平成 27 年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　平成 27 年 2 月 25 日

- 中等教育 (数学専攻) は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 初等教育 (数学専修) は，$\boxed{5}$ 〜 $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $(x-3y+2z)^7$ の展開式における x^4y^2z の項の係数を求めよ．

(2) a は正の定数で，$a \neq 1$ とする．不等式

$$\log_a(a-x-y) > \log_a x + \log_a y$$

が表す領域を図示せよ．

(3) n は 3 以上の自然数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ．

$$2^n > \frac{1}{2}n^2 + n$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．

(1) x がすべての実数を動くとき，$2^x + 2^{-x}$ の最小値を m とする．次の (ア), (イ) に答えよ．

(ア) m の値を求め，$2^x + 2^{-x} = m$ を満たす x を求めよ．

(イ) $k > m$ のとき，$2^x + 2^{-x} = k$ を満たす x をすべて求めよ．

(2) a を定数とし，$a \leqq 2$ とする．方程式

$$4^x + 4^{-x} - 3a{\cdot}2^x - 3a{\cdot}2^{-x} + 2(a^2+1) = 0$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 平面上に $\triangle$ABC と点 O がある．$\triangle$ABC の内部に点 D があって，三角形の面積比が

$$\triangle\mathrm{DBC} : \triangle\mathrm{DCA} : \triangle\mathrm{DAB} = p : q : r$$

であるとする．次の問いに答えよ．

(1) 直線 AD と辺 BC の交点を S，直線 BD と辺 AC の交点を T とするとき，BS : SC および CT : TA を $p,\ q,\ r$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{p\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{p+q+r}$ となることを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ aを正の定数とし，曲線$y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線$y = \sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸によって囲まれる部分の面積が $\sqrt{3}-1$ であるとする．次の問いに答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ の交点を求めよ．

(3) 曲線 $y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ と y 軸によって囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $(x-3y+2z)^7$ の展開式における x^4y^2z の項の係数を求めよ．

(2) a を定数とし，$0 < a < 1$ とする．不等式

$$\log_a(a-x-y) > \log_a x + \log_a y$$

が表す領域を図示せよ．

(3) n は 3 以上の自然数とする．数学的帰納法によって，次の不等式を証明せよ．

$$2^n > \frac{1}{2}n^2 + n$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の問いに答えよ．

(1) x がすべての実数を動くとき，$2^x + 2^{-x}$ の最小値を m とする．次の (ア), (イ) に答えよ．

(ア) m の値を求め，$2^x + 2^{-x} = m$ を満たす x を求めよ．

(イ) $k > m$ のとき，$2^x + 2^{-x} = k$ を満たす x をすべて求めよ．

(2) a を定数とし，$1 < a \leqq 2$ とする．方程式

$$4^x + 4^{-x} - 3a \cdot 2^x - 3a \cdot 2^{-x} + 2(a^2+1) = 0$$

が異なる 3 つの実数解をもつとき，その 3 つの実数解をすべて求めよ．

7 $\triangle$ABC を 1 辺の長さが 1 の正三角形とし，$\triangle$ABC の外接円の中心を O とする．次の問いに答えよ．

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさを求めよ．

(2) 点 P が $\triangle$ABC の外接円上を動くとき，次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) 内積の和 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ の値を求めよ．

(イ) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最大値と最小値を求めよ．

8 次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 関数 $f(x)=x-\log x$ の最小値を求めよ．

(2) a を 1 より大きい定数とし，曲線 $y = a\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 $y = \tan x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ によって囲まれる部分 D の面積が $1-\log 2$ であるとする．次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) a の値を求めよ．

(イ) D を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\dfrac{7!}{4!2!1!}x^4(-3y)^2\cdot 2z = 1890x^4y^2z$　　よって，求める係数は　　**1890**

(2)
$$\log_a(a-x-y) > \log_a x + \log_a y \quad \cdots (*)$$

$(*)$ において，真数は正であるから

$$a-x-y>0 \quad \text{かつ} \quad x>0 \quad \text{かつ} \quad y>0$$

すなわち　　$x>0,\quad y>0,\quad x+y<a \quad \cdots$①

$(*)$ から　　$\log_a(a-x-y) > \log_a xy \quad \cdots$②

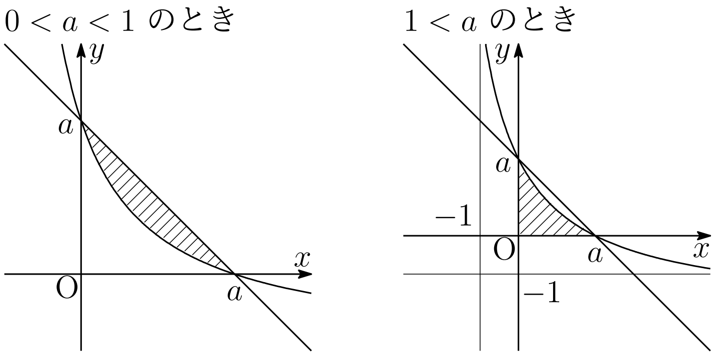
i) $0<a<1$ のとき，② から

$$a-x-y<xy \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(y+1)>a+1$$

ii) $1<a$ のとき，② から

$$a-x-y>xy \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(y+1)<a+1$$

i)，ii) および ① から，求める領域は，次のようになる．



境界線を含まない　　境界線を含まない

(3) $2^n > \dfrac{1}{2}n^2 + n \quad \cdots$ (A) とする．

［1］ $n = 3$ のとき

$$(\text{左辺}) = 2^3 = 8, \qquad (\text{右辺}) = \frac{1}{2}\cdot 3^2 + 3 = \frac{15}{2}$$

よって，$n = 3$ のとき，(A) が成り立つ．

［2］ $k \geqq 3$ として，$n = k$ のとき，(A) が成り立つ，すなわち

$$2^k > \frac{1}{2}k^2 + k$$

が成り立つと仮定する．

$n = k + 1$ のとき，(A) の差を考えると

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - \left\{\frac{1}{2}(k+1)^2 + (k+1)\right\} &= 2\cdot 2^k - \left(\frac{1}{2}k^2 + 2k + \frac{3}{2}\right) \\ &> 2\left(\frac{1}{2}k^2 + k\right) - \left(\frac{1}{2}k^2 + 2k + \frac{3}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(k^2 - 3) > 0 \end{aligned}$$

すなわち　　$2^{k+1} > \dfrac{1}{2}(k+1)^2 + (k+1)$

したがって，$n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ．

［1］，［2］から，3 以上のすべての自然数 n について (A) が成り立つ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)(ア) $\quad 2^x + 2^{-x} = (2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}})^2 + 2$

$2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 0$ すなわち $\boldsymbol{x = 0}$ のとき，最小値 m は $\mathbf{2}$

(イ) $t = 2^x$ とおくと，$2^x + 2^{-x} = k \cdots$ ① より

$$t + \frac{1}{t} = k \quad \text{すなわち} \quad t^2 - kt + 1 = 0$$

$k > 2$ に注意して，これを解くと $\quad t = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$

ゆえに $\quad 2^x = \dfrac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ $\quad$ よって $\quad \boldsymbol{x = \log_2 \dfrac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}}$

(2) 方程式 $4^x + 4^{-x} - 3a\cdot 2^x - 3a\cdot 2^{-x} + 2(a^2 + 1) = 0 \cdots (*)$ を変形すると

$$(2^x + 2^{-x})^2 - 3a(2^x + 2^{-x}) + 2a^2 = 0$$

① から $\quad k^2 - 3ak + 2a^2 = 0$ $\quad$ ゆえに $\quad (k - a)(k - 2a) = 0 \quad \cdots$ ②

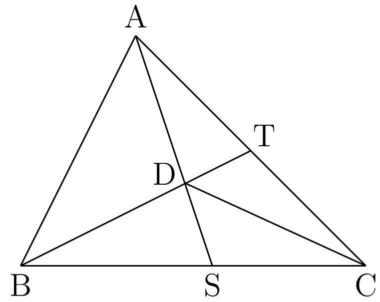
(1) の結果より $k \geqq 2$ であるから，② の実数解は，$a \leqq 2$ に注意して

$2a < 2$	すなわち	$a < 1$ のとき	実数解はない
$2a = 2$	すなわち	$a = 1$ のとき	$k = 2$
$a < 2 < 2a$	すなわち	$1 < a < 2$ のとき	$k = 2a$
		$a = 2$ のとき	$k = 2,\ 4$

① が実数解をもつのは，$k \geqq 2$ のときで，$k = 2$ のとき実数解は 1 個，$k > 2$ のとき実数解は 2 個であるから，方程式 $(*)$ の実数解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{a < 1} \ \textbf{のとき} & \textbf{0 個} \\ \boldsymbol{a = 1} \ \textbf{のとき} & \textbf{1 個} \\ \boldsymbol{1 < a < 2} \ \textbf{のとき} & \textbf{2 個} \\ \boldsymbol{a = 2} \ \textbf{のとき} & \textbf{3 個} \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 右の図から



$$\begin{aligned}\mathrm{BS}:\mathrm{SC} &= \triangle\mathrm{SAB}:\triangle\mathrm{SCA}\\ &= \triangle\mathrm{DAB}:\triangle\mathrm{DCA} = \boldsymbol{r : q},\\ \mathrm{CT}:\mathrm{TA} &= \triangle\mathrm{TBC}:\triangle\mathrm{TAB}\\ &= \triangle\mathrm{DBC}:\triangle\mathrm{DAB} = \boldsymbol{p : r}\end{aligned}$$

(2) △BCT および直線 AS について，メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{BS}}{\mathrm{SC}}\cdot\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AT}}\cdot\frac{\mathrm{TD}}{\mathrm{DB}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{r}{q}\times\frac{p+r}{r}\times\frac{\mathrm{TD}}{\mathrm{DB}} = 1$$

したがって　　$\mathrm{TD}:\mathrm{DB} = q : p+r$

D は TB を $q : p+r$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{(p+r)\overrightarrow{\mathrm{OT}} + q\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{q+(p+r)} \qquad \cdots①$$

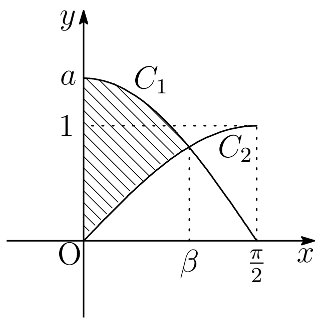
T は CA を $p : r$ に内分する点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}} = \frac{r\overrightarrow{\mathrm{OC}} + p\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{p+r} \qquad \cdots②$$

② を ① に代入すると

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{(p+r)\cdot\dfrac{r\overrightarrow{\mathrm{OC}} + p\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{p+r} + q\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{q+(p+r)} = \frac{p\overrightarrow{\mathrm{OA}} + q\overrightarrow{\mathrm{OB}} + r\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{p+q+r}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における 2 つの曲線を



$$C_1 : y = a\cos x,\quad C_2 : y = \sin x$$

とし，これらの交点の x 座標を β とすると

$$a\cos\beta = \sin\beta$$

ゆえに　$\sin\beta - a\cos\beta = 0$　$\cdots$ ①

右の図の斜線部分の面積は

$$\int_0^{\beta} (a\cos x - \sin x)\,dx = \Big[\, a\sin x + \cos x \,\Big]_0^{\beta}$$
$$= a\sin\beta + \cos\beta - 1$$

条件により，これが $\sqrt{3} - 1$ に等しいから

$a\sin\beta + \cos\beta - 1 = \sqrt{3} - 1$　ゆえに　$a\sin\beta + \cos\beta = \sqrt{3}$　$\cdots$ ②

次の等式

$$(\sin\beta - a\cos\beta)^2 + (a\sin\beta + \cos\beta)^2 = a^2 + 1$$

に ①，② を代入すると

$$3 = a^2 + 1 \quad \text{このとき},\ a > 0 \text{により}\quad \boldsymbol{a = \sqrt{2}}$$

(2) $\begin{cases} y = \sqrt{2}\cos x & \cdots ③ \\ y = \tan x & \cdots ④ \end{cases}$ とおく．③，④ から y を消去すると

$$\sqrt{2}\cos x = \tan x \quad \text{ゆえに}\quad \sqrt{2}\cos^2 x = \sin x$$

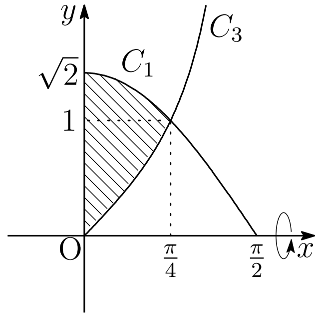
整理すると　$\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$

したがって　$(\sin x + \sqrt{2})(\sqrt{2}\sin x - 1) = 0$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に注意して，これを解くと　$x = \dfrac{\pi}{4}$

これを ④ に代入して　$y = 1$　よって，求める交点は　$\left(\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4},\ 1}\right)$

(3) $C_3 : y = \tan x \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおく．右の図から求める回転体の体積を V とすると



$$V = \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos^2 x - \tan^2 x)\,dx$$
$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x} + 2\right) dx$$
$$= \pi\left[\, \frac{1}{2}\sin 2x - \tan x + 2x \,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}(\pi - 1)}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\dfrac{7!}{4!2!1!}x^4(-3y)^2 \cdot 2z = 1890x^4y^2z$　　よって，求める係数は　**1890**

(2) $$\log_a(a-x-y) > \log_a x + \log_a y \quad \cdots (*)$$

$(*)$ において，真数は正であるから

$$a-x-y>0 \quad \text{かつ} \quad x>0 \quad \text{かつ} \quad y>0$$

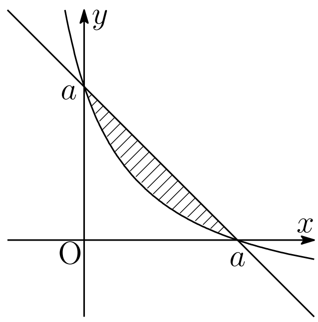
すなわち　$x>0,\quad y>0,\quad x+y<a \quad \cdots ①$

$(*)$ から　$\log_a(a-x-y) > \log_a xy \quad \cdots ②$

$0<a<1$ であるから，② より

$$a-x-y<xy \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(y+1)>a+1$$

上式および ① から，求める領域は，次のようになる．



境界線を含まない

(3) $\boxed{\mathbf{1}}$ (3) と同じ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1)(ア) $$2^x+2^{-x}=(2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}})^2+2$$

$2^{\frac{x}{2}}-2^{-\frac{x}{2}}=0$ すなわち $\boldsymbol{x=0}$ のとき，最小値 m は $\mathbf{2}$

(イ) $t=2^x$ とおくと，$2^x+2^{-x}=k\cdots$① より

$$t+\frac{1}{t}=k \quad \text{すなわち} \quad t^2-kt+1=0$$

$k>2$ に注意して，これを解くと $t=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$

ゆえに $2^x=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$ よって $\boldsymbol{x=\log_2\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}}$

(2) 方程式 $4^x+4^{-x}-3a{\cdot}2^x-3a{\cdot}2^{-x}+2(a^2+1)=0\cdots(*)$ を変形すると

$$(2^x+2^{-x})^2-3a(2^x+2^{-x})+2a^2=0$$

① から $k^2-3ak+2a^2=0$ ゆえに $(k-a)(k-2a)=0 \quad \cdots$②

(1) の結果より $k\geqq 2$ であるから，② の実数解は，$1<a\leqq 2$ に注意して

$a<2<2a$ すなわち $1<a<2$ のとき $k=2a$

$a=2$ のとき $k=2,\ 4$

方程式 $(*)$ が 3 つの実数解をもつのは，$a=2$ のときである．

このとき，$k=2,\ 4$ を (1) の結果に代入して

$$\boldsymbol{x=0,\ \log_2(2\pm\sqrt{3})}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$2R = \frac{1}{\sin 60^\circ} \quad \text{よって} \quad R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ の大きさは R であるから　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(2)(ア)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} &= (\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} + |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\end{aligned}$$

このとき　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos 120^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{6}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \dfrac{1}{6} - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

同様に　$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \dfrac{1}{6} - (\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \frac{1}{6} - (\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

上の 3 式の辺々を加えると

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \frac{1}{2} - 2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} + \overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}} + \overrightarrow{\mathrm{PC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

(イ) i) P が A，B に一致するとき　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = 0$

ii) P が弦 AB に関して C と同じ側にあるとき，$\angle\mathrm{APB} = 60^\circ$
$x = \mathrm{PA}$，$y = \mathrm{PB}$ とし，△APB に余弦定理を適用すると

$$1^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60^\circ \quad \text{ゆえに} \quad xy = 1 - (x-y)^2 \leqq 1$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = xy\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}xy \leqq \dfrac{1}{2}$

iii) P が弦 AB に関して C と反対側にあるとき，$\angle\mathrm{APB} = 120^\circ$
同様に，△APB に余弦定理を適用すると

$$1^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad xy = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(x-y)^2 \leqq \frac{1}{3}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}} = xy\cos 120^\circ = -\dfrac{1}{2}xy \geqq -\dfrac{1}{6}$

i)〜iii) により，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{6}}$

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $f(x)=x-\log x$ を微分すると

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$

よって，最小値は　$\boldsymbol{f(1)=1}$

(2) (ア) $\begin{cases} y=a\sin x & \cdots ① \\ y=\tan x & \cdots ② \end{cases}$ とおく．①，② から y を消去すると

$$a\sin x=\tan x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x\left(a-\frac{1}{\cos x}\right)=0$$

したがって，①，② の交点の x 座標は

$$x=0,\ \beta \quad \left(0<\beta<\frac{\pi}{2},\ \cos\beta=\frac{1}{a}\right)$$

また，$0\leqq x\leqq\beta$ において

$$a\sin x-\tan x=\sin x\left(a-\frac{1}{\cos x}\right)\geqq 0$$

$0\leqq x\leqq\beta$ において，$y=a\sin x$ と $y=\tan x$ で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned}\int_0^\beta(a\sin x-\tan x)&=\Big[-a\cos x+\log\cos x\Big]_0^\beta\\&=a(1-\cos\beta)+\log\cos\beta\\&=a\left(1-\frac{1}{a}\right)+\log\frac{1}{a}=a-\log a-1\end{aligned}$$

これが $1-\log 2$ に等しいから

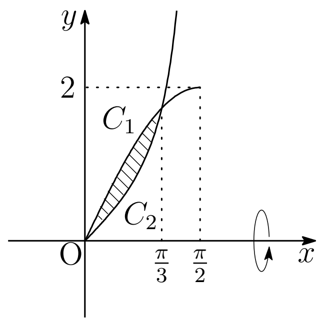
$$a-\log a-1=1-\log 2 \quad \text{ゆえに} \quad a-\log a=2-\log 2$$

上の第 2 式から　$f(a)=f(2)$

(1) の増減表により，$x>1$ において，$f(x)$ は単調増加であるから，上式をみたす a $(a>1)$ の値は

$$\boldsymbol{a=2}$$

（イ） $a=2$ より，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ に注意して



$$\cos\beta=\frac{1}{2}\quad \text{ゆえに}\quad \beta=\frac{\pi}{3}$$

$C_1 : y=2\sin x$，$C_2 : y=\tan x$ とする．
C_1，C_2 によって囲まれた図形 D は，右の図の斜線部分である．
よって，求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{(2\sin x)^2-\tan^2 x\right\}dx \\ &= \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(3-2\cos 2x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx \\ &= \pi\Big[\,3x-\sin 2x-\tan x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \boldsymbol{\pi\left(\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)} \end{aligned}$$