平成 28 年度　福岡教育大学２次試験後期日程 (数学問題)
教育学部中等教育 (数学専攻)　平成 28 年 3 月 12 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ.

(1) 不等式 $3^{\log_2 2x} + 2{\cdot}3^{\log_4 x} - 1 > 0$ を解け.

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき，関数 $y = \cos^2 x + 4\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\sin^2 x$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの x の値を求めよ.

(3) 等差数列 $\{a_n\}$ は

$$a_4 + a_5 + a_6 = 615, \quad a_{18} + a_{20} + a_{22} = -15$$

を満たす．この等差数列の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とするとき S_n の最大値を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$OAB において OA $= 2$，OB $= 3$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおくと $\vec{a}{\cdot}\vec{b} = 3$ である．頂点 O から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB の交点を H，頂点 A から直線 OB に下ろした垂線と直線 OB の交点を I とする．また直線 OH と直線 AI の交点を P とする．ただし $\vec{a}{\cdot}\vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積である．次の問いに答えよ.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ.

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}} = k\vec{b}$ を満たす実数 k を求めよ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ p，m を正の定数とする．次の問いに答えよ．

(1) $p \geqq 3$ とする．p と $p+m$ が素数ならば，m は偶数であることを示せ．

(2) m は 3 で割ると 1 余る．このとき $p(p+m)(p+2m)$ は 3 の倍数であることを示せ．

(3) m は $1 \leqq m \leqq 20$ を満たし，3 で割ると 1 余る．このとき p，$p+m$，$p+2m$ がすべて素数であるような整数の組 $(p,\ m)$ をすべて求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 媒介変数 t を用いて

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

で表される曲線について，次の問いに答えよ．

(1) この曲線上の点 $(x,\ y)$ は $y = \sqrt{x^2+1}$ を満たすことを示せ．

(2) $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}\left(\dfrac{e^{t_0} - e^{-t_0}}{2},\ \dfrac{e^{t_0} + e^{-t_0}}{2}\right)$ とする．線分 OA，線分 OP とこの曲線で囲まれた図形の面積 S を t_0 で表せ．ただし $t_0 > 0$ とする．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$\log_2 2x = 1 + \log_2 x = 1 + 2\log_4 x$$

$t = 3^{\log_4 x}$ とおくと $(t > 0)$，不等式 $3^{\log_2 2x} + 2{\cdot}3^{\log_4 x} - 1 > 0$ は

$$3t^2 + 2t - 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad (t+1)(3t-1) > 0$$

$t > 0$ により　$t > \dfrac{1}{3}$　したがって　$3^{\log_4 x} > 3^{-1}$

よって　$\log_4 x > -1$　底 4 は 1 より大きいから　$\boldsymbol{x > \dfrac{1}{4}}$

(2)
$$\begin{aligned} y &= \cos^2 x + 4\sqrt{3}\sin x\cos x - 3\sin^2 x \\ &= \frac{1+\cos 2x}{2} + 2\sqrt{3}\sin 2x - 3{\cdot}\frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= 2\sqrt{3}\sin 2x + 2\cos 2x - 1 \\ &= 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より　$\dfrac{\pi}{6} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{2}{3}\pi$

よって　$2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{6}}$ のとき　**最大値 3**

$2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\boldsymbol{x = 0}$ のとき　**最小値 1**

(3) $$a_4 + a_5 + a_6 = 615, \qquad a_{18} + a_{20} + a_{22} = -15$$

数列 $\{a_n\}$ は，等差数列であるから

$$a_4 + a_6 = 2a_5, \quad a_{18} + a_{22} = 2a_{20}$$

したがって　$3a_5 = 615$，$3a_{20} = -15$　すなわち　$a_5 = 205$，$a_{20} = -5$

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると

$$a_1 + 4d = 205, \quad a_1 + 19d = -5 \quad \text{ゆえに} \quad a_1 = 261, \ d = -14$$

一般項は　$a_n = 261 + (n-1){\cdot}(-14) = -14n + 275$

$a_n > 0$ とすると　$-14n + 275 > 0$　ゆえに　$n < 19.6\cdots$

これをみたす最大の n は　$n = 19$

よって，S_n の最大値は
$$\begin{aligned} S_{19} &= \frac{1}{2}{\cdot}19\{2{\cdot}261 + (19-1){\cdot}14\} \\ &= \mathbf{2565} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) H は直線 AB 上の点であるから　$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b}$

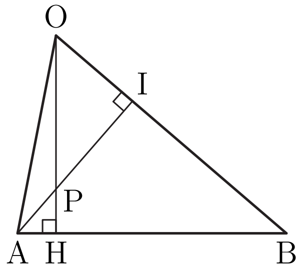
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OH}}$ であるから　$(\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\} = 0$

したがって　$(s-1)|\vec{a}|^2 + (1-2s)\vec{a}\cdot\vec{b} + s|\vec{b}|^2 = 0$

ゆえに　$4(s-1) + 3(1-2s) + 9s = 0$　これを解いて　$s = \dfrac{1}{7}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{6}{7}\vec{a} + \dfrac{1}{7}\vec{b}}$

(2) 実数 t を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とおくと



$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = t\left(\frac{6}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}\right) - \vec{a}$$
$$= \left(\frac{6}{7}t - 1\right)\vec{a} + \frac{t}{7}\vec{b}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ であるから　$\vec{b}\cdot\left\{\left(\dfrac{6}{7}t-1\right)\vec{a} + \dfrac{t}{7}\vec{b}\right\} = 0$

ゆえに　$3\left(\dfrac{6}{7}t - 1\right) + \dfrac{9}{7}t = 0$　これを解いて　$t = \dfrac{7}{9}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \dfrac{7}{9}\left(\dfrac{6}{7}\vec{a} + \dfrac{1}{7}\vec{b}\right) = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{9}\vec{b}}$

(3) P は直線 AI 上の点であるから

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)$　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \dfrac{1}{3}\vec{b}$　よって　$\boldsymbol{k = \dfrac{1}{3}}$

解説 $\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{3}{2\cdot 3} = \dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$

余弦定理により　$\mathrm{AB}^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot 3\cos 60^\circ = 7$

$$\cos\angle\mathrm{OAB} = \frac{2^2 + (\sqrt{7})^2 - 3^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}}$$

ゆえに　$\mathrm{AH} = \mathrm{OA}\cos\angle\mathrm{OAB} = \dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$\mathrm{OI} = \mathrm{OA}\cos 60^\circ = 2\cdot\dfrac{1}{2} = 1$

したがって　$\mathrm{AH} : \mathrm{HB} = 1 : 6$，$\mathrm{BI} : \mathrm{IO} = 2 : 1$

$\triangle$OHB および直線 AI について，メネラウスの定理を適用すると

$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}\cdot\dfrac{\mathrm{HA}}{\mathrm{AB}}\cdot\dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{IO}} = 1$　ゆえに　$\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PH}}\cdot\dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{2}{1} = 1$　よって　$\mathrm{OP} : \mathrm{PH} = 7 : 2$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) m は正の定数，$p \geqq 3$ より，$p+m > p$ であるから，p と $p+m$ はともに奇素数である．したがって，p と $p+m$ の偶奇性により，m は偶数である．

(2) m は 3 で割ると 1 余るから　$m \equiv 1,\quad 2m \equiv 2 \pmod 3$

したがって　$p(p+m)(p+2m) \equiv p(p+1)(p+2) \pmod 3$

連続する 3 つの整数の積 $p(p+1)(p+2)$ は 3 の倍数であるから

$$p(p+m)(p+2m) \equiv 0 \pmod 3$$

よって，$p(p+m)(p+2m)$ は 3 の倍数である．

(3) p と $p+m$ が素数であるから，(1) の結果から，m は偶数である．
p，$p+m$，$p+2m$ がすべて素数であるとき，$p \geqq 2$，$m \geqq 2$ より

$$4 \leqq p+m < p+2m$$

(2) の結果から，$p(p+m)(p+m)$ は 3 を因数にもつので，異なる 3 つの素数 p，$p+m$，$p+2m$ のうち，3 であるのは，上式に注意して

$$p = 3$$

また，$1 \leqq m \leqq 20$ を満たし，$m \equiv 1 \pmod 3$ であるのは

$$m = 4,\ 10,\ 16$$

このとき

	$p+m$	$p+2m$
$m=4$	7	11
$m=10$	13	23
$m=16$	19	35

上の表から，求める整数の組 $(p,\ m)$ は

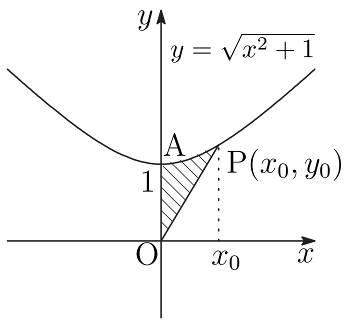
$$\boldsymbol{(p,\ m) = (3,\ 4),\ (3,\ 10)}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $x = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $y = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ より

$$x^2 + 1 = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 + 1 = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 = y^2$$

$y > 0$ であるから　　$y = \sqrt{x^2+1}$

(2) $x_0 = \dfrac{e^{t_0} - e^{-t_0}}{2}$, $y_0 = \dfrac{e^{t_0} + e^{-t_0}}{2}$ とおくと



(1) の結果から　$y_0 = \sqrt{{x_0}^2+1}$

また　$(x\sqrt{x^2+1})' = 2\sqrt{x^2+1} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$$\log(x + \sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

したがって　$\dfrac{1}{2}\{x\sqrt{x^2+1} + \log(x+\sqrt{x^2+1})\}' = \sqrt{x^2+1}$

求める面積 S は，右の図の斜線部分であるから，上の諸式を利用して

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{x_0} \left(\sqrt{x^2+1} - \frac{y_0}{x_0}x\right) dx \\ &= \left[\,\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{y_0}{2x_0}x^2\,\right]_0^{x_0} \\ &= \frac{1}{2}\log(x_0 + y_0) = \boldsymbol{\frac{1}{2}t_0} \end{aligned}$$