# 平成 28 年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
# 中等教育 (数学専攻)　平成 28 年 2 月 25 日

- 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき

$$\cos 2x + \cos x + 1 > 0$$

を満たす $x$ の範囲を求めよ．

(2) $a^2b - 3a^2 + 5b = 21$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

(3) 正方形の各辺を $n$ 等分した点から向かい合う辺に垂線を下ろす．このとき，正方形の 4 つの辺とこれらの垂線を利用してできる長方形のうち，正方形でないものの個数を $n$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和をそれぞれ

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad t_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

とおいたとき

$$s_n = \frac{3n^2 + n}{2}, \quad \log_2(t_n + 1) = 2n \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

が成り立つ．次の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 複素数 $z$ は実部が $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，虚部は正で $|z|=1$ である．次の問いに答えよ．

(1) $\left(z+\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ の値を求めよ．

(2) $1+z+z^2+z^3+z^4$ の値を求めよ．

(3) $z$ の偏角 $\theta$ を求めよ．ただし $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $a$ を正の定数とする．関数 $f(x)=ax-x\log x$ の最大値が $1$ であるとする．次の問いに答えよ．

(1) $a$ の値を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ の接線のうち，傾きが $-\dfrac{1}{2}$ であるものを求めよ．

(3) 曲線 $y=f(x)$ と $x$ 軸および (2) で求めた接線によって囲まれる部分の面積を求めよ．

# 正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ であるから，不等式 $\cos 2x + \cos x + 1 > 0$ は

$$(2\cos^2 x - 1) + \cos x + 1 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad \cos x(2\cos x + 1) > 0$$

したがって $\quad \cos x < -\dfrac{1}{2},\quad 0 < \cos x$

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ に注意して，これを解くと

$$\boldsymbol{0 \leqq x < \frac{\pi}{2},\quad \frac{2}{3}\pi < x < \frac{4}{3}\pi,\quad \frac{3}{2}\pi < x \leqq 2\pi}$$

(2) $a^2b - 3a^2 + 5b = 21$ より $\quad (a^2+5)b = 3a^2 + 21$

したがって $\quad b = \dfrac{3a^2+21}{a^2+5} = 3 + \dfrac{6}{a^2+5} \quad \cdots (*)$

$a^2 + 5 \geqq 5$ は $6$ の約数であるから $\quad a^2 + 5 = 6$

ゆえに $\quad a = \pm 1 \quad$ これを $(*)$ に代入して $\quad \boldsymbol{(a,\ b) = (\pm 1,\ 4)}$

(3) 正方形の一辺の長さを $n$ とすると，一辺の長さが $k$ の正方形の個数は

$$(n+1-k)^2 \qquad (1 \leqq k \leqq n)$$

であるから，その総数は

$$\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^2 = \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

また，長方形の総数は

$${}_{n+1}\mathrm{C}_2 \times {}_{n+1}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

よって，求める個数は

$$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \boldsymbol{\frac{1}{12}n(n+1)(n-1)(3n+2)}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_1 = s_1$ であるから　$a_1 = \dfrac{3{\cdot}1^2+1}{2} = 2$

$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \frac{3n^2+n}{2} - \frac{3(n-1)^2+(n-1)}{2} = 3n-1$$

これは，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{a_n = 3n-1}$

(2) $\log_2(t_n+1) = 2n$ より　$t_n = 2^{2n}-1$

$b_1 = t_1$ であるから　$b_1 = 2^2-1 = 3$

$n \geqq 2$ のとき

$$b_n = t_n - t_{n-1} = (2^{2n}-1) - \{2^{2(n-1)}-1\} = 3{\cdot}2^{2n-2}$$

これは，$n=1$ のときも成立するから　$\boldsymbol{b_n = 3{\cdot}2^{2n-2}}$

(3) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_kb_k$ とおくと，(1),(2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$S_n = 3\sum_{k=1}^{n}(3k-1){\cdot}2^{2k-2} \qquad \cdots ①$$

$$S_n = 3\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2){\cdot}2^{2k} \qquad \cdots ②$$

① $\times 4 -$ ② から

$$\begin{aligned}
4S_n - S_n &= 3\sum_{k=1}^{n}(3k-1){\cdot}2^{2k} - 3\sum_{k=0}^{n-1}(3k+2){\cdot}2^{2k} \\
S_n &= \sum_{k=1}^{n}(3k-1){\cdot}2^{2k} - \sum_{k=0}^{n-1}(3k+2){\cdot}2^{2k} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}(3k-1){\cdot}2^{2k} + (3n-1){\cdot}2^{2n} - \sum_{k=1}^{n-1}(3k+2){\cdot}2^{2k} - 2 \\
&= (3n-1){\cdot}2^{2n} - 2 - 3\sum_{k=1}^{n-1}2^{2k} \\
&= (3n-1){\cdot}2^{2n} - 2 - 3 \times \frac{4(2^{2n-2}-1)}{4-1} = (3n-2){\cdot}2^{2n} + 2
\end{aligned}$$

$S_1 = a_1b_1 = 2{\cdot}3 = 6$ であるから，上式は $n=1$ のときも成立する．

よって　$\boldsymbol{S_n = (3n-2){\cdot}2^{2n} + 2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $z$ の実部が $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ であるから　　$\dfrac{z+\overline{z}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$　$\cdots$①

$|z|=1$ より　$|z|^2=1$　ゆえに　$z\overline{z}=1$　すなわち　$\overline{z}=\dfrac{1}{z}$　$\cdots$②

①，② から　　$z+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

よって　　$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
$$=\mathbf{1}$$

(2) (1) の結果を展開して整理すると

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+z^2=0$$

両辺に $z^2$ を掛けると　　$\boldsymbol{1+z+z^2+z^3+z^4=0}$

(3) $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$ であるから，(2) の結果から

$$z^5-1=0 \qquad \text{ゆえに} \qquad z^5=1$$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とおくと

$$r^5(\cos 5\theta+i\sin 5\theta)=1$$

したがって　　$r^5=1$，$5\theta=2n\pi$　($n$ は整数)

すなわち　　$r=1$，$\theta=\dfrac{2n\pi}{5}$　$\cdots$①

$z$ の実部 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}>0$，条件から虚部は正であるから，$0\leqq\theta<2\pi$ より

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

上式より，① を満たす整数 $n$ は　$n=1$　よって　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{2}{5}\pi}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=ax-x\log x$ を微分すると　$f'(x)=a-1-\log x$

$f'(x)=0$ とすると　$x=e^{a-1}$

$f(x)$ の増減表は

| $x$ | $(0)$ | $\cdots$ | $e^{a-1}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | | $\nearrow$ | $e^{a-1}$ | $\searrow$ |

このとき，$f(x)$ の最大値が $1$ であるから

$$e^{a-1}=1 \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{a=1}$$

(2) (1) の結果から，$f(x)=x(1-\log x)$，$f'(x)=-\log x$

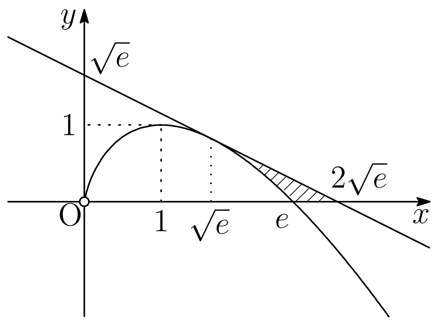
$f'(x)=-\dfrac{1}{2}$ とすると

$$-\log x=-\frac{1}{2} \quad \text{すなわち} \quad x=\sqrt{e}$$

$f(\sqrt{e})=\dfrac{1}{2}\sqrt{e}$ より，求める接線は，点 $\left(\sqrt{e},\ \dfrac{1}{2}\sqrt{e}\right)$ を通り，傾き $-\dfrac{1}{2}$ の直線であるから

$$y-\frac{1}{2}\sqrt{e}=-\frac{1}{2}(x-\sqrt{e}) \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{e}}$$

(3) 曲線 $y=x(1-\log x)$ の $x$ 軸との交点の $x$ 座標は




$$1-\log=0 \quad \text{すなわち} \quad x=e$$

直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+\sqrt{e}$ の $x$ 軸との交点の $x$ 座標は

$$-\frac{1}{2}x+\sqrt{e}=0 \quad \text{すなわち} \quad x=2\sqrt{e}$$

よって，求める部分の面積を $S$ とすると

$$\begin{aligned} S&=\frac{1}{2}(2\sqrt{e}-\sqrt{e})f(\sqrt{e})-\int_{\sqrt{e}}^{e}x(1-\log x)\,dx \\ &=\frac{1}{2}\sqrt{e}\times\frac{1}{2}\sqrt{e}-\left[\ x^2\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\log x\right)\ \right]_{\sqrt{e}}^{e} \\ &=\frac{1}{4}e-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{2}e=\boldsymbol{\frac{1}{4}e(3-e)} \end{aligned}$$