平成30年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
中等教育 (数学専攻)　平成30年2月25日

- 数I・II・III・A・B (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $\log_4(x-5)-1 \leqq \log_{16} x$ を満たす実数 x の範囲を求めよ．

(2) $x^2-10x-10$ が整数の平方となるような整数 x をすべて求めよ．

(3) 複素数平面上の単位円に内接する正六角形がある．この6個の頂点に対応する複素数は反時計回りに $1,\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4,\ z_5$ であるとする．実数 t に対して，$z=1+tz_1$ とおくとき，$w=\dfrac{z-z_3}{z_4-z_3}$ が純虚数になるように t の値を定めよ．また，そのときの w の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 四面体OABCがある．辺OAの中点をM，辺BCの中点をNとし，辺OCを $p:1-p\ (0<p<1)$ に内分する点をP，辺ABを $p:1-p$ に内分する点をQとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ および p を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ および p を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および p を用いて表せ．

(4) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は $s\overrightarrow{\mathrm{PM}}+t\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ (s，t は実数) の形に表されることを示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 0から9までの整数が1つずつ書かれた10枚のカードがある．次の問いに答えよ．

(1) 書かれた整数の和が3の倍数になる3枚のカードの組合せの総数を求めよ．

(2) 10枚から4枚を同時に選ぶとき，それら4枚に書かれた整数の和が偶数になる確率を求めよ．

(3) はじめ10枚あるカードの中から，1回に1枚ずつ選び，0が書かれたカードを選ぶまで繰り返す．選んだすべてのカードに書かれた整数の和が10以上になる確率を求めよ．ただし，1回選んだカードは次回以降の選択肢から除くものとする．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a を定数とし，$f(x) = e^{ax} \sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とする．ただし，e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ を求めよ．

(2) $a = \sqrt{3}$ のとき，関数 $y = f(x)$ について第 2 次導関数まで求めて増減を調べ，そのグラフをかけ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\log_4(x-5)-1 \leqq \log_{16} x \quad \cdots(*)$

真数は正であるから

$$x-5>0 \quad かつ \quad x>0 \quad すなわち \quad x>5 \quad \cdots ①$$

$\log_4(x-5)=\log_{16}(x-5)^2$ より，$(*)$ は

$$\log_{16}(x-5)^2 \leqq \log_{16} 16x$$

底 16 は 1 より大きいから

$$(x-5)^2 \leqq 16x \quad 整理すると \quad x^2-26x+25 \leqq 0$$

ゆえに　$(x-1)(x-25) \leqq 0$　すなわち　$1 \leqq x \leqq 25$

求める実数 x の範囲は，① に注意して　$\boldsymbol{5 < x \leqq 25}$

(2) $x^2-10x-10=n^2$ (n は整数) とおくと

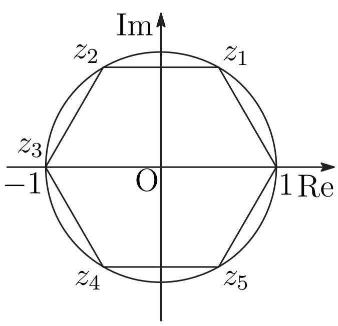
$$(x-5)^2-n^2=35 \quad ゆえに \quad (|x-5|+|n|)(|x-5|-|n|)=35$$

したがって　$\begin{cases} |x-5|+|n|=35 \\ |x-5|-|n|=1 \end{cases}, \quad \begin{cases} |x-5|+|n|=7 \\ |x-5|-|n|=5 \end{cases}$

ゆえに　$\begin{cases} |x-5|=18 \\ |n|=17 \end{cases}, \quad \begin{cases} |x-5|=6 \\ |n|=1 \end{cases}$

よって　$\boldsymbol{x=23,-13,\ 11,-1}$

(3) $z_4-z_3=z_5$，$\dfrac{1}{z_5}=z_1$ であるから

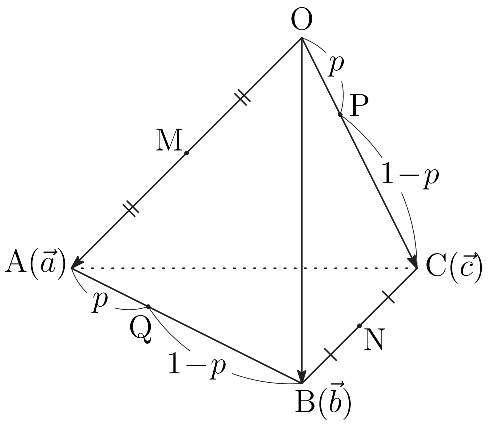


$$\begin{aligned} w &= \frac{z-z_3}{z_4-z_3}=\frac{1+tz_1-z_3}{z_5} \\ &= z_1(1+tz_1-z_3) \\ &= z_1+tz_2-z_4=z_1+tz_2-(-z_1) \\ &= 2z_1+tz_2 \end{aligned}$$

ゆえに　$w=2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+t\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)=1-\dfrac{t}{2}+(t+2)\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

w は，純虚数であるから　$1-\dfrac{t}{2}=0$　すなわち　$\boldsymbol{t=2,\ \ w=2\sqrt{3}i}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{a}-p\vec{c}}$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$$=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})-p\vec{c}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{2}\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-p\right)\vec{c}}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-p)\vec{a}+p\vec{b}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\boldsymbol{(1-p)\vec{a}+p\vec{b}-p\vec{c}}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{PM}}+t\overrightarrow{\mathrm{PN}}$ に (1)〜(3) の結果を代入すると

$$\begin{aligned}(1-p)\vec{a}+p\vec{b}-p\vec{c}&=s\left(\frac{1}{2}\vec{a}-p\vec{c}\right)+t\left\{\frac{1}{2}\vec{b}+\left(\frac{1}{2}-p\right)\vec{c}\right\}\\&=\frac{s}{2}\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{b}+\left(-sp+\frac{t}{2}-pt\right)\vec{c}\end{aligned}$$

$\dfrac{s}{2}=1-p$，$\dfrac{t}{2}=p$，すなわち，$s=2-2p$，$t=2p$ とすると

$$\begin{aligned}-sp+\frac{t}{2}-pt&=-(2-2p)p+\frac{2p}{2}-p\cdot 2p\\&=-2p+2p^2+p-2p^2=-p\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(2-2p)\overrightarrow{\mathrm{PM}}+2p\overrightarrow{\mathrm{PN}}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $A=\{0,\ 3,\ 6,\ 9\}$，$B=\{1,\ 4,\ 7\}$，$C=\{2,\ 5,\ 8\}$ とする．
3 枚のカードの和が 3 の倍数になる組合せは，A から 3 枚，B から 3 枚，C から 3 枚，A, B, C からそれぞれ 1 枚ずつの場合であるから

$${}_4\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_3+{}_3\mathrm{C}_3+{}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1=4+1+1+4\cdot 3\cdot 3=\mathbf{42}\ \textbf{(通り)}$$

(2) $X=\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8\}$，$Y=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$ とする．
4 枚のカードの和が偶数になる組合せは，X から 4 枚，X, Y からそれぞれ 2 枚，Y から 4 枚の場合であるから，その総数は

$${}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_4=5+10\cdot 10+5=110\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は　　$\dfrac{110}{{}_{10}\mathrm{C}_4}=\dfrac{110}{210}=\boldsymbol{\dfrac{11}{21}}$

(3) 0が書かれたカードを選ぶまでに，選んだすべてのカードに書かれた整数の和が10未満である確率をまず求める．

(i) 1回目に0が出るとき　その確率は　$\dfrac{1}{10}$

(ii) 2回目に0が出るとき　その確率は　$\dfrac{9}{10}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{10}$

(iii) 3回目に0が出るとき
2回目までに目の和が10未満である組合せは，次の16通り．

目の和が3である組合せは　$\{1,\ 2\}$
目の和が4である組合せは　$\{1,\ 3\}$
目の和が5である組合せは　$\{1,\ 4\},\ \{2,\ 3\}$
目の和が6である組合せは　$\{1,\ 5\},\ \{2,\ 4\}$
目の和が7である組合せは　$\{1,\ 6\},\ \{2,\ 5\},\ \{3,\ 4\}$
目の和が8である組合せは　$\{1,\ 7\},\ \{2,\ 6\},\ \{3,\ 5\}$
目の和が9である組合せは　$\{1,\ 8\},\ \{2,\ 7\},\ \{3,\ 6\},\ \{4,\ 5\}$

その確率は　$\dfrac{16\cdot 2!}{10\cdot 9}\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{2}{45}$

(iv) 4回目に0が出るとき
3回目までに目の和が10未満である組合せは，次の7通り．

目の和が6である組合せは　$\{1,\ 2,\ 3\}$
目の和が7である組合せは　$\{1,\ 2,\ 4\}$
目の和が8である組合せは　$\{1,\ 2,\ 5\},\ \{1,\ 3,\ 4\}$
目の和が9である組合せは　$\{1,\ 2,\ 6\},\ \{1,\ 3\ ,5\},\ \{2,\ 3,\ 4\}$

その確率は　$\dfrac{7\cdot 3!}{10\cdot 9\cdot 8}\cdot\dfrac{1}{7}=\dfrac{1}{120}$

(v) 5回目以降に0が出るとき，4回目までの目は10以上である．

(i)〜(v)より，0が書かれたカードが選ぶまでに，書かれた整数の和が10未満である確率は

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{2}{45}+\frac{1}{120}=\frac{91}{360}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$1-\frac{91}{360}=\boldsymbol{\frac{269}{360}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1)

$$(e^{ax}\sin x)' = e^{ax}(a\sin x + \cos x) \qquad \cdots ①$$
$$(e^{ax}\cos x)' = e^{ax}(-\sin x + a\cos x) \quad \cdots ②$$

① $\times\, a -$ ② より

$$(ae^{ax}\sin x - e^{ax}\cos x)' = (a^2+1)e^{ax}\sin x$$

ゆえに $\displaystyle\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{1}{a^2+1}e^{ax}(a\sin x - \cos x) + C$ （C は積分定数）

よって $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{a^2+1}\Big[\,e^{ax}(a\sin x - \cos x)\,\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{e^{a\pi}+1}{a^2+1}}$

(2) ① より，$a=\sqrt{3}$ のとき

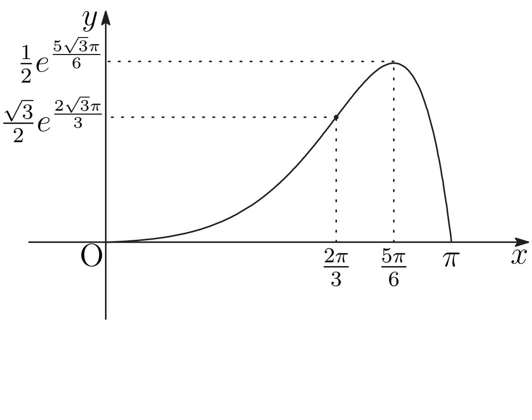
$$f'(x) = e^{\sqrt{3}x}(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 2e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right),$$
$$f''(x) = 2e^{\sqrt{3}x}\left\{\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right\}$$
$$= 4e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

増減および凹凸は次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5\pi}{6}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	0	↗	変曲点	↗	極大	↘	0

よって 極大値 $f\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{5\sqrt{3}\pi}{6}}$ 変曲点 $\left(\dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{2\sqrt{3}\pi}{3}}\right)$

グラフの概形は，次のようになる．



補足 $z=a+bi$，$r=|z|$，$\theta=\arg z$ とすると[1]

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\{e^{ax}\cos bx\}= re^{ax}\cos(bx+\theta)},$$
$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}\{e^{ax}\sin bx\}= re^{ax}\sin(bx+\theta)}$$

さらに，次式が成立する．

$$\boldsymbol{\frac{d^n}{dx^n}\{e^{ax}\cos bx\}= r^n e^{ax}\cos(bx+n\theta)},$$
$$\boldsymbol{\frac{d^n}{dx^n}\{e^{ax}\sin bx\}= r^n e^{ax}\sin(bx+n\theta)}$$

逆に次の積分を得る．

$$\boldsymbol{\int e^{ax}\cos bx\,dx= \frac{1}{r}e^{ax}\cos(bx-\theta)+C},$$
$$\boldsymbol{\int e^{ax}\sin bx\,dx= \frac{1}{r}e^{ax}\sin(bx-\theta)+C}$$

本題では，$f(x)=e^{\sqrt{3}x}\sin x$ であるから，$z=\sqrt{3}+i$ とすると

$$r=|z|=2,\quad \theta=\arg z=\frac{\pi}{6}$$

したがって

$$f'(x)=2e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right),$$
$$f''(x)=2^2e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=4e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

また，$f(x)=e^{\sqrt{3}x}\sin x$ の不定積分は次のようになる．

$$\int f(x)\,dx=\frac{1}{2}e^{\sqrt{3}x}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+C$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/kyusuu/kyukou/kyukou_2018_kouki.pdf $\boxed{2}$ を参照．