

平成 27 年度 福岡教育大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

教育学部 平成 27 年 2 月 25 日

- 中等教育 (数学専攻) ① ② ③ ④ 数 I・II・III・A・B (120 分)
- 初等教育 (数学専修) ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ 数 I・II・III・A・B (120 分)

① 次の問いに答えよ。

- (1) $(x - 3y + 2z)^7$ の展開式における x^4y^2z の項の係数を求めよ。
- (2) a は正の定数で, $a \neq 1$ とする. 不等式

$$\log_a(a - x - y) > \log_a x + \log_a y$$

が表す領域を図示せよ。

- (3) n は 3 以上の自然数とする. 数学的帰納法によって, 次の不等式を証明せよ。

$$2^n > \frac{1}{2}n^2 + n$$

② 次の問いに答えよ。

- (1) x がすべての実数を動くとき, $2^x + 2^{-x}$ の最小値を m とする. 次の (ア), (イ) に答えよ.
 (ア) m の値を求め, $2^x + 2^{-x} = m$ を満たす x を求めよ.
 (イ) $k > m$ のとき, $2^x + 2^{-x} = k$ を満たす x をすべて求めよ.
- (2) a を定数とし, $a \leq 2$ とする. 方程式

$$4^x + 4^{-x} - 3a \cdot 2^x - 3a \cdot 2^{-x} + 2(a^2 + 1) = 0$$

の異なる実数解の個数を求めよ。

③ 平面上に $\triangle ABC$ と点 O がある. $\triangle ABC$ の内部に点 D があって, 三角形の面積比が

$$\triangle DBC : \triangle DCA : \triangle DAB = p : q : r$$

であるとする. 次の問いに答えよ。

- (1) 直線 AD と辺 BC の交点を S , 直線 BD と辺 AC の交点を T とするとき, $BS : SC$ および $CT : TA$ を p, q, r を用いて表せ.
- (2) $\vec{OD} = \frac{p\vec{OA} + q\vec{OB} + r\vec{OC}}{p + q + r}$ となることを示せ.

4 a を正の定数とし、曲線 $y = a \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と曲線 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と y 軸によって囲まれる部分の面積が $\sqrt{3}-1$ であるとする。次の問いに答えよ。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 $y = a \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と曲線 $y = \tan x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) の交点を求めよ。
- (3) 曲線 $y = a \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と曲線 $y = \tan x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) と y 軸によって囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

5 次の問いに答えよ。

- (1) $(x - 3y + 2z)^7$ の展開式における $x^4 y^2 z$ の項の係数を求めよ。
- (2) a を定数とし、 $0 < a < 1$ とする。不等式

$$\log_a(a - x - y) > \log_a x + \log_a y$$

が表す領域を図示せよ。

- (3) n は 3 以上の自然数とする。数学的帰納法によって、次の不等式を証明せよ。

$$2^n > \frac{1}{2}n^2 + n$$

6 次の問いに答えよ。

- (1) x がすべての実数を動くとき、 $2^x + 2^{-x}$ の最小値を m とする。次の (ア)、(イ) に答えよ。
 - (ア) m の値を求め、 $2^x + 2^{-x} = m$ を満たす x を求めよ。
 - (イ) $k > m$ のとき、 $2^x + 2^{-x} = k$ を満たす x をすべて求めよ。
- (2) a を定数とし、 $1 < a \leq 2$ とする。方程式

$$4^x + 4^{-x} - 3a \cdot 2^x - 3a \cdot 2^{-x} + 2(a^2 + 1) = 0$$

が異なる 3 つの実数解をもつとき、その 3 つの実数解をすべて求めよ。

7 $\triangle ABC$ を1辺の長さが1の正三角形とし、 $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とする。次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル \vec{OA} の大きさを求めよ。
- (2) 点 P が $\triangle ABC$ の外接円上を動くとき、次の (ア), (イ) に答えよ。
 - (ア) 内積の和 $\vec{PA} \cdot \vec{PB} + \vec{PB} \cdot \vec{PC} + \vec{PC} \cdot \vec{PA}$ の値を求めよ。
 - (イ) 内積 $\vec{PA} \cdot \vec{PB}$ の最大値と最小値を求めよ。

8 次の問いに答えよ。ただし、対数は自然対数とする。

- (1) 関数 $f(x) = x - \log x$ の最小値を求めよ。
- (2) a を1より大きい定数とし、曲線 $y = a \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) と曲線 $y = \tan x$ ($0 \leq x < \frac{\pi}{2}$) によって囲まれる部分 D の面積が $1 - \log 2$ であるとする。次の (ア), (イ) に答えよ。
 - (ア) a の値を求めよ。
 - (イ) D を x 軸の周りに1回転させてできる立体の体積を求めよ。

解答例

1 (1) $\frac{7!}{4!2!1!}x^4(-3y)^2 \cdot 2z = 1890x^4y^2z$ よって、求める係数は **1890**

(2) $\log_a(a-x-y) > \log_a x + \log_a y \quad \dots (*)$

(*)において、真数は正であるから

$$a-x-y > 0 \quad \text{かつ} \quad x > 0 \quad \text{かつ} \quad y > 0$$

すなわち $x > 0, y > 0, x+y < a \quad \dots \textcircled{1}$

(*)から $\log_a(a-x-y) > \log_a xy \quad \dots \textcircled{2}$

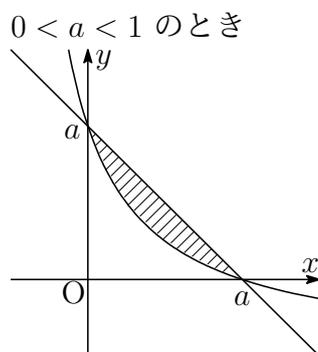
i) $0 < a < 1$ のとき、 $\textcircled{2}$ から

$$a-x-y < xy \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(y+1) > a+1$$

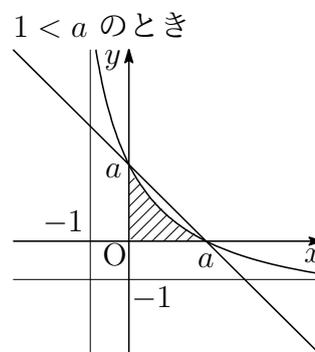
ii) $1 < a$ のとき、 $\textcircled{2}$ から

$$a-x-y > xy \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(y+1) < a+1$$

i), ii) および $\textcircled{1}$ から、求める領域は、次のようになる。



境界線を含まない



境界線を含まない

(3) $2^n > \frac{1}{2}n^2 + n \cdots (A)$ とする.

[1] $n = 3$ のとき

$$(\text{左辺}) = 2^3 = 8, \quad (\text{右辺}) = \frac{1}{2} \cdot 3^2 + 3 = \frac{15}{2}$$

よって, $n = 3$ のとき, (A) が成り立つ.

[2] $k \geq 3$ として, $n = k$ のとき, (A) が成り立つ, すなわち

$$2^k > \frac{1}{2}k^2 + k$$

が成り立つと仮定する.

$n = k + 1$ のとき, (A) の差を考えると

$$\begin{aligned} 2^{k+1} - \left\{ \frac{1}{2}(k+1)^2 + (k+1) \right\} &= 2 \cdot 2^k - \left(\frac{1}{2}k^2 + 2k + \frac{3}{2} \right) \\ &> 2 \left(\frac{1}{2}k^2 + k \right) - \left(\frac{1}{2}k^2 + 2k + \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(k^2 - 3) > 0 \end{aligned}$$

すなわち $2^{k+1} > \frac{1}{2}(k+1)^2 + (k+1)$

したがって, $n = k + 1$ のときも (A) が成り立つ.

[1], [2] から, 3 以上のすべての自然数 n について (A) が成り立つ. ■

2 (1)(ア) $2^x + 2^{-x} = (2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}})^2 + 2$

$2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 0$ すなわち $x = 0$ のとき, 最小値 m は 2

(イ) $t = 2^x$ とおくと, $2^x + 2^{-x} = k \cdots \textcircled{1}$ より

$$t + \frac{1}{t} = k \quad \text{すなわち} \quad t^2 - kt + 1 = 0$$

$k > 2$ に注意して, これを解くと $t = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$

ゆえに $2^x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ よって $x = \log_2 \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$

(2) 方程式 $4^x + 4^{-x} - 3a \cdot 2^x - 3a \cdot 2^{-x} + 2(a^2 + 1) = 0 \cdots (*)$ を変形すると

$$(2^x + 2^{-x})^2 - 3a(2^x + 2^{-x}) + 2a^2 = 0$$

$\textcircled{1}$ から $k^2 - 3ak + 2a^2 = 0$ ゆえに $(k - a)(k - 2a) = 0 \cdots \textcircled{2}$

(1) の結果より $k \geq 2$ であるから, $\textcircled{2}$ の実数解は, $a \leq 2$ に注意して

$2a < 2$	すなわち	$a < 1$ のとき	実数解はない
$2a = 2$	すなわち	$a = 1$ のとき	$k = 2$
$a < 2 < 2a$	すなわち	$1 < a < 2$ のとき	$k = 2a$
		$a = 2$ のとき	$k = 2, 4$

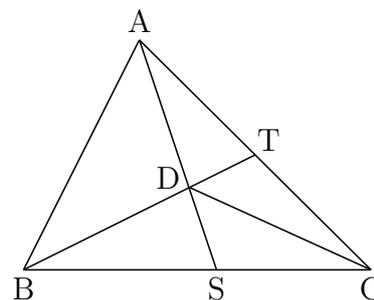
$\textcircled{1}$ が実数解をもつのは, $k \geq 2$ のときで, $k = 2$ のとき実数解は 1 個, $k > 2$ のとき実数解は 2 個であるから, 方程式 $(*)$ の実数解の個数は

$$\left\{ \begin{array}{ll} a < 1 \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ a = 1 \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ 1 < a < 2 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ a = 2 \text{ のとき} & 3 \text{ 個} \end{array} \right.$$



3 (1) 右の図から

$$\begin{aligned} BS : SC &= \triangle SAB : \triangle SCA \\ &= \triangle DAB : \triangle DCA = r : q, \\ CT : TA &= \triangle TBC : \triangle TAB \\ &= \triangle DBC : \triangle DAB = p : r \end{aligned}$$



(2) $\triangle BCT$ および直線 AS について、メネラウスの定理を適用すると

$$\frac{BS}{SC} \cdot \frac{CA}{AT} \cdot \frac{TD}{DB} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{r}{q} \times \frac{p+r}{r} \times \frac{TD}{DB} = 1$$

したがって $TD : DB = q : p+r$

D は TB を $q : p+r$ に内分する点であるから

$$\vec{OD} = \frac{(p+r)\vec{OT} + q\vec{OB}}{q + (p+r)} \quad \dots \textcircled{1}$$

T は CA を $p : r$ に内分する点であるから

$$\vec{OT} = \frac{r\vec{OC} + p\vec{OA}}{p+r} \quad \dots \textcircled{2}$$

②を①に代入すると

$$\vec{OD} = \frac{(p+r) \cdot \frac{r\vec{OC} + p\vec{OA}}{p+r} + q\vec{OB}}{q + (p+r)} = \frac{p\vec{OA} + q\vec{OB} + r\vec{OC}}{p+q+r}$$



- 4 (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における2つの曲線を

$$C_1: y = a \cos x, \quad C_2: y = \sin x$$

とし、これらの交点の x 座標を β とすると

$$a \cos \beta = \sin \beta$$

$$\text{ゆえに} \quad \sin \beta - a \cos \beta = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

右の図の斜線部分の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^\beta (a \cos x - \sin x) dx &= \left[a \sin x + \cos x \right]_0^\beta \\ &= a \sin \beta + \cos \beta - 1 \end{aligned}$$

条件により、これが $\sqrt{3} - 1$ に等しいから

$$a \sin \beta + \cos \beta - 1 = \sqrt{3} - 1 \quad \text{ゆえに} \quad a \sin \beta + \cos \beta = \sqrt{3} \quad \cdots \textcircled{2}$$

次の等式

$$(\sin \beta - a \cos \beta)^2 + (a \sin \beta + \cos \beta)^2 = a^2 + 1$$

に ①, ② を代入すると

$$3 = a^2 + 1 \quad \text{このとき, } a > 0 \text{ により} \quad a = \sqrt{2}$$

- (2) $\begin{cases} y = \sqrt{2} \cos x & \cdots \textcircled{3} \\ y = \tan x & \cdots \textcircled{4} \end{cases}$ とおく. ③, ④ から y を消去すると

$$\sqrt{2} \cos x = \tan x \quad \text{ゆえに} \quad \sqrt{2} \cos^2 x = \sin x$$

$$\text{整理すると} \quad \sqrt{2} \sin^2 x + \sin x - \sqrt{2} = 0$$

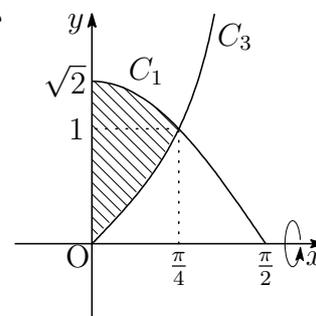
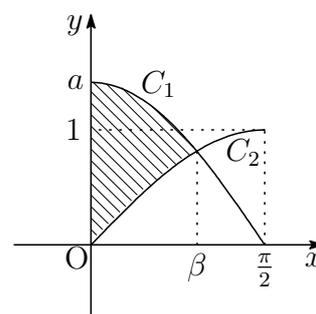
$$\text{したがって} \quad (\sin x + \sqrt{2})(\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ に注意して, これを解くと} \quad x = \frac{\pi}{4}$$

これを ④ に代入して $y = 1$ よって、求める交点は $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

- (3) $C_3: y = \tan x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) とおく. 右の図から求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2 \cos^2 x - \tan^2 x) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x} + 2 \right) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \tan x + 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} (\pi - 1) \end{aligned}$$



■

5 (1) $\frac{7!}{4!2!1!}x^4(-3y)^2 \cdot 2z = 1890x^4y^2z$ よって、求める係数は **1890**

(2) $\log_a(a-x-y) > \log_a x + \log_a y \quad \dots (*)$

(*)において、真数は正であるから

$$a-x-y > 0 \quad \text{かつ} \quad x > 0 \quad \text{かつ} \quad y > 0$$

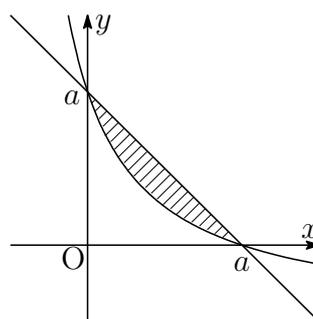
すなわち $x > 0, \quad y > 0, \quad x+y < a \quad \dots \textcircled{1}$

(*)から $\log_a(a-x-y) > \log_a xy \quad \dots \textcircled{2}$

$0 < a < 1$ であるから、 $\textcircled{2}$ より

$$a-x-y < xy \quad \text{すなわち} \quad (x+1)(y+1) > a+1$$

上式および $\textcircled{1}$ から、求める領域は、次のようになる。



境界線を含まない

(3) **1** (3) を参照.



6 (1)(ア) $2^x + 2^{-x} = (2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}})^2 + 2$

$2^{\frac{x}{2}} - 2^{-\frac{x}{2}} = 0$ すなわち $x = 0$ のとき, 最小値 m は **2**

(イ) $t = 2^x$ とおくと, $2^x + 2^{-x} = k \cdots \textcircled{1}$ より

$$t + \frac{1}{t} = k \quad \text{すなわち} \quad t^2 - kt + 1 = 0$$

$k > 2$ に注意して, これを解くと $t = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$

ゆえに $2^x = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$ よって $x = \log_2 \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$

(2) 方程式 $4^x + 4^{-x} - 3a \cdot 2^x - 3a \cdot 2^{-x} + 2(a^2 + 1) = 0 \cdots (*)$ を変形すると

$$(2^x + 2^{-x})^2 - 3a(2^x + 2^{-x}) + 2a^2 = 0$$

$\textcircled{1}$ から $k^2 - 3ak + 2a^2 = 0$ ゆえに $(k - a)(k - 2a) = 0 \cdots \textcircled{2}$

(1) の結果より $k \geq 2$ であるから, $\textcircled{2}$ の実数解は, $1 < a \leq 2$ に注意して

$$\begin{aligned} a < 2 < 2a \quad \text{すなわち} \quad 1 < a < 2 \text{ のとき} \quad k &= 2a \\ a = 2 \text{ のとき} \quad k &= 2, 4 \end{aligned}$$

方程式 $(*)$ が 3 つの実数解をもつのは, $a = 2$ のときである.

このとき, $k = 2, 4$ を (1) の結果に代入して

$$x = 0, \log_2(2 \pm \sqrt{3})$$



- 7 (1) $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理により

$$2R = \frac{1}{\sin 60^\circ} \quad \text{よって} \quad R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{OA} \text{ の大きさは } R \text{ であるから} \quad |\vec{OA}| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(2)(ア) \quad \begin{aligned} \vec{PA} \cdot \vec{PB} &= (\vec{OA} - \vec{OP}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OP}) \\ &= \vec{OA} \cdot \vec{OB} - (\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{OP} + |\vec{OP}|^2 \end{aligned}$$

$$\text{このとき} \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos 120^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{6}$$

$$|\vec{OP}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{ゆえに} \quad \vec{PA} \cdot \vec{PB} = \frac{1}{6} - (\vec{OA} + \vec{OB}) \cdot \vec{OP}$$

$$\text{同様に} \quad \vec{PB} \cdot \vec{PC} = \frac{1}{6} - (\vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \vec{OP}$$

$$\vec{PC} \cdot \vec{PA} = \frac{1}{6} - (\vec{OC} + \vec{OA}) \cdot \vec{OP}$$

上の3式の辺々を加えると

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} + \vec{PB} \cdot \vec{PC} + \vec{PC} \cdot \vec{PA} = \frac{1}{2} - 2(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \cdot \vec{OP}$$

$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ であるから

$$\vec{PA} \cdot \vec{PB} + \vec{PB} \cdot \vec{PC} + \vec{PC} \cdot \vec{PA} = \frac{1}{2}$$

- (イ) i) P が A, B に一致するとき $\vec{PA} \cdot \vec{PB} = 0$

- ii) P が弦 AB に関して C と同じ側にあるとき, $\angle APB = 60^\circ$
 $x = PA, y = PB$ とし, $\triangle APB$ に余弦定理を適用すると

$$1^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ \quad \text{ゆえに} \quad xy = 1 - (x - y)^2 \leq 1$$

$$\text{したがって} \quad \vec{PA} \cdot \vec{PB} = xy \cos 60^\circ = \frac{1}{2} xy \leq \frac{1}{2}$$

- iii) P が弦 AB に関して C と反対側にあるとき, $\angle APB = 120^\circ$
同様に, $\triangle APB$ に余弦定理を適用すると

$$1^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 120^\circ \quad \text{ゆえに} \quad xy = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(x - y)^2 \leq \frac{1}{3}$$

$$\text{したがって} \quad \vec{PA} \cdot \vec{PB} = xy \cos 120^\circ = -\frac{1}{2} xy \geq -\frac{1}{6}$$

- i)~iii) により, 最大値 $\frac{1}{2}$, 最小値 $-\frac{1}{6}$ ■

8 (1) $f(x) = x - \log x$ を微分すると

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は、次のようになる.

x	(0)	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	1	↗

よって、最小値は $f(1) = 1$

(2)(ア) $\begin{cases} y = a \sin x & \cdots \textcircled{1} \\ y = \tan x & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ とおく. $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ から y を消去すると

$$a \sin x = \tan x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x \left(a - \frac{1}{\cos x} \right) = 0$$

したがって、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ の交点の x 座標は

$$x = 0, \beta \quad \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2}, \cos \beta = \frac{1}{a} \right)$$

また、 $0 \leq x \leq \beta$ において

$$a \sin x - \tan x = \sin x \left(a - \frac{1}{\cos x} \right) \geq 0$$

$0 \leq x \leq \beta$ において、 $y = a \sin x$ と $y = \tan x$ で囲まれた図形の面積は

$$\begin{aligned} \int_0^\beta (a \sin x - \tan x) &= \left[-a \cos x + \log \cos x \right]_0^\beta \\ &= a(1 - \cos \beta) + \log \cos \beta \\ &= a \left(1 - \frac{1}{a} \right) + \log \frac{1}{a} = a - \log a - 1 \end{aligned}$$

これが $1 - \log 2$ に等しいから

$$a - \log a - 1 = 1 - \log 2 \quad \text{ゆえに} \quad a - \log a = 2 - \log 2$$

上の第2式から $f(a) = f(2)$

(1) の増減表により、 $x > 1$ において、 $f(x)$ は単調増加であるから、上式をみたす a ($a > 1$) の値は

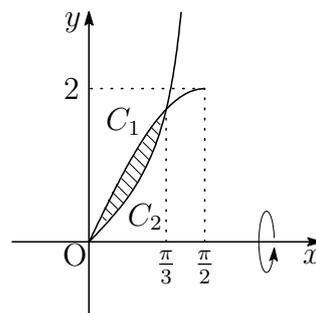
$$a = 2$$

(イ) $a = 2$ より, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ に注意して

$$\cos \beta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \beta = \frac{\pi}{3}$$

$C_1 : y = 2 \sin x$, $C_2 : y = \tan x$ とする.

C_1 , C_2 によって囲まれた図形 D は, 右の図の斜線部分である.



よって, 求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \{(2 \sin x)^2 - \tan^2 x\} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(3 - 2 \cos 2x - \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= \pi \left[3x - \sin 2x - \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \pi \left(\pi - \frac{3}{2} \sqrt{3} \right) \end{aligned}$$

■