平成23年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　平成23年2月25日

- 中等教育 (数学専攻)，環境情報教育 (情報教育コース) は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 初等教育 (数学専修) は，$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ (1)～(3), $\boxed{5}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) N は自然数で N^{10} が 16 桁であるとする．このとき，N^8 は何桁になるか求めよ．

(2) α が無理数であり，a，b が有理数であるとき，

$$a + b\alpha = 0 \quad \text{ならば} \quad a = b = 0$$

であることを証明せよ．

(3) a，b，c，x，y，z を実数とする．

(ア) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを示せ．

(イ) $x+y+z=1$ のとき，$x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ において，a_n は小数第 1 位から小数第 n 位までの数字が 0 で小数第 $(n+1)$ 位から小数第 $2n$ 位までの数字が 9 であり，小数第 $(2n+1)$ 以降の数字が 0 である実数とする．ただし，$0 < a_n < 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする．また，数列 $\{b_n\}$ を，$b_n = 10^n a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める．

(ア) b_1，b_2，b_3 を求め，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(イ) $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく．s_n を求めよ．

(ウ) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ．

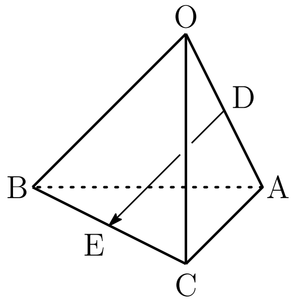
(2) 当たりくじが k 本入っている n 本のくじがある．ただし，$n \geqq 2$ とする．この中から 2 本のくじを同時に引く．

(ア) 少なくとも 1 本当たる確率を，n および k で表せ．

(イ) $n = 21$ のとき，少なくとも 1 本当たる確率が $\dfrac{1}{2}$ 以上となる最小の k を求めよ．

(ウ) $n = 21$ のとき，2 本とも当たる確率が $\dfrac{1}{2}$ 以下となる最大の k を求めよ．

3 正四面体は，4 つの面が全て合同な正三角形からなる四面体である．右の図のような 1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える．OA，BC の中点をそれぞれ D，E とする．



$$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}},\quad \vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$$

とおく．次の問いに答えよ．

(1) $\vec{d}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．

(2) t を実数とし，F，G を $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = t\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = (2-t)\vec{d}$ を満たす点とする．$\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ．また，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FG}}$ を求めよ．

(3) E は線分 FG の中点であることを示せ．

(4) 四角形 BFCG の面積の最小値と，そのときの t の値を求めよ．

4 n を 2 以上の自然数とし，x の関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x) = x^n \log 2x, \quad g(x) = \log 2x$$

とする．ただし，対数は自然対数とする．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の極値を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求めよ．

(3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ．

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ a，b，c，d を実数とし，x の 4 次関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^4 + 2ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d$$

とする．また，曲線 $y = f(x)$ を C とする．さらに，$\alpha = 1 + \sqrt{\dfrac{5}{6}}$，$\beta = 1 - \sqrt{\dfrac{5}{6}}$ とおくとき，$f(x)$ と C は次の 3 つの条件 (い)，(ろ)，(は) を満たすものとする．

(い) 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と点 $(\beta,\ f(\beta))$ は共に C の変曲点である．

(ろ) $f(x)$ は $x = 1$ で極値をもつ．

(は) $f(2) = 0$

次の問いに答えよ．

(1) a，b，c，d の値を求めよ．

(2) C を x 軸方向に -1 だけ平行移動した曲線を $y = g(x)$ とおく．$g(x)$ を求めよ．

(3) x 軸と C とで囲まれた図形の面積 S を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) N^{10} は16桁であるから　$10^{15} \leqq N^{10} < 10^{16}$

ゆえに　$(10^{15})^{0.8} \leqq (N^{10})^{0.8} < (10^{16})^{0.8}$

すなわち　$10^{12} \leqq N^8 < 10^{12.8}$　よって　N^8 は**13**桁の数

(2) $a + b\alpha = 0 \quad \cdots (*)$ とする．

$b \neq 0$ のとき，$(*)$ より　$\alpha = -\dfrac{a}{b} \quad \cdots ①$

a，b は有理数であるから，$-\dfrac{a}{b}$ は有理数である．

このとき，α は無理数であるから，① は成立しない．

したがって　$b = 0$　これを $(*)$ に代入して　$a = 0$

よって，$a + b\alpha = 0$ ならば $a = b = 0$

(3)(ア)　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$

$=(bz-cy)^2+(az-cx)^2+(ay-bx)^2 \geqq 0$

よって　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

別解 $\vec{u} = (a,\ b,\ c)$，$\vec{v} = (x,\ y,\ z)$ とおき，$\vec{u}$，$\vec{v}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

したがって　$|\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \geqq |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\cos^2\theta = (\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

よって　$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$

(イ) (ア) の不等式に $a = b = c = 1$ を代入すると

$$3(x^2+y^2+z^2) \geqq (x+y+z)^2$$

$x+y+z=1$ であるから　$x^2+y^2+z^2 \geqq \dfrac{1}{3}$

よって，$x^2+y^2+z^2$ の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)(ア) 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $9{\cdot}10^{-n-1}$，公比 10^{-1}，末項 $9{\cdot}10^{-2n}$ の等比数列の和であるから

$$a_n = \frac{9{\cdot}10^{-n-1} - 10^{-1} \times 9{\cdot}10^{-2n}}{1-10^{-1}} = 10^{-n} - 10^{-2n}$$

ゆえに　$b_n = 10^n a_n = 10^n(10^{-n} - 10^{-2n}) = \mathbf{1} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{10^n}}$

また　$\boldsymbol{b_1 = 0.9}$，$\boldsymbol{b_2 = 0.99}$，$\boldsymbol{b_3 = 0.999}$

等比数列の和

初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和 S は　$\boldsymbol{S = \dfrac{a - rl}{1 - r}}$

(イ) (ア) の結果から

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n}(10^{-k} - 10^{-2k}) \\ &= \frac{10^{-1} - 10^{-1}{\cdot}10^{-n}}{1-10^{-1}} - \frac{10^{-2} - 10^{-2}{\cdot}10^{-2n}}{1-10^{-2}} \\ &= \frac{1-10^{-n}}{9} - \frac{1-10^{-2n}}{99} = \boldsymbol{\frac{10}{99} - \frac{1}{9{\cdot}10^n} + \frac{1}{99{\cdot}10^{2n}}} \end{aligned}$$

(ウ) (イ) の結果から　$\displaystyle \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{10}{99}}$

(2)(ア) 2 本ともはずれる確率は

$$\frac{{}_{n-k}\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_2} = \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから

$$\boldsymbol{1 - \frac{(n-k)(n-k-1)}{n(n-1)}}$$

(イ) $n = 21$ のとき，少なくとも 1 本当る確率が $\dfrac{1}{2}$ 以上であるから

$$1 - \frac{(21-k)(20-k)}{21{\cdot}20} \geqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (k-6)(k-35) \leqq 0$$

よって，これをみたす最小の k は　**6**

(ウ) $n = 21$ のとき，2 本とも当る確率が $\dfrac{1}{2}$ 以下であるから

$$\frac{{}_k\mathrm{C}_2}{{}_{21}\mathrm{C}_2} = \frac{k(k-1)}{21{\cdot}20} \leqq \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad (k+14)(k-15) \leqq 0$$

よって，これをみたす最大の k は　**15**

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ であるから

$$\vec{d} = \overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \frac{1}{2}\vec{a} = \boldsymbol{\frac{\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}}{2}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OF}} = t\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \vec{a} + (2-t)\vec{d}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{FG}} &= \overrightarrow{\mathrm{OG}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} \\ &= \{\vec{a} + (2-t)\vec{d}\} - t\vec{d} = \vec{a} + 2(1-t)\vec{d} \\ &= \vec{a} + (1-t)(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) = \boldsymbol{t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + (1-t)\vec{c}}\end{aligned}$$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = 1\cdot 1\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FG}} &= (\vec{c}-\vec{b})\cdot\{t\vec{a} + (1-t)(\vec{b}+\vec{c})\} \\ &= t(\vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b}) + (1-t)(|\vec{c}|^2 - |\vec{b}|^2) \\ &= t\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + (1-t)(1^2 - 1^2) = \mathbf{0}\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{\mathrm{OF}} + \overrightarrow{\mathrm{OG}}}{2} &= \frac{t\vec{d} + \{\vec{a} + (2-t)\vec{d}\}}{2} = \frac{\vec{a} + 2\vec{d}}{2} \\ &= \frac{\vec{a} + (\vec{b}+\vec{c}-\vec{a})}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} = \overrightarrow{\mathrm{OE}}\end{aligned}$$

よって，E は線分 FG の中点である．

(4) (2)，(3) の結果から，四角形 BFCG はひし形で，その面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}||\overrightarrow{\mathrm{FG}}|$$

$\triangle$OBC は，正三角形であるから　$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = 1$　ゆえに　$S = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|^2 &= |t\vec{a} + (1-t)\vec{b} + (1-t)\vec{c}|^2 \\ &= t^2|\vec{a}|^2 + (1-t)^2|\vec{b}|^2 + (1-t)^2|\vec{c}|^2 \\ &\qquad + 2t(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b} + 2(1-t)^2\vec{b}\cdot\vec{c} + 2t(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a} \\ &= 2t^2 - 4t + 3 = 2(t-1)^2 + 1\end{aligned}$$

$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{2(t-1)^2+1}$ となるから　S は $\boldsymbol{t=1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x) = x^n \log 2x$ を微分すると (n は 2 以上の自然数)

$$f'(x) = nx^{n-1}\log 2x + x^n\cdot\frac{1}{x} = x^{n-1}(n\log 2x + 1)$$

したがって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　$\boldsymbol{x = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{n}}}$ のとき極小値 $\boldsymbol{-\frac{1}{en\cdot 2^n}}$

(2) $f'(x) = x^{n-1}(n\log 2x + 1)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f''(x) &= (n-1)x^{n-2}(n\log 2x + 1) + x^{n-1}\cdot\frac{n}{x} \\ &= x^{n-2}\{n(n-1)\log 2x + (2n-1)\} \end{aligned}$$

したがって　$x < \frac{1}{2}e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}$ のとき　$f''(x) < 0$,

$x > \frac{1}{2}e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}}$ のとき　$f''(x) > 0$

よって，変曲点は　$\boldsymbol{\left(\frac{1}{2}e^{\frac{1-2n}{n(n-1)}},\ \frac{1-2n}{n(n-1)2^n}e^{\frac{1-2n}{n-1}}\right)}$

補足 関数 $y = f(x)$ が $f'(a) = 0$ であっても $x = a$ の前後で $f'(x)$ の符号が変化しないと，$f(a)$ は極値ではない．同様に，$f''(a) = 0$ であっても $x = a$ の前後で $f''(x)$ の符号が変化しないと，点 $(a,\ f(a))$ は変曲点ではない．

(3) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の交点の x 座標は

$$x^n\log 2x = \log 2x \text{ より}\quad (x^n - 1)\log 2x = 0 \quad\text{ゆえに}\quad x = \frac{1}{2},\ 1$$

$\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ のとき $\log 2x \geqq x^n \log 2x$ であるから求める面積 S_n は

$$\begin{aligned} S_n &= \int_{\frac{1}{2}}^{1}(\log 2x - x^n\log 2x)dx \\ &= \left[\ x(\log 2x - 1) - \frac{x^{n+1}}{n+1}\log 2x + \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\ \right]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \boldsymbol{\frac{n}{n+1}\log 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{(n+1)^2}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)} \end{aligned}$$

(4) (3) の結果から　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} S_n = \log 2 - \frac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $(x) = x^4 + 2ax^3 + 6bx^2 + 4cx + d$ より

$$f'(x) = 4x^3 + 6ax^2 + 12bx + 4c$$
$$f''(x) = 12x^2 + 12ax + 12b$$

(い) より $x = \alpha,\ \beta$ は $f''(x) = 0$ の解であるから，解と係数の関係により

$$\left(1+\sqrt{\frac{5}{6}}\right)+\left(1-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)=-\frac{12a}{12},\quad \left(1+\sqrt{\frac{5}{6}}\right)\left(1-\sqrt{\frac{5}{6}}\right)=\frac{12b}{12}$$

ゆえに　$a = -2,\ b = \dfrac{1}{6}$　また，$f'(1) = 0$ であるから

$$4 - 12 + 2 + 4c = 0 \quad \text{これを解いて} \quad c = \frac{3}{2}$$

したがって　$f(x) = x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + d$　さらに $f(2) = 0$ であるから

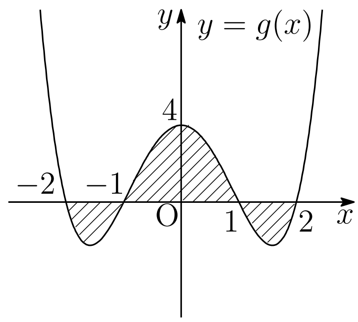
$$16 - 32 + 4 + 12 + d = 0 \quad \text{これを解いて} \quad d = 0$$

以上の結果から　$\boldsymbol{a = -2,\ b = \dfrac{1}{6},\ c = \dfrac{3}{2},\ d = 0}$

(2) $y = g(x)$ は $y = f(x)$ を x 軸方向に -1 だけ平行移動したものであるから

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+1) \\ &= (x+1)^4 - 4(x+1)^3 + (x+1)^2 + 6(x+1) \\ &= \boldsymbol{x^4 - 5x^2 + 4} \end{aligned}$$

(3) x 軸と C で囲まれた図形の面積は，x 軸と $y=g(x)$ のグラフで囲まれた図形の面積に等しい.



$$g(x)=x^4-5x^2+4$$
$$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$$

であるから，求める面積 S は

$$\frac{S}{2}=\int_0^2 |g(x)|\,dx=\int_0^1 (x^4-5x^2+4)dx-\int_1^2 (x^4-5x^2+4)dx$$

x^4-5x^2+4 の原始関数の 1 つを $G(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{5}{3}x^3+4x$ とおくと

$$\frac{S}{2}=2G(1)-G(0)-G(2)$$

このとき　$G(1)=\frac{38}{15}$，$G(0)=0$，$G(2)=\frac{16}{15}$

したがって　　$\frac{S}{2}=4$　　よって　　$\boldsymbol{S=8}$