平成 27 年度　福岡教育大学２次試験後期日程 (数学問題)
教育学部　平成 27 年 3 月 12 日

- 中等教育 (数学専攻) は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 初等教育 (数学専修) は，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) n は自然数で $n \geqq 6$ とする．正 n 角形の n 個の頂点から 3 点を選んで三角形をつくるとき，もとの正 n 角形と辺を共有しないものはいくつできるか．

(2) x についての方程式

$$\left(\log_2 \frac{x}{10}\right)\left(\log_2 \frac{5}{x}\right) - a = 0$$

が実数解をもつような定数 a の範囲を求めよ．

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos^3 x\, dx$ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$ABC において，AB $=$ a，BC $=$ 2 とする．また，BC の中点を D とし，$\angle$BAD $=$ θ とするとき $\angle$ABD $=$ $\angle$DAC $=$ 2θ が成り立っているとする．次の問いに答えよ．

(1) AC の長さを求めよ．また，AD の長さを a を用いて表せ．

(2) $a = 2\sqrt{2}\cos\theta$ が成り立つことを示せ．

(3) a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $0 < \theta < \pi$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) n を自然数とするとき，等式

$$\sin^2(n+1)\theta - \sin^2 n\theta = \sin\theta \cdot \sin(2n+1)\theta$$

が成り立つことを示せ．

(2) n は自然数とする．数学的帰納法によって

$$\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \cdots + \sin(2n-1)\theta = \frac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ k を自然数とする．$x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{(x-1)^k x^n + x^n + 1 - (x-1)^k}{x^n + 1}$$

によって定める．次の問いに答えよ．

(1) $k = 2$ のとき，次の (i),(ii) に答えよ．

(i) 曲線 $y = f(x)$ $(x \geqq 1)$ の点 $(1,\ f(1))$ 以外の点における接線のうち，点 $(0, -2)$ を通るものの方程式を求めよ．

(ii) (i) で求めた接線と曲線 $y = f(x)$ $(x \geqq 0)$ と y 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ が $x = 1$ において微分可能かどうか調べよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ が $|\vec{a}| = \sqrt{5}$，$|\vec{b}| = 2$，$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$ を満たしているとき，$|\vec{a} - t\vec{b}|$ を最小にする実数 t の値とその最小値を求めよ．

(2) **中等教育教員養成課程** (数学専攻) の $\boxed{\mathbf{1}}$ (2) と同じ．

(3) **中等教育教員養成課程** (数学専攻) の $\boxed{\mathbf{1}}$ (1) と同じ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ **中等教育教員養成課程** (数学専攻) の $\boxed{\mathbf{2}}$ と同じ

$\boxed{\mathbf{7}}$ $0 < c < 1$ とする．数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = c, \quad a_{n+1} = \frac{c + a_n}{1 + c a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

によって定められているとき，次の問いに答えよ．

(1) すべての自然数 n について $0 < a_n < 1$ が成り立つことを数学的帰納法によって示せ．

(2) $b_n = \sqrt{\dfrac{1 - a_n}{1 + a_n}}$ とするとき，b_n を c と n を用いて表せ．

(3) すべての自然数 m，n について

$$a_{m+n} = \frac{a_n + a_m}{1 + a_n a_m}$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{8}$ a を正の定数とする．$x \geqq 0$ のとき，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{ax^{n+1} + (1-a)x^n + x^3 - x^2 + 1}{x^n + 1}$$

によって定める．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の両端点以外の点における接線のうち，点 $(0,\ 1)$ を通るものの方程式を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ が $x = 1$ において微分可能になる a の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) n 個の頂点から 3 点選んでできる三角形の総数は

$$_n\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2) \quad (\text{通り})$$

このうち，1 辺だけをもとの正 n 角形と辺を共有するものは，その共有する辺の選び方は n 通りあり，選んだ辺およびその隣接する辺の頂点を除いた $n-4$ 個の頂点から残りの頂点を選ぶので，その総数は

$$n(n-4) \quad (\text{通り})$$

また，2 辺をもとの正 n 角形と辺を共有するものは，n 通りある．
したがって，求める場合の数は

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \{n(n-4)+n\} = \boldsymbol{\frac{1}{6}n(n-4)(n-5)}$$

(2) $\left(\log_2 \dfrac{x}{10}\right)\left(\log_2 \dfrac{5}{x}\right) - a = 0$ より

$$\left(\log_2 \frac{x}{5} - \log_2 2\right)\left(-\log_2 \frac{x}{5}\right) - a = 0$$

$t = \log_2 \dfrac{x}{5}$ とおくと　$(t-1)(-t) - a = 0$　すなわち　$t^2 - t + a = 0$

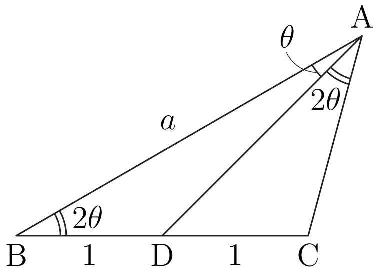
この t に関する 2 次方程式が実数解をもつので，係数について

$$(-1)^2 - 4\cdot 1a \geqq 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a \leqq \frac{1}{4}}$$

(3) $\cos^3 x = \cos x(1-\sin^2 x) = \left(\sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x\right)'$ より

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x\cos^3 x\,dx &= \int_0^{\pi} x\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)' dx \\
&= \Big[\, x\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right) \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right) dx \\
&= \int_0^{\pi}\left(-\frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x\right) dx \\
&= \Big[\, \frac{2}{3}\cos x + \frac{1}{9}\cos^3 x \,\Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{-\frac{14}{9}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\triangle$ABC $\backsim$ $\triangle$DAC であるから，相似比を $1:k$ とすると



$$\mathrm{AD} = ak, \quad \mathrm{AC} = 2k$$

AC : CD $= 1 : k$ であるから

$$2k : 1 = 1 : k \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$\mathrm{AC} = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\sqrt{2}},\quad \mathrm{AD} = a\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{a}{\sqrt{2}}}$

(2) $\triangle$ABD に正弦定理を適用すると

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{\mathrm{AD}}{\sin 2\theta} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AD} = \frac{\sin 2\theta}{\sin\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta} = 2\cos\theta$$

これと (1) の結果から　$\frac{a}{\sqrt{2}} = 2\cos\theta$　よって　$a = 2\sqrt{2}\cos\theta$

(3) $\triangle$ABD に正弦定理を適用すると

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{2\sqrt{2}\cos\theta}{\sin(\pi - 3\theta)} \quad \text{ゆえに} \quad \sin 3\theta = 2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$$

$\sin 3\theta = \sin\theta(4\cos^2\theta - 1)$ であるから，$\sin\theta \neq 0$ より

$$4\cos^2\theta - 1 = 2\sqrt{2}\cos\theta \quad \text{ゆえに} \quad 4\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta - 1 = 0$$

θ は鋭角であるから，$\cos\theta > 0$ に注意して　$\cos\theta = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

これを (2) の結果に代入して　$a = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\sqrt{3}+1}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)
$$\begin{aligned}\cos 2\alpha - \cos 2\beta &= (1 - 2\sin^2\alpha) - (1 - 2\sin^2\beta)\\ &= -2(\sin^2\alpha - \sin^2\beta),\end{aligned}$$

$$\cos 2\alpha - \cos 2\beta = -2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$

上の 2 式から　$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$

これに $\alpha = (n+1)\theta$，$\beta = n\theta$ を代入すると

$$\sin^2(n+1)\theta - \sin^2 n\theta = \sin\theta\sin(2n+1)\theta$$

(2) $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \cdots + \sin(2n-1)\theta = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta} \cdots (*)$ とする．

i) $n=1$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = \sin\theta, \quad (*) \text{ の右辺} = \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta$$

よって，$n=1$ のとき，$(*)$ が成り立つ．

ii) $n=k$ のとき

$$\sin\theta \sin 3\theta + \sin 5\theta + \cdots + \sin(2k-1)\theta = \frac{\sin^2 k\theta}{\sin\theta}$$

が成り立つと仮定すると

$$\sin\theta \sin 3\theta + \sin 5\theta + \cdots + \sin(2k-1)\theta$$
$$+ \sin(2k+1)\theta = \frac{\sin^2 k\theta}{\sin\theta} + \sin(2k+1)\theta$$

(1) の結果から $\quad \dfrac{\sin^2 k\theta}{\sin\theta} + \sin(2k+1)\theta = \dfrac{\sin^2(k+1)\theta}{\sin\theta}$

上の 2 式より $\quad \sin\theta \sin 3\theta + \sin 5\theta + \cdots + \sin(2k+1)\theta = \dfrac{\sin^2(k+1)\theta}{\sin\theta}$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(x-1)^k x^n + x^n + 1 - (x-1)^k}{x^n+1}$ $(x \geqq 0)$ より

$$0 \leqq x < 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} x^n = 0, \qquad x > 1 \text{ のとき } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

したがって $\quad f(x) = \begin{cases} -(x-1)^k + 1 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \\ (x-1)^k + 1 & (x > 1) \end{cases} \qquad \cdots (*)$

(i) $k=2$ のとき，$(*)$ より，$x \geqq 1$ のとき

$$f(x) = (x-1)^2 + 1, \quad f'(x) = 2(x-1)$$

$t \geqq 1$ のとき，曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - \{(t-1)^2 + 1\} = 2(t-1)(x-t)$$

すなわち $\qquad y = 2(t-1)x - t^2 + 2 \quad \cdots ①$

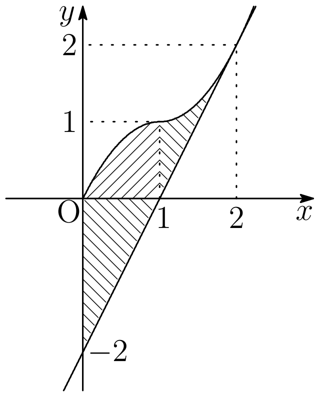
これが，点 $(0, -2)$ を通るとき

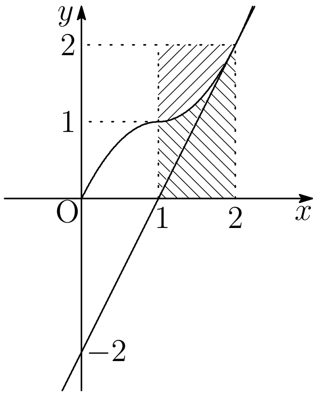
$$-2 = -t^2 + 2 \quad \text{これを解いて} \quad t = 2$$

① より，求める接線の方程式は $\qquad \boldsymbol{y = 2x - 2}$

(ii) $k=2$ のとき $(*)$ は $\quad f(x)=\begin{cases} -(x-1)^2+1 & (0 \leqq x < 1) \\ 1 & (x=1) \\ (x-1)^2+1 & (x>1) \end{cases}$

$y=f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ は，点 $(1,\ 1)$ に関して対称であるから，求める左図の斜線部分の面積は，右図の斜線部分の面積に等しい．





よって，求める面積は $\quad 1 \times 2 = \mathbf{2}$

(2) $(*)$ より，$f(x)$ は，$x=1$ で連続である．また

$$\lim_{h \to +0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{(h^k+1)-1}{h} = \lim_{h \to +0} h^{k-1},$$
$$\lim_{h \to -0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{(-h^k+1)-1}{h} = \lim_{h \to -0} (-h^{k-1})$$

(i) $k=1$ のとき $\quad \displaystyle\lim_{k \to +0} h^{k-1} = 1,\ \lim_{k \to -0} (-h^{k-1}) = -1$

よって，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能でない．

(ii) $k \geqq 2$ のとき $\quad \displaystyle\lim_{k \to +0} h^{k-1} = \lim_{k \to -0} (-h^{k-1}) = 0$

ゆえに $\quad \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0$

よって，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能である．

(i)，(ii) より $\quad$ **$k=1$ のとき，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能でない．**
$k \geqq 2$ のとき，$f(x)$ は $x=1$ で微分可能である．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

これに $|\vec{a}|=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$ を代入すると

$$3=5-2\vec{a}\cdot\vec{b}+4 \quad ゆえに \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=3$$

したがって　$|\vec{a}-t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=5-6t+4t^2$
$$=4\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{11}{4}$$

よって，$\boldsymbol{t=\frac{3}{4}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{\frac{\sqrt{11}}{2}}$ をとる．

解説 $\vec{v}=\vec{a}-\dfrac{(\vec{a}\cdot\vec{b})}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$ とおくと，$\vec{b}\perp\vec{v}$．$\vec{v}=\vec{a}-\dfrac{3}{4}\vec{b}$ であるから，$\vec{a}=\vec{v}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

したがって　$|\vec{a}-t\vec{b}|^2=\left|\vec{v}+\left(\frac{3}{4}-t\right)\vec{b}\right|^2=|\vec{v}|^2+\left(\frac{3}{4}-t\right)^2|\vec{b}|^2$
$$=\frac{11}{4}+4\left(t-\frac{3}{4}\right)^2$$

$\vec{a}-t\vec{b}$ は，点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{b}$ に平行な直線．
$\vec{v}$ は，O からこの直線に引いた垂線を表すベクトル．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $0<a_n<1\cdots(*)$ とおく．

(i) $n=1$ のとき，$a_1=c$，$0<c<1$ より，$(*)$ が成り立つ．

(ii) $n=k$ のとき，$0<a_k<1$ が成り立つと仮定すると

$c>0$，$a_k>0$ より　　$a_{k+1}=\dfrac{c+a_k}{1+ca_k}>0$

また，$0<c<1$，$0<a_k<1$ より

$$1+ca_k>0, \quad 1-c>0, \quad a_k-1<0$$

したがって　　$a_{k+1}-1=\dfrac{c+a_k}{1+ca_k}-1=\dfrac{c+a_k-(1+ca_k)}{1+ca_k}$
$$=\frac{(1-c)(a_k-1)}{1+ca_k}<0$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，すべての自然数について，$(*)$ が成り立つ．

(2) $a_{n+1}=\dfrac{c+a_n}{1+ca_n}$ より $\quad 1-a_{n+1}=1-\dfrac{c+a_n}{1+ca_n}=\dfrac{(1-c)(1-a_n)}{1+ca_n}$

$$1+a_{n+1}=1+\dfrac{c+a_n}{1+ca_n}=\dfrac{(1+c)(1+a_n)}{1+ca_n}$$

$0<c<1$，$0<a_n<1$ に注意して

$$\frac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}}=\frac{1-c}{1+c}\cdot\frac{1-a_n}{1+a_n} \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{\frac{1-a_{n+1}}{1+a_{n+1}}}=\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\sqrt{\frac{1-a_n}{1+a_n}}$$

したがって $\quad b_1=\sqrt{\dfrac{1-a_1}{1+a_1}}=\sqrt{\dfrac{1-c}{1+c}},\quad b_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1-c}{1+c}}b_n$

よって，$\{b_n\}$ は，初項 $\sqrt{\dfrac{1-c}{1+c}}$，公比 $\sqrt{\dfrac{1-c}{1+c}}$ の等比数列であるから

$$b_n=\left(\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\right)^n=\boldsymbol{\left(\frac{1-c}{1+c}\right)^{\frac{n}{2}}}$$

(3) $r=\dfrac{1-c}{1+c}$ とおくと，(2) の結果から $\quad {b_n}^2=r^n$

上式と $b_n=\sqrt{\dfrac{1-a_n}{1+a_n}}$ より，$a_n=\dfrac{1-{b_n}^2}{1+{b_n}^2}=\dfrac{1-r^n}{1+r^n}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{a_n+a_m}{1+a_na_m}&=\frac{\dfrac{1-r^n}{1+r^n}+\dfrac{1-r^m}{1+r^m}}{1+\dfrac{1-r^n}{1+r^n}\cdot\dfrac{1-r^m}{1+r^m}}\\&=\frac{(1-r^n)(1+r^m)+(1+r^n)(1-r^m)}{(1+r^n)(1+r^m)+(1-r^n)(1-r^m)}\\&=\frac{2(1-r^{n+m})}{2(1+r^{n+m})}=a_{n+m}\end{aligned}$$

$\boxed{8}$ (1) $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{ax^{n+1}+(1-a)x^n+x^3-x^2+1}{x^n+1}$ より

$0 \leqq x<1$ のとき $\lim_{n\to\infty} x^n=0$, $\quad x>1$ のとき $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$

したがって $\quad f(x)=\begin{cases} x^3-x^2+1 & (0 \leqq x<1) \\ 1 & (x=1) \\ ax+1-a & (x>1)\end{cases} \quad \cdots(*)$

$0<x<1$ のとき，$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	極小 $\frac{23}{27}$	$\nearrow$	1

$x>1$ のとき，$a>0$ より，$f(x)$ は単調増加

よって，$\boldsymbol{x=\dfrac{2}{3}}$ で極小値 $\boldsymbol{\dfrac{23}{27}}$ をとる．

(2) $0<t<1$ のとき，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y-(t^3-t^2+1)=t(3t-2)(x-t)$$

すなわち $\qquad y=t(3t-2)x-2t^3+t^2+1 \quad \cdots①$

これが，点 $(0,\ 1)$ を通るとき，$0<t<\dfrac{1}{2}$ に注意して

$$1=-2t^3+t^2+1 \quad \text{これを解いて} \quad t=\frac{1}{2}$$

① より，求める接線の方程式は $\qquad \boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}x+1}$

(3) $(*)$ より，$f(x)$ は，$x=1$ で連続である．また

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{\{a(1+h)+1-a\}-1}{h}=a,$$

$$\lim_{h\to-0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{\{(1+h)^3-(1+h)^2+1\}-1}{h}$$

$$=\lim_{h\to-0}(1+h)^2=1$$

上の 2 式から，$f(x)$ が $x=1$ で微分可能となるのは $\qquad \boldsymbol{a=1}$