平成 24 年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　平成 24 年 2 月 25 日

- 中等教育 (数学専攻)，環境情報教育 (情報教育コース) は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 初等教育 (数学専修) は，$\boxed{2}$, $\boxed{5}$ ～ $\boxed{7}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

$\boxed{\textbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) a を 0 でない実数とする．x についての 3 次方程式 $x^3 - a^3 = 0$ の 2 つの虚数解を α，β とするとき，$\dfrac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$ の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x\left(e^{-2x} - \frac{1}{2}\right) dx$ を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(3) 実数 a，b，c，d において，$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．A が逆行列をもつとき，点 $(a,\ b)$ と点 $(c,\ d)$ は，原点を通る同一直線上にないことを示せ．

$\boxed{\textbf{2}}$ 大小 2 個のさいころを同時に投げる．大きなさいころの出た目の数を小さなさいころの出た目の数で割った値を X とする．次の問いに答えよ．

(1) X が整数となる確率を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{4} < X < 4$ となる確率を求めよ．

(3) X の期待値を求めよ．

$\boxed{\textbf{3}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 実数 a は $0 < a < 5$ をみたし，$x = a\cos\theta + 5$，$y = 2a\sin\theta$ とする．実数 θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ を動くとき，点 $(x,\ y)$ はどのような曲線を表すか．

(2) 原点 $(0,\ 0)$ を通り，(1) で求めた曲線に接する直線の方程式と，接点の座標を求めよ．

(3) 原点 $(0,\ 0)$ と (2) で求めた接点で作られる三角形の外心を C とする．C の座標を a を用いて表せ．さらに，(1) の曲線が C を通るように a の値を定めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問いに答えよ.

(1) 無限級数

$$1+\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{(1+e^x)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+e^x)^n}+\cdots$$

はすべての実数 x について収束することを示し，その和を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする.

(2) (1) で求めた無限級数の和を $f(x)$ とする．方程式

$$\log f(x)=-|\,x\,|+\log 6$$

を解け．ただし，対数は自然対数とする.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ.

(1) a を 0 でない実数とする．x についての 3 次方程式 $x^3-a^3=0$ の 2 つの虚数解を α，β とするとき，$\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$ の値を求めよ.

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin|2x|\,dx$ を求めよ.

(3) 連続する 3 つの自然数 a，b，c があり，それらは $a^2+b^2=c^2$，$a<b<c$ をみたすとする．このような a，b，c はただ 1 組しかないことを示せ.

$\boxed{\mathbf{6}}$ a，b を実数とし，$S=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$，$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．2 次正方行列 N が $N^2=O$，$SN=NS$ をみたすとき，次の問いに答えよ.

(1) $a=b$ または $N=O$ であることを示せ.

(2) n は 2 以上の自然数とする．このとき，

$$(S+N)^n=S^n+nS^{n-1}N$$

が成り立つことを示せ.

(3) n は 2 以上の自然数とする．このとき，

$$(S+SN+N)^n=S^n+nS^nN+nS^{n-1}N$$

が成り立つことを示せ.

(4) $N=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき，2 以上の自然数 n に対して，$(S+SN+N)^n$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{7}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 無限級数

$$1+\frac{1}{1+e^x}+\frac{1}{(1+e^x)^2}+\cdots+\frac{1}{(1+e^x)^n}+\cdots$$

はすべての実数 x について収束することを示し，その和を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(2) (1) で求めた無限級数の和を $f(x)$ とする．方程式 $\log f(x)=x$ を解け．ただし，対数は自然対数とする．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x^3-a^3=0$ より　$(x-a)(x^2+ax+a^2)=0$

虚数解 α，β は $x^2+ax+a^2=0$ の解であるから，これを解いて

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{3}\,ai}{2}$$

ゆえに　$\alpha+\beta=-a$，$\alpha-\beta=\mp\sqrt{3}\,ai$

よって　$\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{\mp\sqrt{3}\,ai}{-a}=\boldsymbol{\pm\sqrt{3}\,i}$

(2) (部分積分法を用いる)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\left(e^{-2x}-\frac{1}{2}\right)dx &= \int_0^1 x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)' dx-\left[\ \frac{x^2}{4}\ \right]_0^1\\ &= \left[x\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx-\frac{1}{4}\\ &= -\frac{1}{2e^2}-\left[\ \frac{1}{4}e^{-2x}\ \right]_0^1-\frac{1}{4}\\ &= -\frac{1}{2e^2}-\left(\frac{1}{4e^2}-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}=\boldsymbol{-\frac{3}{4e^2}}\end{aligned}$$

(3) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ は，逆行列をもつので　$ad-bc\neq 0$　$\cdots$①

2 点 $(a,\ b)$，$(c,\ d)$ を通る直線の方程式は

$$-(d-b)(x-a)+(c-a)(y-b)=0$$

すなわち　$-(d-b)x+(c-a)y+ad-bc=0$

① から，この直線は原点を通らない．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 大きなさいころの出た目を a，小さなさいころの出た目を b とすると，$X=\dfrac{a}{b}$ が整数となる場合は，次の 14 通り．

$$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\\ (4,\ 4),\ (5,\ 1),\ (5,\ 5),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2),\ (6,\ 3),\ (6,\ 6)$$

よって，求める確率は $\quad \dfrac{14}{6^2}=\boldsymbol{\dfrac{7}{18}}$

(2) $\dfrac{a}{b} \geqq 4$ となる場合は，次の 3 通り．

$$(a,\ b)=(4,\ 1),\ (5,\ 1),\ (6,\ 1)$$

$\dfrac{a}{b} \leqq \dfrac{1}{4}$ となる場合は，次の 3 通り．

$$(a,\ b)=(1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6)$$

したがって $\qquad P(X \geqq 4)=\dfrac{3}{6^2},\quad P\left(X \leqq \dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{6^2}$

よって，求める確率は，これらの余事象の確率であるから

$$P\left(\frac{1}{4}<X<4\right)=1-\left(\frac{3}{6^2}+\frac{3}{6^2}\right)=\boldsymbol{\frac{5}{6}}$$

(3) 求める X の期待値 $E(X)$ は

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{6^2}(1+2+3+4+5+6)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{1}{36}\times 21\times\frac{49}{20} \\ &= \boldsymbol{\frac{343}{240}} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x=a\cos\theta+5$，$y=2a\sin\theta$ より

$$\cos\theta=\frac{x-5}{a},\quad \sin\theta=\frac{y}{2a}$$

$0<a<5$，$0 \leqq \theta<2\pi$ より　**楕円** $\boldsymbol{\left(\dfrac{x-5}{a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{2a}\right)^2=1}$

(2) 接点を $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ とすると，P は楕円上の点であるから

$$\left(\frac{x_1-5}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{2a}\right)^2=1 \quad \cdots ①$$

P における楕円の接線の方程式は

$$\frac{(x_1-5)(x-5)}{a^2}+\frac{y_1y}{4a^2}=1$$

これが原点を通るから　$x_1=\dfrac{25-a^2}{5}$

これを ① に代入すると　$\dfrac{a^2}{25}+\left(\dfrac{y_1}{2a}\right)^2=1$

$0<a<5$ に注意して　$y_1=\pm\dfrac{2a\sqrt{25-a^2}}{5}$

この原点を通る直線の傾きは　$\dfrac{y_1}{x_1}=\pm\dfrac{2a}{\sqrt{25-a^2}}$

よって　接線の方程式は　$\boldsymbol{y=\pm\dfrac{2a}{\sqrt{25-a^2}}x}$

接点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{25-a^2}{5},\ \pm\dfrac{2a\sqrt{25-a^2}}{5}\right)}$

(3) (2) で求めた 2 つの接点の垂直二等分線は，x 軸であるから，外心 C は，x 軸上の点である．原点 $(0,\ 0)$ と接点 $\left(\dfrac{25-a^2}{5},\ \dfrac{2a\sqrt{25-a^2}}{5}\right)$ の垂直二等分線は，点 $\left(\dfrac{25-a^2}{10},\ \dfrac{a\sqrt{25-a^2}}{5}\right)$ を通り，傾き $-\dfrac{\sqrt{25-a^2}}{2a}$ の直線

$$y-\frac{a\sqrt{25-a^2}}{5}=-\frac{\sqrt{25-a^2}}{2a}\left(x-\frac{25-a^2}{10}\right)$$

である．$y=0$ を代入して　$x=\dfrac{3a^2+25}{10}$　よって　$\mathrm{C}\boldsymbol{\left(\dfrac{3a^2+25}{10},\ 0\right)}$

C が楕円上にあるとき (1) で求めた楕円の方程式から

$$\left(\frac{3a^2-25}{10a}\right)^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad 3a^2-25=\pm10a$$

ゆえに　$(a\mp5)(3a\pm5)=0$　　$0<a<5$ より　$\boldsymbol{a=\dfrac{5}{3}}$

$\boxed{4}$ (1) 無限級数は，初項 1，公比 $\dfrac{1}{1+e^x}$，$0<\dfrac{1}{1+e^x}<1$ より，収束して

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+e^x}}=\boldsymbol{\frac{1+e^x}{e^x}}$$

(2) (1) の結果から　$f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x}$　ゆえに　$\log f(x)=\log(e^x+1)-x$

$\log f(x)=-|x|+\log 6$ より　$\log(e^x+1)-x=-|x|+\log 6$

(i) $x\geqq 0$ のとき，$|x|=x$ より

$$\log(e^x+1)=\log 6 \quad \text{ゆえに} \quad e^x+1=6 \quad \text{すなわち} \quad e^x=5$$

$x\geqq 0$ に注意して　$x=\log 5$

(ii) $x<0$ のとき，$|x|=-x$ より

$$\log(e^x+1)=2x+\log 6 \quad \text{ゆえに} \quad \log(e^x+1)=\log 6e^{2x}$$

$e^x+1=6e^{2x}$ であるから　$(2e^x-1)(3e^x+1)=0$

$x<0$ に注意して　$x=\log\dfrac{1}{2}=-\log 2$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{x=\log 5,\ -\log 2}$

$\boxed{5}$ (1) $x^3-a^3=0$ より　$(x-a)(x^2+ax+a^2)=0$

虚数解 α，β は $x^2+ax+a^2=0$ の解であるから，これを解いて

$$x=\frac{-a\pm\sqrt{3}\,ai}{2}$$

ゆえに　$\alpha+\beta=-a$，$\alpha-\beta=\mp\sqrt{3}\,ai$

よって　$\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\dfrac{\mp\sqrt{3}\,ai}{-a}=\boldsymbol{\pm\sqrt{3}\,i}$

(2) $$\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}}\sin|2x|\,dx=\int_{-\frac{3}{2}\pi}^{0}\sin(-2x)\,dx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{-\frac{3}{2}\pi}^{0}+\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{2}$$

(3) a，b，c は連続する 3 つの自然数であるから　$a=b-1$，$c=b+1$

これを $a^2+b^2=c^2$ に代入すると

$$(b-1)^2+b^2=(b+1)^2 \quad \text{整理すると} \quad b(b-4)=0$$

$b>0$ であるから　$b=4$　よって　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5)$ の 1 組のみ

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $N^2=O$ より

$$\det(N^2)=\det O \quad ゆえに \quad (\det N)^2=0 \quad すなわち \quad \det N=0$$

N にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$N^2-(\mathrm{tr}N)N+(\det N)E=O$$

これに $N^2=O$，$\det N=0$ を代入すると　$-(\mathrm{tr}N)N=O$

したがって　$N=O$　または　$\mathrm{tr}N=0$

ゆえに，$N\neq O$ の場合について求める．このとき，

$$N=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \quad (-\det N=x^2+yz=0)$$

とおくと，$SN=NS$ より

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax & ay \\ bz & -bx \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax & by \\ az & -bx \end{pmatrix}$$

上式の (1,2) 成分，(2,1) 成分から　$(a-b)y=0$，$(a-b)z=0$

$a-b\neq 0$ とすると $y=z=0$．また $x^2+yz=0$ より $x=0$．

すなわち，$N=O$ となり，条件に反する．ゆえに，$a-b=0$．

よって，$N^2=O$，$SN=NS$ をみたすとき，$a=b$ または $N=O$ である．

(2) $SN=NS$，$k\geqq 2$ のとき $N^k=O$ であるから

$$\begin{aligned}(S+N)^n&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k S^{n-k}N^k\\&=S^n+nS^{n-1}N\end{aligned}$$

(3) $SN=NS$，$N^2=O$ より

$$(SN+N)^2=S^2N^2+2SN^2+N^2=O$$

であるから

$$\begin{aligned}(S+SN+N)^n&=\{S+(SN+N)\}^n\\&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k S^{n-k}(SN+N)^k\\&=S^n+nS^{n-1}(SN+N)\\&=S^n+nS^nN+nS^{n-1}N\end{aligned}$$

(4) $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ から，(1) により $S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$. (3) の結果から

$$\begin{aligned}
(S+SN+N)^n &= S^n + nS^nN + nS^{n-1}N \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n + n\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + n\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad + n\begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & a^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{\begin{pmatrix} a^n & na^n + na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) 無限級数は，初項 1 が公比 $\dfrac{1}{1+e^x}$ で，$0 < \dfrac{1}{1+e^x} < 1$ より，収束して

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+e^x}} = \boldsymbol{\frac{1+e^x}{e^x}}$$

(2) (1) の結果から　$f(x) = \dfrac{e^x+1}{e^x}$　ゆえに　$\log f(x) = \log(e^x+1) - x$

$\log f(x) = x$ より

$$\begin{aligned}
\log(e^x+1) - x &= x \\
\log(e^x+1) &= 2x
\end{aligned}$$

ゆえに　$e^x + 1 = e^{2x}$

$e^x > 0$ に注意して $(e^x)^2 - e^x - 1 = 0$ を解くと

$$e^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{x = \log\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$