

平成29年度 福岡教育大学2次試験前期日程(数学問題)
中等教育(数学専攻) 平成29年2月25日

問題 1 2 3 4

1 次の問いに答えよ.

- (1) 実数 x, y は $\log_2 x + \log_2 y = 2$ を満たす.
 (ア) $t = x + y$ とおく. $x^2 + y^2$ を t を用いて表せ.
 (イ) $x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y + 11$ の最小値とそのときの x と y の値を求めよ.
- (2) $23x + 13y = 5$ を満たす整数 x, y の組で $|x| + |y|$ が最小になるものを求めよ.
- (3) 3個のサイコロを同時に1回投げる.
 (ア) 出る目の積が偶数である確率を求めよ.
 (イ) 出る目の積が偶数であるとき, その出る目の和が5の倍数である確率を求めよ.

2 a を定数とし, 曲線 $y = \frac{1}{2}x^2$ を C , 直線 $y = a(x + 1)$ を l とする. C と l が異なる2点で交わっているとき, 次の問いに答えよ.

- (1) a のとり得る値の範囲を求めよ.
 (2) C と l の2つの交点の x 座標を α, β とするとき $\alpha + \beta, \alpha\beta$ をそれぞれ a を用いて表せ.
 (3) C と l の2つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を求めよ.

3 $P(x)$ を整式とし, 整式 $Q(x)$ を $Q(x) = \int_1^x P(t) dt$ で定める. $P(x)$ を $x - 1$ で割ったときの余りは2であった. 次の問いに答えよ.

- (1) $Q'(1)$ の値を求めよ.
 (2) $Q(x)$ を $(x - 1)^2$ で割ったときの余りを求めよ.
 (3) $Q(x)$ を $x - 2$ で割ったときの余りは3であった. $Q(x)$ を $(x - 1)^2(x - 2)$ で割ったときの余りを求めよ.

4 a, b を正の定数とし, $f(x) = -xe^{-\frac{x}{a}}$ とする. $y = f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動し, さらに x 軸方向に $-a$ だけ平行移動して得られる曲線を $y = g(x)$ とし, $h(x) = bg(x)$ とする. また, 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を P とし, 点 P における曲線 $y = f(x)$ の接線を l とする. 関数 $h(x)$ の最大値が 1 であるとき, 次の問いに答えよ. ただし, e は自然対数の底とする.

- (1) 直線 l の方程式を a を用いて表せ.
- (2) 関数 $g(x)$ を a を用いて表せ.
- (3) 定数 a, b の積 ab の値を求めよ.
- (4) 直線 l と x 軸との交点の x 座標が 4 であるとき, 曲線 $y = f(x), y = h(x)$ と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ.

解答例

1 (1)(ア) $\log_2 x + \log_2 y = 2$ より, $\log_2 xy = 2$ ゆえに $xy = 4$

$$\text{よって } x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = t^2 - 8$$

(イ) $\log_2 x + \log_2 y = 2$ の真数は正であるから $x, y > 0$

相加平均・相乗平均の関係により

$$t = x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{4} = 4 \quad (\text{等号は } x = y = 2 \text{ のとき})$$

したがって

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y + 11 &= (t^2 - 8) + 4 - 6(x + y) + 11 \\ &= t^2 - 6t + 7 = (t - 3)^2 - 2 \end{aligned}$$

$t \geq 4$ より, $t = 4$, すなわち, $x = y = 2$ のとき, 最小値 -1

(2) $23 \equiv 10, 13 \equiv 0 \pmod{13}$ であるから, $23x + 13y = 5$ より

$$10x \equiv 5 \pmod{13} \quad \text{ゆえに } 2x \equiv 1 \pmod{13} \quad \text{すなわち } x \equiv 7 \pmod{13}$$

$$\text{したがって } 23(x - 7) + 13(y + 12) = 0$$

$$\text{整数 } k \text{ を用いて } x = 7 + 13k, y = -12 - 23k$$

$k \geq 0$ のとき, $|x| = x = 7 + 13k, |y| = -y = 12 + 23k$ であるから

$$|x| + |y| = 19 + 36k$$

$k < 0$ のとき, $|x| = -x = -7 - 13k, |y| = y = -12 - 23k$ であるから

$$|x| + |y| = -19 - 36k$$

$k = -1$ で, $|x| + |y|$ は最小となり, このとき $x = -6, y = 11$

注意 $10x \equiv 5 \pmod{13}$ の両辺を 5 で割ることができるのは, 5 が 13 と互いに素であるから, $2x \equiv 1 \pmod{13}$ とすることができる.

$$10x \equiv 5 \iff 5(2x - 1) \equiv 0 \iff 2x \equiv 1 \pmod{13}$$

最後の式の両辺に 7 を掛けることにより (整数の掛け算には制約はない)

$$14x \equiv 7 \pmod{13} \quad \text{すなわち } x \equiv 7 \pmod{13}$$

なお, $10x \equiv 5 \pmod{13}$ の両辺に 4 を掛けても

$$40x \equiv 20 \pmod{13} \quad \text{すなわち } x \equiv 7 \pmod{13}$$

- (3)(ア) 出る目の積が奇数である確率は、3個のサイコロの目がすべて奇数であるから

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

出る目の積が偶数である事象を A とすると、求める確率は、この余事象の確率であるから

$$P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

- (イ) 目の和が5の倍数である事象を B とすると、 $A \cap B$ は、次の (i), (ii) の事象がある.

- (i) すべての目が異なる

$$\{1, 3, 6\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{4, 5, 6\}$$

- (ii) 同じ目が2つある

$$\{1, 2, 2\}, \{2, 2, 6\}, \{2, 4, 4\}, \{3, 3, 4\}, \{3, 6, 6\}$$

$$\text{したがって } P(A \cap B) = \frac{4 \cdot 3! + 5 \cdot {}_3C_2}{6^3} = \frac{13}{72}$$

$$\text{よって、求める確率は } P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{13}{72} \cdot \frac{8}{7} = \frac{13}{63}$$

- 2** (1) $y = \frac{1}{2}x^2$ と $y = a(x+1)$ から y を消去して整理すると

$$x^2 - 2ax - 2a = 0 \quad \cdots (*)$$

上の方程式は異なる2つの実数解をもつから、係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 1 \cdot (-2a) = a(a+2) > 0$$

よって $a < -2, 0 < a$

- (2) 方程式(*)の解が α, β であるから、解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = -2a$$

- (3) C と ℓ の2つの交点 $(\alpha, a(\alpha+1)), (\beta, a(\beta+1))$ の中点は、(2)の結果により

$$\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{a(\alpha + \beta)}{2} + a\right) \quad \text{すなわち } (a, a^2 + a)$$

a の値の範囲に注意して $y = x^2 + x \quad (x < -2, 0 < x)$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad Q(x) = \int_1^x P(t) dt \quad \dots (*)$$

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 2 であるから, 剰余の定理により $P(1) = 2$

(*) を微分すると $Q'(x) = P(x)$ よって $Q'(1) = P(1) = 2$

$$(2) \quad (*) \text{ より } Q(1) = 0$$

$Q(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $R(x)$, 余りを $ax+b$ とおくと

$$Q(x) = (x-1)^2 R(x) + ax + b$$

微分すると $Q'(x) = 2(x-1)R(x) + (x-1)^2 R'(x) + a$

上の 2 式に $x=1$ を代入すると, $Q(1) = 0$, $Q'(1) = 2$ により

$$a + b = 0, \quad a = 2 \quad \text{これから} \quad b = -2$$

よって, 求める余りは $2x - 2$

$$(3) \quad (2) \text{ の結果から } Q(x) = (x-1)^2 R(x) + 2x - 2$$

$R(x)$ を $x-2$ で割ったときの商を $S(x)$, 余りを c とすると

$$R(x) = (x-2)S(x) + c$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad Q(x) &= (x-1)^2 \{(x-2)S(x) + c\} + 2x - 2 \\ &= (x-1)^2 (x-2)S(x) + c(x-1)^2 + 2x - 2 \end{aligned}$$

$Q(x)$ を $x-2$ で割った余りが 3 であるから, 剰余の定理により $Q(2) = 3$

$$\text{したがって} \quad c + 2 = 3 \quad \text{すなわち} \quad c = 1$$

$$\begin{aligned} \text{ゆえに} \quad Q(x) &= (x-1)^2 (x-2)S(x) + (x-1)^2 + 2x - 2 \\ &= (x-1)^2 (x-2)S(x) + x^2 - 1 \end{aligned}$$

よって, 求める余りは $x^2 - 1$

別解1 $Q(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $S(x)$, 余りを $px^2 + qx + r$ とすると

$$Q(x) = (x-1)^2(x-2)S(x) + px^2 + qx + r$$

$$Q(2) = 3 \text{ より } 4p + 2q + r = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$Q(x)$ を変形すると

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-1)^2(x-2)S(x) + p(x-1)^2 + (2p+q)x - p + r \\ &= (x-1)^2\{2(x-2)S(x) + p\} + (2p+q)x - p + r \end{aligned}$$

$Q(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $2x-2$ であるから, 係数を比較して

$$2p + q = 2, \quad -p + r = -2 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $p = 1, q = 0, r = -1$ よって, 求める余りは $x^2 - 1$

別解2 $Q(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $S(x)$, 余りを $px^2 + qx + r$ とすると

$$Q(x) = (x-1)^2(x-2)S(x) + px^2 + qx + r,$$

$$Q'(x) = 2(x-1)\{(x-2)S(x)\} + (x-1)^2\{(x-2)S(x)\}' + 2px + q$$

上の第1式に $x = 1, 2$, 第2式に $x = 1$ を代入すると, $Q(1) = 0, Q(2) = 3, Q'(1) = 2$ により

$$p + q + r = 0, \quad 4p + 2q + r = 3, \quad 2p + q = 2$$

これを解いて $p = 1, q = 0, r = -1$ よって, 求める余りは $x^2 - 1$ ■

4 (1) $f(x) = -xe^{-\frac{x}{a}}$ より

$$f'(x) = \left(\frac{x}{a} - 1\right)e^{-\frac{x}{a}}, \quad f''(x) = \left(\frac{2}{a} - \frac{x}{a^2}\right)e^{-\frac{x}{a}}$$

$x < 2a$ のとき $f''(x) > 0$, $2a < x$ のとき $f''(x) < 0$ であるから, $y = f(x)$ の上の点 $(2a, f(2a))$ は, この曲線の変曲点である. ゆえに

$$f(2a) = -2ae^{-2}, \quad f'(2a) = e^{-2}$$

したがって, ℓ の方程式は

$$y + 2ae^{-2} = e^{-2}(x - 2a) \quad \text{ゆえに} \quad \mathbf{y = e^{-2}(x - 4a)}$$

注意 $f'(a) = 0$ は $f(a)$ が極値であるための必要条件であるように, $f''(2a) = 0$ は点 $(2a, f(2a))$ が変曲点であるための必要条件である. 変曲点を示すには, $x = 2a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化することを示さなければならない. 増減表で示してもよい.

$$(2) g(x) = -f(x+a) = (x+a)e^{-\frac{x+a}{a}}$$

(3) (1) の計算結果から

$$g'(x) = -f'(x+a) = -\left(\frac{x+a}{a} - 1\right)e^{-\frac{x+a}{a}} = -\frac{x}{a}e^{-\frac{x+a}{a}}$$

x	...	0	...
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	↗	ae^{-1}	↘

$b > 0$ より, $h(x) = bg(x)$ の最大値 abe^{-1} が 1 であるから $ab = e$

(4) (1) の結果から, ℓ と x 軸との交点の x 座標 $4a$ が 4 であるから $a = 1$

これを (3) の結果に代入して $b = e$

ゆえに $f(x) = -xe^{-x}$, $h(x) = e(x+1)e^{-x-1} = (x+1)e^{-x}$

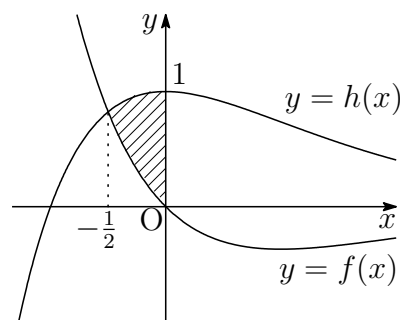
$$h(x) - f(x) = (2x+1)e^{-x}$$

したがって, $y = f(x)$ と $y = h(x)$ の交点の x 座標は

$$x = -\frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ において

$$h(x) - f(x) \geq 0$$



求める面積を S とすると

$$S = \int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x+1)e^{-x} dx = \left[-(2x+3)e^{-x} \right]_{-\frac{1}{2}}^0 = 2\sqrt{e} - 3$$

■