平成25年度　福岡教育大学２次試験前期日程(数学問題)
教育学部　平成25年2月25日

- 中等教育(数学専攻)は，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 初等教育(数学専修)は，$\boxed{2}$, $\boxed{4}$ 〜 $\boxed{6}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 実数x，yが$(x-2)^2+y^2 \leqq 3$を満たすとき，$\dfrac{y-7}{x}$のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 4次方程式$x^4+ax^3+14x^2+16x+b=0$が$x=-2$を2重解としてもつとき，定数a，bの値と他の解を求めよ．

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，関数$y=\sin^2\theta-\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの$\theta$の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 1枚の硬貨を投げて，表が出ると2点入り，裏が出ると-1点入るゲームを考える．このゲームを繰り返し6回行ったときの合計得点をX点とする．次の問いに答えよ．

(1) Xが3である確率を求めよ．

(2) Xが負である確率を求めよ．

(3) Xの期待値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 点$\mathrm{A}(a,\ 0)$と楕(だ)円C : $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$を考える．点Aと楕円C上の点$\mathrm{P}(u,\ v)$との距離をdとする．ただし，aは正の定数とする．次の問いに答えよ．

(1) dをuの式で表せ．

(2) dの最小値を求めよ．また，そのときのuの値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x)=xe^{-\frac{x}{2}}$，$g(x)=\sqrt{e}\,x$とする．次の問いに答えよ．ただし，eは自然対数の底とする．

(1) $f(x)$の極値を求めよ．

(2) kを定数とする．$0 \leqq x \leqq 4$の範囲で$f(x)=k$の実数解の個数を求めよ．

(3) 2つの曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$で囲まれた部分の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 実数 x，y が $(x-2)^2+y^2 \leqq 3$ を満たすとき，$\dfrac{y-7}{x}$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 自然数 n について $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを数学的帰納法によって証明せよ．

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta-\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1=1, \quad a_n=\frac{a_{n-1}}{(4n+3)a_{n-1}+5} \quad (n=2,3,4,\cdots)$$

次の問いに答えよ．

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ．

(2) (1) の b_n を用いて $c_n=b_{n+1}-b_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $k=\dfrac{y-7}{x}$ とおくと　$y=kx+7$

これを $(x-2)^2+y^2 \leqq 3$ に代入すると　$(x-2)^2+(kx+7)^2 \leqq 3$

整理すると　　$(k^2+1)x^2+2(7k-2)x+50 \leqq 0$

$k^2+1>0$ であるから，この不等式が実数解をもつとき

$$D/4=(7k-2)^2-(k^2+1)\cdot 50 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad k^2+28k+46 \leqq 0$$

よって　　$\boldsymbol{-14-5\sqrt{6} \leqq k \leqq -14+5\sqrt{6}}$

別解 $k=\dfrac{y-7}{x}$ とおくと　$kx-y+7=0$

直線 $kx-y+7=0$ が領域 $(x-2)^2+y^2 \leqq 3$ と共有点をもつような k の値の範囲を求めればよい．すなわち，点 $(2,\ 0)$ から直線 $kx-y+7=0$ までの距離 d が，$d \leqq \sqrt{3}$ であればよい．したがって

$$\frac{|\,k\cdot 2-0+7\,|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} \leqq \sqrt{3} \quad \text{ゆえに} \quad (2k+7)^2 \leqq 3(k^2+1)$$

整理すると　$k^2+28k+46 \leqq 0$　よって　$-14-5\sqrt{6} \leqq k \leqq -14+5\sqrt{6}$

(2) 4 次方程式 $x^4+ax^3+14x^2+16x+b=0$ が $x=-2$ を 2 重解としてもつから

$$x^4+ax^3+14x^2+16x+b=(x^2+4x+4)(x^2+px+q) \quad \cdots(*)$$

とおいて (p，q は定数)，右辺を展開すると

$$x^4+ax^3+14x^2+16x+b=x^4+(p+4)x^3+(4p+q+4)x^2+(4p+4q)x+4q$$

となる．上式は，x に関する恒等式であるから，2 次の項と 1 次の項の係数を比較すると

$$14=4p+q+4,\ \ 16=4p+4q \quad \text{これを解いて} \quad p=2,\ q=2$$

また，3 次の項の係数と定数項を比較して

$$a=p+4,\ \ b=4q \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=6,\ b=8}$$

求める他の解は $(*)$ より，$x^2+2x+2=0$ を解いて　$\boldsymbol{x=-1\pm i}$

別解 $f(x)=x^4+ax^3+14x^2+16x+b$ とおいて，x について微分すると

$$f'(x)=4x^3+3ax^2+28x+16$$

$f(x)$ は $(x+2)^2$ を因数にもつので，2 次の整式 $g(x)$ を用いて

$$f(x)=(x+2)^2g(x) \quad ゆえに \quad f(-2)=0$$

上式の $f(x)$ を x について微分すると

$$f'(x)=2(x+2)g(x)+(x+2)^2g'(x) \quad ゆえに \quad f'(-2)=0$$

したがって，$f(-2)=0$ より

$$(-2)^4+a(-2)^3+14(-2)^2+16(-2)+b=0 \quad ゆえに \quad b=8a-40$$

また，$f'(-2)=0$ より

$$4(-2)^3+3a(-2)^2+28(-2)+16=0 \quad ゆえに \quad a=6$$

これを $b=8a-40$ に代入して　$b=8$
$f(x)=x^4+6x^3+14x^2+16x+8$ を x^2+4x+4 で割ると

$$g(x)=x^2+2x+2$$

求める他の解は，$g(x)=0$ を解いて　$x=-1\pm i$

(3) $0 \leqq \theta < 2\pi$ より $x = \sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\theta$ とおくと　$-1 \leqq x \leqq 1$

また，$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2$ であるから

$$\begin{aligned} y &= -x^2 - x + 1 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1) \\ &= -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

よって　$x = -\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi}$ のとき　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$

　　　$x = 1$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 0}$ のとき　**最小値** $\boldsymbol{-1}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 表の出る回数を k 回とすると

$$X = 2k + (-1)\cdot(6 - k) = 3k - 6 \quad \cdots (*)$$

$X = 3$ のとき　$3k - 6 = 3$　ゆえに　$k = 3$

求める確率は，表が 3 回，裏が 3 回出る確率であるから

$${}_6\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \boldsymbol{\frac{5}{16}}$$

(2) $(*)$ より，$X < 0$ となるのは

$$3k - 6 < 0 \quad \text{すなわち} \quad k = 0,\ 1$$

よって，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6\mathrm{C}_1 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \boldsymbol{\frac{7}{64}}$$

(3) 表が k 回出る確率は $(0 \leqq k \leqq 6)$

$${}_6\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{6-k} = \frac{{}_6\mathrm{C}_k}{2^6}$$

よって，求める期待値 $E(X)$ は，$(*)$ および上式より

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{6}(3k-6)\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_k}{2^6} = \frac{3}{2^6}\sum_{k=0}^{6}k\,{}_6\mathrm{C}_k - \frac{6}{2^6}\sum_{k=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_k \\ &= \frac{3}{2^6}\times 6\cdot 2^5 - \frac{6}{2^6}\times 2^6 = \mathbf{3}\ (\text{点}) \end{aligned}$$

補足 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\,{}_n\mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$= \sum_{k=1}^{n}n\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-1} = n\cdot 2^{n-1}$$

別解 $\displaystyle E(X) = \sum_{k=0}^{6}(3k-6)\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_k}{2^6}$ より

$$E(X) = \sum_{k=0}^{6}\{3(6-k)-6\}\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_{6-k}}{2^6} = \sum_{k=0}^{6}(12-3k)\cdot\frac{{}_6\mathrm{C}_k}{2^6}$$

上の 2 式の辺々を加えると

$$2E(X) = \frac{6}{2^6}\sum_{k=0}^{6}{}_6\mathrm{C}_k \quad \text{ゆえに} \quad E(X) = 3$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2点 A$(a,\ 0)$，P$(u,\ v)$ 間の距離 d は　$d=\sqrt{(u-a)^2+v^2}$　$\cdots$①

点 P は楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点であるから

$$\frac{u^2}{3}+v^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad v^2=1-\frac{u^2}{3} \quad \cdots②$$

② を ① に代入すると

$$d=\sqrt{(u-a)^2+1-\frac{u^2}{3}}=\sqrt{\boldsymbol{\frac{2}{3}u^2-2au+a^2+1}}$$

(2) (2) の結果から　$d=\sqrt{\dfrac{2}{3}\left(u-\dfrac{3}{2}a\right)^2+1-\dfrac{1}{2}a^2}$　$(-\sqrt{3}\leqq u\leqq\sqrt{3})$

よって，求める d の最小値は

$0<\dfrac{3}{2}a\leqq\sqrt{3}$　すなわち　$0<a\leqq\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ のとき

$$u=\frac{3}{2}a \text{ で　最小値 } \sqrt{\boldsymbol{1-\frac{a^2}{2}}}$$

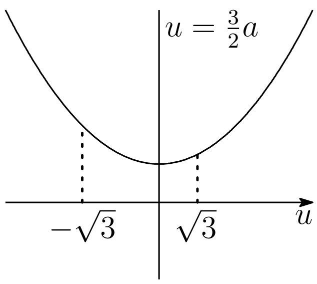
$\sqrt{3}<\dfrac{3}{2}a$　すなわち　$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<a$ のとき

$$u=\sqrt{3} \text{で　最小値 } |\boldsymbol{\sqrt{3}-a}|$$

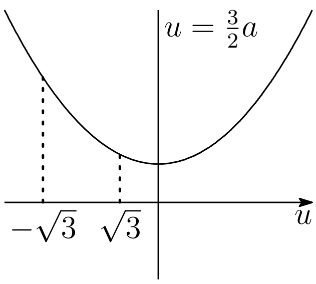
よって
$$\begin{cases} \boldsymbol{0<a\leqq\dfrac{2\sqrt{3}}{3}} \textbf{のとき} & \sqrt{\boldsymbol{1-\dfrac{a^2}{2}}} \quad \left(\boldsymbol{u=\dfrac{3}{2}a}\right) \\ \boldsymbol{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}<a} \textbf{のとき} & |\boldsymbol{\sqrt{3}-a}| \quad (\boldsymbol{u=\sqrt{3}}) \end{cases}$$

補足 $f(u)=\dfrac{2}{3}\left(u-\dfrac{3}{2}a\right)^2+1-\dfrac{1}{2}a^2$ のグラフ

$0<\frac{3}{2}a\leqq\sqrt{3}$ のとき



$\sqrt{3}<\frac{3}{2}a$ のとき



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x) = xe^{-\frac{x}{2}}$ を微分すると

$$f'(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

右の増減表より，極大値 $f(2) = \boldsymbol{2e^{-1}}$ **をとる．**

(2) (1) の結果から $0 \leqq x \leqq 4$ における増減は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$2e^{-1}$	$\searrow$	$4e^{-2}$

よって，求める解の個数は

$$\begin{cases} \boldsymbol{k < 0} \text{ のとき} & \boldsymbol{0} \text{ 個} \\ \boldsymbol{0 \leqq k < 4e^{-2}} \text{のとき} & \boldsymbol{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{4e^{-2} \leqq k < 2e^{-1}} \text{のとき} & \boldsymbol{2} \text{ 個} \\ \boldsymbol{k = 2e^{-1}} \text{のとき} & \boldsymbol{1} \text{ 個} \\ \boldsymbol{2e^{-1} < k} \text{ のとき} & \boldsymbol{0} \text{ 個} \end{cases}$$

(3) $$f(x) - g(x) = xe^{-\frac{x}{2}} - \sqrt{e}\,x = x(e^{-\frac{x}{2}} - e^{\frac{1}{2}})$$

ゆえに，$y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標は　$x = -1,\ 0$

また，$-1 \leqq x \leqq 0$ において　　$f(x) \geqq g(x)$

よって，求める面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{0} (xe^{-\frac{x}{2}} - \sqrt{e}\,x)dx \\ &= \left[(-2x-4)e^{-\frac{x}{2}} - \frac{\sqrt{e}}{2}x^2\right]_{-1}^{0} = \boldsymbol{\frac{5}{2}\sqrt{e} - 4} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\boxed{\mathbf{1}}$ (1) を参照

(2) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\dfrac{1}{2}n(n+1)\right\}^2\cdots(*)$ とする．

i) $n=1$ のとき

$$(*) \text{ の左辺} = 1^3 = 1, \quad (*) \text{ の右辺} = \left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\right)^2 = 1$$

よって，$n=1$ のとき $(*)$ が成り立つ．

ii) $n=k$ のとき

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3=\left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2$$

が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3+(k+1)^3 &= \left\{\frac{1}{2}k(k+1)\right\}^2+(k+1)^3\\ &= \frac{1}{4}(k+1)^2\{k^2+4(k+1)\}\\ &= \left\{\frac{1}{2}(k+1)(k+2)\right\}^2\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときも $(*)$ が成り立つ．

i)，ii) より，すべての自然数 n について，$(*)$ が成り立つ．

(3) $\boxed{\mathbf{1}}$ (3) を参照

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $a_1 = 1 > 0$ および $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{(4n+3)a_{n-1}+5}$ $(n = 2, 3, 4, \cdots)$ より，すべての自然数 n について，$a_n > 0$ である．したがって

$$\frac{1}{a_n} = \frac{5}{a_{n-1}} + 4n + 3 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b_n = 5b_{n-1} + 4n + 3}$$

(2) (1) の結果から　$b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 1$，$b_2 = 5b_1 + 4\cdot 2 + 3 = 16$，

ゆえに　$c_1 = b_2 - b_1 = 16 - 1 = 15$

また　$b_n = 5b_{n-1} + 4n + 3$,　$b_{n+1} = 5b_n + 4n + 7$

上の第 2 式から第 1 式の辺々を引くと

$$b_{n+1} - b_n = 5(b_n - b_{n-1}) + 4 \quad \text{ゆえに} \quad c_n = 5c_{n-1} + 4$$

$c_n + 1 = 5(c_{n-1} + 1)$ であるから

$$c_n + 1 = (c_1 + 1)\cdot 5^{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{c_n = 16\cdot 5^{n-1} - 1}$$

(3) (2) の結果から，$b_{n+1} - b_n = 16\cdot 5^{n-1} - 1$ であるから

$n \geqq 2$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = \sum_{k=1}^{n-1}(16\cdot 5^{k-1} - 1)$$

$$b_n - 1 = 16\cdot\frac{5^{n-1} - 1}{5 - 1} - (n - 1)$$

$$b_n = 4\cdot 5^{n-1} - n - 2$$

$b_1 = 1$ であるから，上の b_n は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって　$b_n = 4\cdot 5^{n-1} - n - 2$

よって　$\boldsymbol{a_n = \dfrac{1}{4\cdot 5^{n-1} - n - 2}}$