平成29年度　福岡教育大学２次試験後期日程(数学問題)
教育学部中等教育(数学専攻)　平成29年3月12日

- 数I・II・III・A・B (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 三角形ABCにおいて $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\alpha$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\beta$ とする．辺ABの長さを α と β を用いて表せ．

(2) $(z+i)^2=8i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

(3) m，n が自然数のとき，定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $2x^2+2y^2-6x-6y+\dfrac{9}{2}\leqq 0$ が表す領域を図示せよ．

(2) 不等式 $|x|+|y|\leqq 2$ が表す領域を図示せよ．

(3) $a>0$ とし，次の条件 p，q を考える．

p: 実数の組 $(x,\ y)$ が $2x^2+2y^2-6x-6y>a^2-9$ を満たす

q: 実数の組 $(x,\ y)$ が $|x|+|y|>2a$ を満たす

このとき，p が q であるための必要条件になる a の範囲を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $c\neq 1$ とする．数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=ca_n+\sum_{k=0}^{n}c^k\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

を満たす．次の問いに答えよ．

(1) a_2，a_3 を求めよ．

(2) n を自然数とする．数学的帰納法を用いて

$$a_{n+1}-a_n=(n+1)c^n$$

が成立することを示せ．

(3) a_n を c と n を用いて表せ．

$\boxed{4}$ 曲線 $y = 8^x$ 上の点 P をとり，その x 座標を t $(-1 < t < 0)$ とする．原点 O を通り，線分 OP と垂直な直線を ℓ とする．点 Q$(0,\ 1)$ から ℓ に下ろした垂線と ℓ との交点を R とする．次の問いに答えよ．

(1) 点 R の座標を t を用いて表せ．

(2) $\mathrm{OP}^2 - \mathrm{QR}^2$ を t を用いて表せ．

(3) $\mathrm{OP} = \mathrm{QR}$ となる t が $-\dfrac{1}{2} < t < -\dfrac{1}{3}$ の範囲にあることを示せ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$
$= \overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \alpha + \beta$

よって　　$\mathbf{AB} = \boldsymbol{\sqrt{\alpha+\beta}}$

(2)　　　$(z+i)^2 = 8i \quad \cdots (*)$

$$8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \left\{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 = \{2(1+i)\}^2$$

$(*)$ より　$(z+i)^2 = \{2(1+i)\}^2$　ゆえに　$z+i = \pm 2(1+i)$

よって　　$\boldsymbol{z = 2+i,\ \ -2-3i}$

(3) $\cos mx \cos nx = \dfrac{1}{2}\{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}$ より

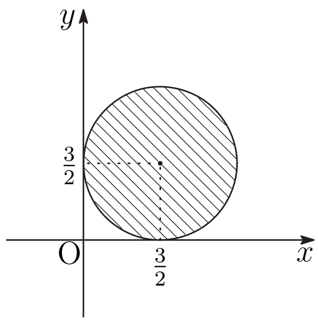
$m \neq n$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\}\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\ \frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\ \right]_0^{2\pi} = \mathbf{0}\end{aligned}$$

$m = n$ のとき

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos 2mx + 1)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\ \frac{\sin 2mx}{2m} + x\ \right]_0^{2\pi} = \boldsymbol{\pi}\end{aligned}$$

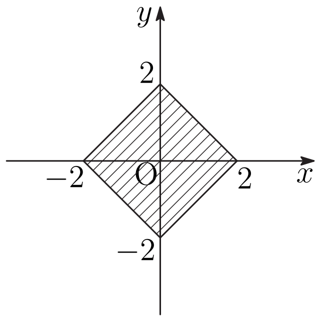
$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $2x^2+2y^2-6x-6y+\dfrac{9}{2} \leqq 0$ より



$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2 \leqq \frac{9}{4}$$

不等式の表す領域は，右の図の斜線部分で，
中心 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$，半径 $\dfrac{3}{2}$ の円の内部と円周.

(2) $|x|+|y| \leqq 2$ より　　$|y| \leqq 2-|x|$　$\cdots$①



$|y| \geqq 0$ より　$2-|x| \geqq 0$

すなわち　　$-2 \leqq x \leqq 2$　$\cdots$②

①，② より

$$|x|-2 \leqq y \leqq 2-|x| \quad (-2 \leqq x \leqq 2)$$

不等式の表す領域は，右の図の斜線部分.
ただし，境界線を含む.

(3) p が q であるための必要条件であるとき，$q \Rightarrow p$ であるから，$\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ となる a の範囲を求める.

$\overline{p}$：実数の組 $(x,\ y)$ が $2x^2+2y^2-6x-6y \leqq a^2-9$，すなわち，
$\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2 \leqq \dfrac{a^2}{2}$ を満たす

$\overline{q}$：実数の組 $(x,\ y)$ が $|x|+|y| \leqq 2a$ を満たす

このとき，$\overline{p}$ の点 $\left(\dfrac{a+3}{2},\ \dfrac{a+3}{2}\right)$ が $\overline{q}$ を満たせばよい．$a>0$ であるから

$$\left|\frac{a+3}{2}\right|+\left|\frac{a+3}{2}\right| \leqq 2a \quad \text{ゆえに} \quad a+3 \leqq 2a \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a \geqq 3}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $a_1=1$，$a_{n+1}=ca_n+\sum_{k=0}^{n}c^k \quad (n=1,2,3,\cdots)$

$$a_2=ca_1+1+c=c\cdot1+1+c=\mathbf{1+2c},$$
$$a_3=ca_2+1+c+c^2=c(1+2c)+1+c+c^2=\mathbf{1+2c+3c^2}$$

(2) $$a_{n+1}-a_n=(n+1)c^n \quad \cdots(*)$$

［1］$n=1$ のとき，$a_2-a_1=(1+2c)-1=2c$ より，$(*)$ は成立する．

［2］$n=j$ のとき，$(*)$ が成立する，すなわち

$$a_{j+1}-a_j=(j+1)c^j$$

であると仮定すると，与えらえた漸化式から

$$\begin{aligned}a_{j+2}-a_{j+1}&=ca_{j+1}+\sum_{k=0}^{j+1}c^k-\left(ca_j+\sum_{k=0}^{j}c^k\right)\\&=c(a_{j+1}-a_j)+c^{j+1}\\&=c\cdot(j+1)c^j+c^{j+1}=(j+2)c^{j+1}\end{aligned}$$

よって，$n=j+1$ のときも $(*)$ が成立する．

［1］，［2］から，すべての自然数 n について，$(*)$ は成立する．

(3) $(n+1)c^{n+1}-nc^n=\{(c-1)n+c\}c^n=(c-1)(n+1)c^n+c^n$ より

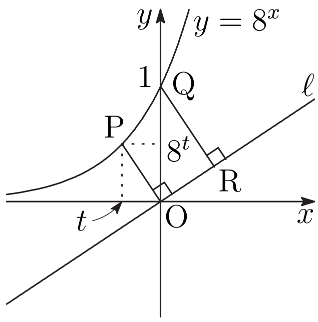
$$(n+1)c^n=\frac{(n+1)c^{n+1}-nc^n}{c-1}-\frac{c^n}{c-1}$$

(2) の結果により，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)&=\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{(k+1)c^{k+1}-kc^k}{c-1}-\frac{c^k}{c-1}\right\}\\a_n-1&=\frac{nc^n-c}{c-1}-\frac{c(c^{n-1}-1)}{(c-1)^2}\\a_n&=\frac{(c-1)(nc^n-c)-c(c^{n-1}-1)+(c-1)^2}{(c-1)^2}\\&=\frac{\{(c-1)n-1\}c^n+1}{(c-1)^2}\end{aligned}$$

これは，$n=1$ のときも成立するから $\quad \boldsymbol{a_n=\dfrac{\{(c-1)n-1\}c^n+1}{(c-1)^2}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 曲線 $y=8^x$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ 8^t)$ に対して，原点 O を通り，線分 OP に垂直な直線 ℓ は



$$tx+8^ty=0$$

また，点 $\mathrm{Q}(0,\ 1)$ を通り，ℓ に垂直な直線は

$$8^tx-ty+t=0$$

上式および ℓ の方程式を解くと　$\mathbf{R}\left(-\dfrac{\boldsymbol{t\cdot 8^t}}{\boldsymbol{t^2+8^{2t}}},\ \dfrac{\boldsymbol{t^2}}{\boldsymbol{t^2+8^{2t}}}\right)$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}\mathrm{OP}^2-\mathrm{QR}^2&=t^2+8^{2t}-\left\{\left(-\frac{t\cdot 8^t}{t^2+8^{2t}}\right)^2+\left(\frac{t^2}{t^2+8^{2t}}-1\right)^2\right\}\\&=t^2+8^{2t}-\frac{8^{2t}}{t^2+8^{2t}}=\boldsymbol{t^2+2^{6t}-\frac{2^{6t}}{t^2+2^{6t}}}\end{aligned}$$

(3) $f(t)=t^2+2^{6t}-\dfrac{2^{6t}}{t^2+2^{6t}}$ とおくと，$f(t)$ は $-\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq -\dfrac{1}{3}$ で連続で

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{1}{24}>0,\\f\left(-\frac{1}{3}\right)&=\frac{1}{9}+\frac{1}{4}-\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}}=-\frac{155}{468}<0\end{aligned}$$

中間値の定理により

$$f(c)=0\quad\left(-\frac{1}{2}<c<-\frac{1}{3}\right)$$

を満たす c が存在する．このとき，$\mathrm{OP}^2-\mathrm{QR}^2=0$，すなわち，$\mathrm{OP}=\mathrm{QR}$.