平成 29 年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
中等教育 (数学専攻)　平成 29 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) 実数 x，y は $\log_2 x + \log_2 y = 2$ を満たす．

(ア) $t = x + y$ とおく．$x^2 + y^2$ を t を用いて表せ．

(イ) $x^2+y^2+xy-6x-6y+11$ の最小値とそのときの x と y の値を求めよ．

(2) $23x + 13y = 5$ を満たす整数 x，y の組で $|x| + |y|$ が最小になるものを求めよ．

(3) 3 個のサイコロを同時に 1 回投げる．

(ア) 出る目の積が偶数である確率を求めよ．

(イ) 出る目の積が偶数であるとき，その出る目の和が 5 の倍数である確率を求めよ．

2 a を定数とし，曲線 $y = \dfrac{1}{2}x^2$ を C，直線 $y = a(x+1)$ を ℓ とする．C と ℓ が異なる 2 点で交わっているとき，次の問いに答えよ．

(1) a のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) C と ℓ の 2 つの交点の x 座標を α，β とするとき $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ をそれぞれ a を用いて表せ．

(3) C と ℓ の 2 つの交点を結ぶ線分の中点の軌跡を求めよ．

3 $P(x)$ を整式とし，整式 $Q(x)$ を $Q(x) = \displaystyle\int_1^x P(t)\,dt$ で定める．$P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りは 2 であった．次の問いに答えよ．

(1) $Q'(1)$ の値を求めよ．

(2) $Q(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りを求めよ．

(3) $Q(x)$ を $x-2$ で割ったときの余りは 3 であった．$Q(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの余りを求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ a，b を正の定数とし，$f(x)=-xe^{-\frac{x}{a}}$ とする．$y=f(x)$ のグラフを x 軸に関して対称移動し，さらに x 軸方向に $-a$ だけ平行移動して得られる曲線を $y=g(x)$ とし，$h(x)=bg(x)$ とする．また，曲線 $y=f(x)$ の変曲点を P とし，点 P における曲線 $y=f(x)$ の接線を ℓ とする．関数 $h(x)$ の最大値が 1 であるとき，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 直線 ℓ の方程式を a を用いて表せ．

(2) 関数 $g(x)$ を a を用いて表せ．

(3) 定数 a，b の積 ab の値を求めよ．

(4) 直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標が 4 であるとき，曲線 $y=f(x)$，$y=h(x)$ と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)(ア) $\log_2 x + \log_2 y = 2$ より，$\log_2 xy = 2$　ゆえに　$xy = 4$

よって　　$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = \boldsymbol{t^2 - 8}$

(イ) $\log_2 x + \log_2 y = 2$ の真数は正であるから　$x,\ y > 0$

相加平均・相乗平均の関係により

$$t = x + y \geqq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{4} = 4 \quad (\text{等号は } x = y = 2 \text{ のとき})$$

したがって

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + xy - 6x - 6y + 11 &= (t^2 - 8) + 4 - 6(x+y) + 11 \\ &= t^2 - 6t + 7 = (t-3)^2 - 2 \end{aligned}$$

$t \geqq 4$ より，$t = 4$，すなわち，$\boldsymbol{x = y = 2}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-1}$

(2) $23 \equiv 10,\ 13 \equiv 0 \pmod{13}$ であるから，$23x + 13y = 5$ より

$$10x \equiv 5 \quad \text{ゆえに} \quad 2x \equiv 1 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv 7 \pmod{13}$$

したがって　　$23(x-7) + 13(y+12) = 0$

整数 k を用いて　　$x = 7 + 13k$，$y = -12 - 23k$

$k \geqq 0$ のとき，$|x| = x = 7 + 13k$，$|y| = -y = 12 + 23k$ であるから

$$|x| + |y| = 19 + 36k$$

$k < 0$ のとき，$|x| = -x = -7 - 13k$，$|y| = y = -12 - 23k$ であるから

$$|x| + |y| = -19 - 36k$$

$k = -1$ で，$|x| + |y|$ は最小となり，このとき　$\boldsymbol{x = -6}$，$\boldsymbol{y = 11}$

注意 $10x \equiv 5 \pmod{13}$ の両辺を 5 で割ることができるのは，5 が 13 と互いに素であるから，$2x \equiv 1 \pmod{13}$ とすることができる．

$$10x \equiv 5 \iff 5(2x-1) \equiv 0 \iff 2x \equiv 1 \pmod{13}$$

最後の式の両辺に 7 を掛けることにより (整数の掛け算には制約はない)

$$14x \equiv 7 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv 7 \pmod{13}$$

なお，$10x \equiv 5 \pmod{13}$ の両辺に 4 を掛けても

$$40x \equiv 20 \quad \text{すなわち} \quad x \equiv 7 \pmod{13}$$

(3) (ア) 出る目の積が奇数である確率は，3 個のサイコロの目がすべて奇数であるから

$$\left(\frac{3}{6}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

出る目の積が偶数である事象を A とすると，求める確率は，この余事象の確率であるから

$$P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{7}{8}}$$

(イ) 目の和が 5 の倍数である事象を B とすると，$A \cap B$ は，次の (i)，(ii) の事象がある．

(i) すべての目が異なる

$$\{1, 3, 6\},\ \{1, 4, 5\},\ \{2, 3, 5\},\ \{4, 5, 6\}$$

(ii) 同じ目が 2 つある

$$\{1, 2, 2\},\ \{2, 2, 6\},\ \{2, 4, 4\},\ \{3, 3, 4\},\ \{3, 6, 6\}$$

したがって　$P(A \cap B) = \dfrac{4 \cdot 3! + 5 \cdot {}_3\mathrm{C}_2}{6^3} = \dfrac{13}{72}$

よって，求める確率は　$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{13}{72} \cdot \dfrac{8}{7} = \mathbf{\dfrac{13}{63}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $y = \dfrac{1}{2}x^2$ と $y = a(x+1)$ から y を消去して整理すると

$$x^2 - 2ax - 2a = 0 \quad \cdots (*)$$

上の方程式は異なる 2 つの実数解をもつから，係数について

$$D/4 = (-a)^2 - 1 \cdot (-2a) = a(a+2) > 0$$

よって　　$\boldsymbol{a < -2,\ 0 < a}$

(2) 方程式 $(*)$ の解が α，β であるから，解と係数の関係により

$$\boldsymbol{\alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = -2a}$$

(3) C と ℓ の 2 つの交点 $(\alpha,\ a(\alpha+1))$，$(\beta,\ a(\beta+1))$ の中点は，(2) の結果により

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{a(\alpha+\beta)}{2} + a\right) \quad \text{すなわち} \quad (a,\ a^2 + a)$$

a の値の範囲に注意して　　$\boldsymbol{y = x^2 + x\ (x < -2,\ 0 < x)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)
$$Q(x)=\int_1^x P(t)\,dt \quad \cdots(*)$$

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 2 であるから，剰余の定理により　$P(1)=2$

$(*)$ を微分すると　$Q'(x)=P(x)$　よって　$Q'(1)=P(1)=\mathbf{2}$

(2) $(*)$ より　$Q(1)=0$

$Q(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商を $R(x)$，余りを $ax+b$ とおくと
$$Q(x)=(x-1)^2R(x)+ax+b$$
微分すると　$Q'(x)=2(x-1)R(x)+(x-1)^2R'(x)+a$

上の 2 式に $x=1$ を代入すると，$Q(1)=0$，$Q'(1)=2$ により
$$a+b=0,\quad a=2 \quad \text{これから} \quad b=-2$$
よって，求める余りは　$\mathbf{2x-2}$

(3) (2) の結果から　$Q(x)=(x-1)^2R(x)+2x-2$

$R(x)$ を $x-2$ で割ったときの商を $S(x)$，余りを c とすると
$$R(x)=(x-2)S(x)+c$$
したがって
$$\begin{aligned}Q(x)&=(x-1)^2\{(x-2)S(x)+c\}+2x-2\\&=(x-1)^2(x-2)S(x)+c(x-1)^2+2x-2\end{aligned}$$

$Q(x)$ を $x-2$ で割った余りが 3 であるから，剰余の定理により　$Q(2)=3$

したがって　$c+2=3$　すなわち　$c=1$

ゆえに
$$\begin{aligned}Q(x)&=(x-1)^2(x-2)S(x)+(x-1)^2+2x-2\\&=(x-1)^2(x-2)S(x)+x^2-1\end{aligned}$$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{x^2-1}$

別解 1 $Q(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $S(x)$，余りを px^2+qx+r とすると

$$Q(x)=(x-1)^2(x-2)S(x)+px^2+qx+r$$

$Q(2)=3$ より　　$4p+2q+r=3 \quad \cdots ①$

$Q(x)$ を変形すると

$$\begin{aligned}Q(x)&=(x-1)^2(x-2)S(x)+p(x-1)^2+(2p+q)x-p+r\\&=(x-1)^2\{2(x-2)S(x)+p\}+(2p+q)x-p+r\end{aligned}$$

$Q(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $2x-2$ であるから，係数を比較して

$$2p+q=2, \quad -p+r=-2 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$p=1$，$q=0$，$r=-1$　よって，求める余りは　x^2-1

別解 2 $Q(x)$ を $(x-1)^2(x-2)$ で割ったときの商を $S(x)$，余りを px^2+qx+r とすると

$$\begin{aligned}Q(x)&=(x-1)^2(x-2)S(x)+px^2+qx+r,\\Q'(x)&=2(x-1)\{(x-2)S(x)\}+(x-1)^2\{(x-2)S(x)\}'+2px+q\end{aligned}$$

上の第 1 式に $x=1,\ 2$，第 2 式に $x=1$ を代入すると，$Q(1)=0$，$Q(2)=3$，$Q'(1)=2$ により

$$p+q+r=0, \quad 4p+2q+r=3, \quad 2p+q=2$$

これを解いて　$p=1$，$q=0$，$r=-1$　よって，求める余りは　x^2-1

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=-xe^{-\frac{x}{a}}$ より

$$f'(x)=\left(\frac{x}{a}-1\right)e^{-\frac{x}{a}}, \quad f''(x)=\left(\frac{2}{a}-\frac{x}{a^2}\right)e^{-\frac{x}{a}}$$

$x<2a$ のとき $f''(x)>0$，$2a<x$ のとき $f''(x)<0$ であるから，$y=f(x)$ の上の点 $(2a,\ f(2a))$ は，この曲線の変曲点である．ゆえに

$$f(2a)=-2ae^{-2}, \quad f'(2a)=e^{-2}$$

したがって，ℓ の方程式は

$$y+2ae^{-2}=e^{-2}(x-2a) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y=e^{-2}(x-4a)}$$

注意 $f'(a)=0$ は $f(a)$ が極値であるための必要条件であるように，$f''(2a)=0$ は点 $(2a,\ f(2a))$ が変曲点であるための必要条件である．変曲点を示すには，$x=2a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化することを示さなければならない．増減表で示してもよい．

(2) $g(x)=-f(x+a)=\boldsymbol{(x+a)e^{-\frac{x+a}{a}}}$

(3) (1) の計算結果から

$$g'(x)=-f'(x+a)=-\left(\frac{x+a}{a}-1\right)e^{-\frac{x+a}{a}}=-\frac{x}{a}e^{-\frac{x+a}{a}}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	ae^{-1}	$\searrow$

$b>0$ より，$h(x)=bg(x)$ の最大値 abe^{-1} が 1 であるから　$\boldsymbol{ab=e}$

(4) (1) の結果から，ℓ と x 軸との交点の x 座標 $4a$ が 4 であるから　$a=1$

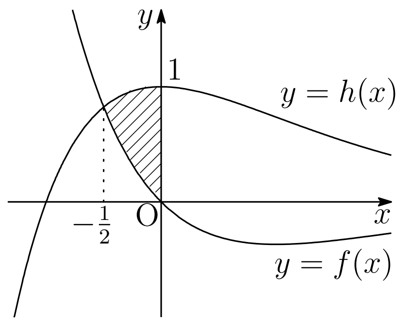
これを (3) の結果に代入して　　$b=e$

ゆえに　$f(x)=-xe^{-x}$，$h(x)=e(x+1)e^{-x-1}=(x+1)e^{-x}$

$$h(x)-f(x)=(2x+1)e^{-x}$$

したがって，$y=f(x)$ と $y=h(x)$ の交点の x 座標は

$$x=-\frac{1}{2}$$



$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 0$ において

$$h(x)-f(x)\geqq 0$$

求める面積を S とすると

$$S=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(2x+1)e^{-x}\,dx=\Big[-(2x+3)e^{-x}\Big]_{-\frac{1}{2}}^{0}=\boldsymbol{2\sqrt{e}-3}$$