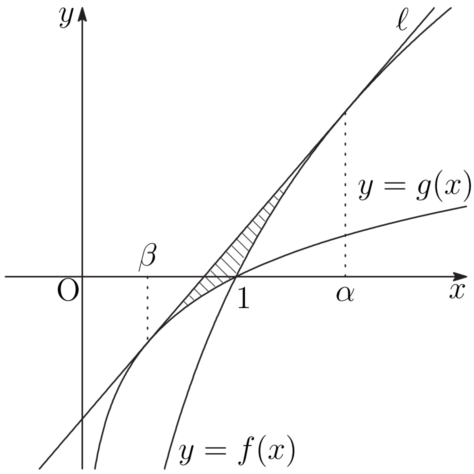
$$y-\frac{1}{n}\log\beta=\frac{1}{n\beta}(x-\beta)\quad \text{すなわち}\quad \boldsymbol{y=\frac{1}{n}\left(\frac{x}{\beta}+\log\beta-1\right)}$$

(2) (1) で求めた接線 ℓ, m が一致するとき

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{n\beta}, \\ \log\alpha-1=\dfrac{1}{n}(\log\beta-1)\end{cases}$$

ゆえに $\begin{cases}\alpha=n\beta & \cdots ① \\ \left(\dfrac{\alpha}{e}\right)^n=\dfrac{\beta}{e} & \cdots ②\end{cases}$

① を ② に代入して　$\left(\dfrac{n\beta}{e}\right)^n=\dfrac{\beta}{e}$



したがって　$\boldsymbol{\beta=\dfrac{e}{n^{\frac{n}{n-1}}}}$　　これを ① に代入して　$\boldsymbol{\alpha=\dfrac{e}{n^{\frac{1}{n-1}}}}$

$\dfrac{\alpha}{e}=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{n-1}}}$, $\ell: y=\dfrac{x}{\alpha}+\log\dfrac{\alpha}{e}$ より，このとき，ℓ の方程式は

$$\boldsymbol{y=\frac{n^{\frac{1}{n-1}}}{e}x-\frac{1}{n-1}\log n}$$

(3) $n=2$ のとき，$\ell: y=\dfrac{2x}{e}-\log 2$, $f(x)=\log x$, $g(x)=\dfrac{1}{2}\log x$, $\beta=\dfrac{e}{4}$,
$\alpha=\dfrac{e}{2}$ である．求める面積は上の図の斜線部分で，その面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{\frac{e}{4}}^{\frac{e}{2}}\left(\frac{2x}{e}-\log 2\right)dx-\int_{\frac{e}{4}}^{1}\frac{1}{2}\log x\,dx-\int_{1}^{\frac{e}{2}}\log x\,dx \\ &=\Big[\,\frac{x^2}{e}-x\log 2\,\Big]_{\frac{e}{4}}^{\frac{e}{2}}-\Big[\,\frac{1}{2}x(\log x-1)\,\Big]_{\frac{e}{4}}^{1}-\Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_{1}^{\frac{e}{2}} \\ &=\boldsymbol{\frac{3}{16}e-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$