# 平成26年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
# 教育学部　平成26年2月25日

- 中等教育 (数学専攻) は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 初等教育 (数学専修) は，$\boxed{1}$ , $\boxed{5}$ 〜 $\boxed{7}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \pi$，$0 \leqq y \leqq \pi$ のとき，連立方程式

$$3\sin x - \sin y = \sqrt{3}, \quad 3\cos x + \cos y = -1$$

を解け．

(2) $a$，$b$，$c$ を実数とする．$a+b+c = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 1$ である．$a$，$b$，$c$ のうち少なくとも1つは1に等しいことを示せ．

(3) 0，1，2，3，4，5の数字が1つずつ記入された6枚のカードが入っている箱から1枚ずつ3枚のカードを取り出し，左から並べて自然数 $n$ を作るとき，次の (ア)，(イ) に答えよ．ただし，例えば012は12を表すものとする．

(ア) $n$ が3桁の自然数になるのは何通りか．

(イ) 3桁の自然数 $n$ を作った後，箱の中に残っている3枚のカードを左から並べて3桁の自然数 $m$ を作るとき，$n+m=555$ となる $n$ は何通りか．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平面上に △OAB と点Pがあり，実数 $k$，$m$，$n$ に対して

$$k\overrightarrow{\mathrm{PO}} + m\overrightarrow{\mathrm{PA}} + n\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{0}$$

が成り立つとする．次の問いに答えよ．

(1) $k=4$，$m=1$，$n=2$ のとき，△POA，△POB，△PAB の面積比を最も簡単な整数の比で表せ．

(2) $k$ を0以上の定数とする．点Pが $m \geqq 0$，$n \geqq 0$，$m+n=3$ を満たしながら動くとき，点Pの軌跡は線分になることを示せ．

(3) 点Pが $k \geqq 1$，$m \geqq 0$，$n \geqq 0$，$m+n=3$ を満たしながら動くとき，点Pの存在する領域 $D$ を図示せよ．また，領域 $D$ の面積は △OAB の面積の何倍になるかを求めよ．

**3** $a$ を定数とする．$a_n = -2n + a$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を次のような群に分け，第 $k$ 群には $k$ 個の項が入るようにする．

| $a_1$ | $a_2,\ a_3$ | $a_4,\ a_5,\ a_6$ | $a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| 第 1 群 | 第 2 群 | 第 3 群 | 第 4 群 | |

第 $k$ 群に含まれるすべての項の和を $S_k$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $S_k$ を求めよ．

(2) $a = 212$ のとき，$S_k$ が最大となる群に含まれる項の平均値を求めよ．

(3) $a = 92$ のとき，$|S_k| = |S_{k+1}|$ を満たす $k$ を求めよ．

**4** $a$ を正の定数とする．関数 $f(x)$ は

$$f(x) = 2\cos x - a\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin x\,dt$$

を満たしているとする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}$ を満たす定数 $a$ の値を求めよ．

(3) $a$ が (2) で求めた値のとき，次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) $0 \leqq x \leqq \pi$ における関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ．

(イ) $\displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$ の値を求めよ．

**5** 正六角形 ABCDEF において，辺 DE の中点を P とし，線分 AP と BF の交点を Q とする．次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を用いて表せ．

(2) AQ : QP を最も簡単な整数の比で表せ．

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$ のとき，$\triangle$BPQ の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $a_n = -2n + 212$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を次のような群に分け，第 $k$ 群には $k$ 個の項が入るようにする．

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2,\ a_3$ | $a_4,\ a_5,\ a_6$ | $a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10}$ | $\cdots$ |
| 第 1 群 | 第 2 群 | 第 3 群 | 第 4 群 | |

第 $k$ 群に含まれるすべての項の和を $S_k$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $S_k$ を求めよ．

(2) $S_k$ が最大となる群に含まれる項の平均値を求めよ．

(3) $|S_k| = |S_{k+1}|$ を満たす $k$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $a$ を正の定数とし，曲線 $y = \dfrac{\log x}{a}$ を $C$ とする．次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とし，$e$ は自然対数の底とする．

(1) 点 $\left(0,\ 1 - \dfrac{1}{a}\right)$ から曲線 $C$ に引いた接線の方程式を $a$ を用いて表せ．

(2) (1) で求めた接線と曲線 $C$ と $x$ 軸によって囲まれた部分のうち第 1 象限の部分の面積を $a$ を用いて表せ．

(3) 曲線 $C$ が曲線 $y = \dfrac{x^2}{2e}$ と共有点をもち，その点における 2 つの曲線の接線が一致しているとき，曲線 $C$ と曲線 $y = \dfrac{x^2}{2e}$ と $x$ 軸によって囲まれた部分の面積を求めよ．

# 正解

**1** (1) 与えられた 2 式から

$$\sin y = 3\sin x - \sqrt{3} \quad \cdots ①, \quad \cos y = -3\cos x - 1 \quad \cdots ②$$

①，② を $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ に代入すると

$$(3\sin x - \sqrt{3})^2 + (-3\cos x - 1)^2 = 1$$

整理すると　$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2$　ゆえに　$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$0 \leqq x \leqq \pi$ であるから　　$\boldsymbol{x = \frac{2}{3}\pi}$

これを ①，② に代入すると

$$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos y = \frac{1}{2}$$

$0 \leqq y \leqq \pi$ であるから　　$\boldsymbol{y = \frac{\pi}{3}}$

(2) 与えられた条件から

$$1 - (a + b + c) = 0, \quad ab + bc + ca - abc = 0$$

ここで，$f(x) = (x - a)(x - b)(x - c)$ とおくと，3 次方程式 $f(x) = 0$ の解は，$a$，$b$，$c$ である．このとき，上の 2 式より

$$\begin{aligned} f(1) &= (1 - a)(1 - b)(1 - c) \\ &= 1 - (a + b + c) + ab + bc + ca - abc \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって，1 は，$f(x) = 0$ の解である．
よって，$a$，$b$，$c$ のうち少なくとも 1 つは 1 に等しい．

(3) (ア) 0，1，2，3，4，5 の 6 枚のカードから 3 枚のカードを取り出し左から並べてできる自然数の個数は

$$ {}_6\mathrm{P}_3 = 120 \text{ (通り)} $$

このうち，2 桁の自然数の個数は

$$ {}_5\mathrm{P}_2 = 20 \text{ (通り)} $$

よって，求める個数は　$120 - 20 = \mathbf{100}$ (通り)

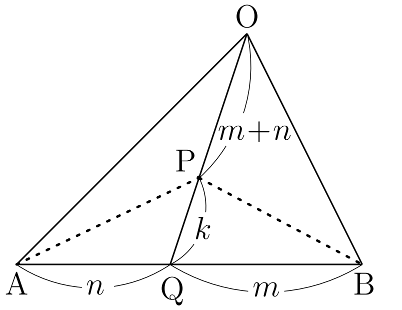
(イ) $A = \{0,\ 5\}$，$B = \{1,\ 4\}$，$C = \{2,\ 3\}$，$a \in A$，$b \in B$，$c \in C$ とすると，3 桁の自然数 $n$ は $a$，$b$，$c$ を並べる次の 4 通りである．

$$ bac,\quad bca,\quad cab,\quad cba $$

$a$，$b$，$c$ の選び方は，それぞれ 2 通りであるから，求める場合の数は

$$ 4 \times 2^3 = \mathbf{32} \text{ (通り)} $$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 線分 AB を $n:m$ に内分する点を Q とすると




$$m\overrightarrow{\mathrm{PA}}+n\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(m+n)\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

これを条件式

$$k\overrightarrow{\mathrm{PO}}+m\overrightarrow{\mathrm{PA}}+n\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{0}\quad\cdots(*)$$

に代入すると

$$k\overrightarrow{\mathrm{PO}}+(m+n)\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\vec{0}\quad\cdots(**)$$

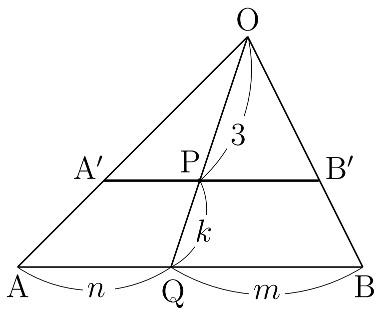
P は線分 OQ を $m+n:k$ に内分する点であるから，$S=\triangle\mathrm{OAB}$ とおくと

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{PAB}&=\frac{k}{k+(m+n)}S,\\ \triangle\mathrm{POB}&=\frac{m+n}{k+(m+n)}\triangle\mathrm{OBQ}\\ &=\frac{m+n}{k+(m+n)}\times\frac{m}{m+n}S=\frac{m}{k+(m+n)}S,\\ \triangle\mathrm{POA}&=\frac{m+n}{k+(m+n)}\triangle\mathrm{OAQ}\\ &=\frac{m+n}{k+(m+n)}\times\frac{n}{m+n}S=\frac{n}{k+(m+n)}S\end{aligned}$$

$(*)$ が成り立つとき　　$\triangle\mathrm{PAB}:\triangle\mathrm{POB}:\triangle\mathrm{POA}=k:m:n$

よって　　$\triangle\mathrm{POA}:\triangle\mathrm{POB}:\triangle\mathrm{PAB}=n:m:k=\mathbf{2:1:4}$

(2) $m+n=3$ を $(**)$ に代入すると




$$-k\overrightarrow{\mathrm{OP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\vec{0}$$

ゆえに　　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{3}{k+3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$

OA，OB を $3:k$ に内分する点を，それぞれ A′，B′ とする．$m\geqq 0$，$n\geqq 0$ であるから，点 P の軌跡は線分 A′B′ である．

(3) $k=1$ のとき，A′，B′ は，それぞれ OA，OB を $3:1$ に内分する点であるから，$k\geqq 1$，$m\geqq 0$，$n\geqq 0$ のとき，$D$ の表す領域は $\triangle\mathrm{OA'B'}$ である．したがって，$D$ の面積は $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の

$$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\mathbf{\frac{9}{16}}\quad 倍$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 第 $k$ 群の初項および末項は，$\{a_n\}$ のそれぞれ第 $\frac{1}{2}k(k-1)+1$ 項，第 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 項であるから

$$a_{\frac{1}{2}k(k-1)+1} = -2\left\{\frac{1}{2}k(k-1)+1\right\}+a = -k^2+k-2+a$$
$$a_{\frac{1}{2}k(k+1)} = -2\times\frac{1}{2}k(k+1)+a = -k^2-k+a$$

よって　$S_k = \frac{1}{2}k\{(-k^2+k-2+a)+(-k^2-k+a)\}$

$$= \boldsymbol{-k^3+(a-1)k}$$

(2) (1) の結果から，$a=212$ のとき，$S_k = -k^3+211k$ であるから

$$\begin{aligned} S_{k+1}-S_k &= \{-(k+1)^3+211(k+1)\}-(-k^3+211k) \\ &= 3\{70-k(k+1)\} \end{aligned}$$

ゆえに　$S_1 < S_2 < \cdots < S_8 > S_9 > S_{10} > \cdots$

$S_k$ の群に含まれる項の平均は，(1) の結果から

$$\frac{S_k}{k} = \frac{-k^3+211k}{k} = -k^2+211$$

よって，求める値は　$-8^2+211=\mathbf{147}$

(3) (1) の結果から，$a=92$ のとき，$S_k=-k^3+91k$ であるから

$$\begin{aligned} S_{k+1}-S_k &= \{-(k+1)^3+91(k+1)\}-(-k^3+91k) \\ &= -3(k-5)(k+6) \\ S_{k+1}+S_k &= \{-(k+1)^3+91(k+1)\}+(-k^3+91k) \\ &= -2k^3-3k^2+179k+90 \\ &= -(k-9)(k+10)(2k+1) \end{aligned}$$

よって，$|S_k|=|S_{k+1}|$ を満たす自然数 $k$ は　$\boldsymbol{k=5,\ 9}$

補足 $S_k=k(91-k^2)$ より，$k \leqq 9$ のとき $S_k>0$，$k \geqq 10$ のとき $S_{k+1}<0$ であることに注意すると

$$S_9 = 90, \quad S_{10} = -90$$

したがって，$S_{k+1}+S_k$ は $k-9$ を因数にもつことが分かる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 与えられた関数は　　$f(x) = 2\cos x - a\sin x \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dx$

$k = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$ とおくと，$f(x) = 2\cos x - ak\sin x$ より

$$\begin{aligned} k &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos x - ak\sin x)\,dx \\ &= \Big[\ 2\sin x + ak\cos x\ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 - ak \end{aligned}$$

$a > 0$ に注意して，$k = 2 - ak$ を $k$ について解くと　$k = \dfrac{2}{a+1}$

よって　　$\boldsymbol{f(x) = 2\cos x - \dfrac{2a}{a+1}\sin x}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx &= \int_0^{\pi} \left(2\sin x\cos x - \frac{2a}{a+1}\sin^2 x\right) dx \\ &= \int_0^{\pi} \left\{\sin 2x - \frac{a}{a+1}(1-\cos 2x)\right\} dx = -\frac{\pi a}{a+1} \end{aligned}$$

条件により　　$-\dfrac{\pi a}{a+1} = -\dfrac{\pi}{2}$　　これを解いて　　$\boldsymbol{a = 1}$

(3)(ア) (1)，(2) の結果から　　$f(x) = -\sin x + 2\cos x$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ を満たす $\alpha$ $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$ を用いると

$$f(x) = -\sqrt{5}\sin(x - \alpha)$$

よって，最大値 $f(0) = \mathbf{2}$，最小値 $f(\alpha + \frac{\pi}{2}) = \boldsymbol{-\sqrt{5}}$

(イ) (ア) の結果を用いて

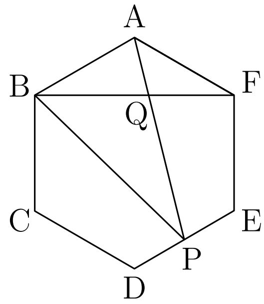
$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx &= -\sqrt{5}\int_0^{\alpha} \sin(x-\alpha)dx + \sqrt{5}\int_{\alpha}^{\pi} \sin(x-\alpha)dx \\ &= \sqrt{5}\Big[\ \cos(x-\alpha)\ \Big]_0^{\alpha} - \sqrt{5}\Big[\ \cos(x-\alpha)\ \Big]_{\alpha}^{\pi} \\ &= \sqrt{5}\,(1 - \cos\alpha) - \sqrt{5}\,(-\cos\alpha - 1) \\ &= \boldsymbol{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AF}}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AD}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}})$

$= \dfrac{\mathbf{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AF}}}{\mathbf{2}}$




(2) (1) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{7}{2} \times \frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{7}$

ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = \frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}} + 4\overrightarrow{\mathrm{AF}}}{7} \cdots ①$　したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{7}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

よって　$\mathrm{AQ} : \mathrm{QP} = 1 : \frac{7}{2} - 1 = \mathbf{2 : 5}$

(3) $\triangle\mathrm{ABF} = \frac{1}{2}\cdot 1 \cdot 1 \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}$

① より，$\mathrm{BQ} : \mathrm{QF} = 4 : 3$ であるから

$$\triangle\mathrm{ABQ} = \frac{4}{4+3}\triangle\mathrm{ABF} = \frac{4}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{7}$$

(2) の結果から

$$\triangle\mathrm{BPQ} = \frac{5}{2}\triangle\mathrm{ABQ} = \frac{5}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{7} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{14}}\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 第 $k$ 群の初項および末項は，$\{a_n\}$ のそれぞれ第 $\dfrac{1}{2}k(k-1)+1$ 項，第 $\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 項であるから

$$a_{\frac{1}{2}k(k-1)+1} = -2\left\{\frac{1}{2}k(k-1)+1\right\}+212 = -k^2+k+210$$
$$a_{\frac{1}{2}k(k+1)} = -2\times\frac{1}{2}k(k+1)+212 = -k^2-k+212$$

よって $\quad S_k = \dfrac{1}{2}k\{(-k^2+k+210)+(-k^2-k+212)\}$

$\quad = \boldsymbol{-k^3+211k}$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S_{k+1}-S_k &= \{-(k+1)^3+211(k+1)\}-(-k^3+211k) \\ &= 3\{70-k(k+1)\} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

ゆえに $\quad S_1 < S_2 < \cdots < S_8 > S_9 > S_{10} > \cdots$

$S_k$ の群に含まれる項の平均は，(1) の結果から

$$\frac{S_k}{k} = \frac{-k^3+211k}{k} = -k^2+211$$

よって，求める値は $\quad -8^2+211 = \mathbf{147}$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned} S_{k+1}+S_k &= \{-(k+1)^3+211(k+1)\}+(-k^3+211k) \\ &= -2k^3-3k^2+419k+210 \\ &= -(k-14)(k+15)(2k+1) \quad \cdots ② \end{aligned}$$

①，② より，$|S_k| = |S_{k+1}|$ を満たす自然数 $k$ は $\qquad \boldsymbol{k=14}$

補足 $S_k = k(211-k^2)$ より，$k \leqq 14$ のとき $S_k > 0$，$k \geqq 15$ のとき $S_{k+1} < 0$ であることに注意すると

$$S_{14} = 14\cdot 15, \quad S_{15} = -15\cdot 14$$

したがって，$S_{k+1}+S_k$ は $k-14$ を因数にもつことが分かる．

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $y=\dfrac{\log x}{a}$ を微分すると　$y'=\dfrac{1}{ax}$

接点の座標を $\left(t,\ \dfrac{\log t}{a}\right)$ とすると，接線の傾きは $\dfrac{1}{at}$ であるから，

その方程式は

$$y-\frac{\log t}{a}=\frac{1}{at}(x-t)\quad\text{すなわち}\quad y=\frac{x}{at}+\frac{\log t-1}{a}\qquad\cdots①$$

これが，点 $\left(0,\ 1-\dfrac{1}{a}\right)$ を通るから

$$\frac{\log t-1}{a}=1-\frac{1}{a}\quad\text{ゆえに}\quad t=e^a$$

① より，接線の方程式は　$\boldsymbol{y=\dfrac{x}{ae^a}+1-\dfrac{1}{a}}$

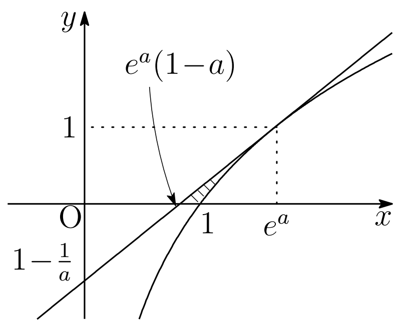
(2) 曲線 $y=\dfrac{\log x}{a}$，2 直線 $x=1$，$x=e^a$ および $x$ 軸で囲まれた部分の面積を $S$ とすると

$$S=\int_1^{e^a}\frac{\log x}{a}=\frac{1}{a}\Big[\,x(\log x-1)\,\Big]_1^{e^a}=\frac{1}{a}(ae^a-e^a+1)$$

i) $0<a<1$ のとき

右の図の斜線部分の面積は

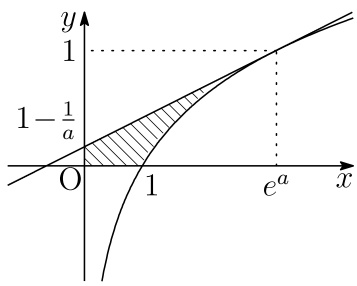
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{e^a-e^a(1-a)\}\cdot 1-S\\ =&\frac{1}{2}ae^a-\frac{1}{a}(ae^a-e^a+1)\\ =&\boldsymbol{e^a\left(\frac{a}{2}-1+\frac{1}{a}\right)-\frac{1}{a}}\end{aligned}$$




ii) $a\geqq 1$ のとき

右の図の斜線部分の面積は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}e^a\left\{1+\left(1-\frac{1}{a}\right)\right\}\cdot 1-S\\ =&e^a\left(1-\frac{1}{2a}\right)-\frac{1}{a}(ae^a-e^a+1)\\ =&\boldsymbol{\frac{e^a}{2a}-\frac{1}{a}}\end{aligned}$$



(3) 曲線 $C$ と $y=\dfrac{x^2}{2e}$ の接点の $x$ 座標を $u$ とすると

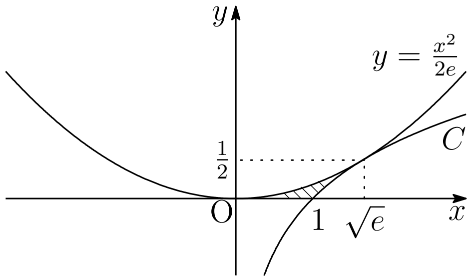
$$\frac{\log u}{a}=\frac{u^2}{2e} \quad \cdots ②$$

$y=\dfrac{x^2}{2e}$ を微分すると，$y'=\dfrac{x}{e}$．接点における接線の傾きが等しいので

$$\frac{1}{au}=\frac{u}{e} \quad \cdots ③$$

②，③ を解いて　$u=\sqrt{e}$，$a=1$

求める面積は，下の図の斜線部分の面積である．




この面積を $S$ とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{\sqrt{e}}\frac{x^2}{2e}\,dx-\int_1^{\sqrt{e}}\log x\,dx\\&=\left[\ \frac{x^3}{6e}\ \right]_0^{\sqrt{e}}-\left[\ x(\log x-1)\ \right]_1^{\sqrt{e}}\\&=\boldsymbol{\frac{2}{3}\sqrt{e}-1}\end{aligned}$$