平成 22 年度　福岡教育大学 2 次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　平成 22 年 2 月 25 日

- 中等教育 (数学，理科専攻)，環境情報教育 (情報教育コース)
  $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 初等教育 (数学専修)
  $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

1 次の問いに答えよ．

(1) 円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $y=x^2+5$ との共通の接線のうち，円と第 1 象限で接する接線の方程式を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ であるような自然数 n に対して

$$1{\cdot}2{\cdot}3+2{\cdot}3{\cdot}4+\cdots+(n-1){\cdot}n{\cdot}(n+1)=(1+2+3+\cdots+n)(2+3+\cdots+n)$$

が成り立つことを示せ．

(3) 関数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ の増減を調べ，最大値と最小値を求めよ．

2 次の問いに答えよ．

(1) 恒等式 $\dfrac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=x^3+y^3+z^3-3xyz$ が成り立つことを示せ．

(2) $a \geqq 0$，$b \geqq 0$，$c \geqq 0$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは $a=b=c$ のときであることを示せ．

(3) 一辺の長さがそれぞれ a，b，c の三角形の面積は $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ で与えられることが知られている．ただし，$s=\dfrac{a+b+c}{2}$ とする．三辺の長さの和が $2s$ $(s>0)$ であるような三角形の面積は $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ 以下であることを示せ．また，面積が $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ となるのは，三角形が正三角形のときであることを示せ．

3 赤，青，黄 3 組のカードがある．各組は 10 枚ずつで，それぞれ 1 から 10 までの番号がひとつずつ書かれている．次の問いに答えよ．

(1) 30 枚のカードの中からカード 4 枚を取り出すとき，2 枚だけが同じ番号で残りの 2 枚は相異なる番号である確率を求めよ．

(2) 30 枚のカードの中から k 枚 $(4 \leqq k \leqq 10)$ を取り出すとき，2 枚だけが同じ番号で残りの $(k-2)$ 枚はすべて異なる番号が書かれている確率を $p(k)$ とする．

(ア) $\dfrac{p(k+1)}{p(k)}$ $(4 \leqq k \leqq 9)$ を求めよ．

(イ) $p(k)$ $(4 \leqq k \leqq 10)$ が最大となる k を求めよ．

4 空間上に相異なる 4 点 O，A，B，C があり，線分 OA，OB，OC は互いに直交している．次の問いに答えよ．

(1) 4 点 O，A，B，C からの距離が全て等しくなる点がただ一つ存在する．この点を G とする．線分 OA の中点を M とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ が直交することを用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

となることを示せ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ の内積とする．

(2) (1) を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

が成り立つことを示せ．

(3) $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{P}(1,\ \sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)$，$\mathrm{R}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とする．このとき線分 OP，OQ，OR は互いに直交していることを示せ．また，4 点 O，P，Q，R を通る球面の半径を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 1 から 9 までの整数がひとつずつ書かれた 9 個の玉が入っている袋の中から玉を 3 個取り出す．取り出した玉に書かれた整数の和が 12 以上となる確率を求めよ．

(2) 円 $x^2 + y^2 = 1$ と放物線 $y = x^2 + 5$ との共通の接線のうち，円と第 1 象限で接する接線の方程式を求めよ．

(3) 平面上の 3 点 A，B，C に対して $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 5$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3$ である．$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ を求めよ．ただし，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の内積とする．

6 $y = 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - 6\sin x\cos x(\sin x - \cos x - 1)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) $t = \sin x - \cos x$ とおくとき，t の範囲を求めよ．

(2) y を t で表せ．

(3) y の最大値と最小値を求めよ．

7 数列 $\{a_n\}$ は次の条件を満たす．

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき次の問いに答えよ．

(1) a_3，a_4，a_5 を求めよ．

(2) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ を満たす実数 α，β の組を全て求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

8 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$J = \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$ とする．次の問いに答えよ．

(1) J^2 を求めよ．

(2) α，β を実数とする．$(\alpha E + \beta J)^2 = cE + dJ$ となる実数 c，d を α，β で表せ．

(3) a，b を $a^2 < b$ となる実数とする．実数 α，β に対して $X = \alpha E + \beta J$ が $X^2 + 2aX + bE = O$ を満たす時，α，β を a と b で表せ．

ただし，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする．

解答例

1 (1) $y = x^2 + 5$ より　$y' = 2x$

放物線 $y = x^2 + 5$ 上の点 $(a,\ a^2 + 5)$ における接線の方程式は

$$y - (a^2 + 5) = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 + 5 \quad \cdots (*)$$

この直線が円 $x^2 + y^2 = 1$ に接するから，原点から直線 $2ax - y - a^2 + 5 = 0$ までの距離が 1 であるから

$$\frac{|-a^2 + 5|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a^2 - 2)(a^2 - 12) = 0$$

直線は，円と第 1 象限で接するから，直線 $(*)$ の傾きおよび y 切片について

$$2a < 0 \quad \text{かつ} \quad -a^2 + 5 > 0$$

であることに注意すると　　$a = -\sqrt{2}$

よって，求める接線の方程式は　　$\boldsymbol{y = -2\sqrt{2}x + 3}$

(2)

$$\begin{aligned}
&1{\cdot}2{\cdot}3 + 2{\cdot}3{\cdot}4 + \cdots + (n-1){\cdot}n{\cdot}(n+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (k-1)k(k+1) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \{(k+2) - (k-2)\}(k-1)k(k+1) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \{(k-1)k(k+1)(k+2) - (k-2)(k-1)k(k+1)\} \\
&= \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2) \\
&= \frac{1}{2}n(1+n) \times \frac{1}{2}(n-1)(2+n) \\
&= (1 + 2 + 3 + \cdots + n)(2 + 3 + \cdots + n)
\end{aligned}$$

(3) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$ を微分すると

$$f'(x)=\frac{-\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}-\cos x\times\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\cos x(-\sin x)}{\sqrt{1+\cos^2 x}}}{1+\cos^2 x}$$
$$=\frac{-\sin x(1+\cos^2 x)+\sin x\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	0

よって　$x=0$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$，$x=\pi$ のとき最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$ ■

2 (1)
$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\\&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\&=\{(x+y)+z\}\{(x+y)^2-(x+y)z+z^2-3xy\}\\&=\{(x+y)+z\}\{(x+y)^2-(x+y)z+z^2\}-3xy\{(x+y)+z\}\\&=(x+y)^3+z^3-3xy(x+y)-3xyz\\&=x^3+y^3+z^3-3xyz\end{aligned}$$

(2) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ のとき

$$(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}\geqq 0$$

等号が成立するのは，$x=y=z$ のときである．
(1) の結果から $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$z\geqq 0$ のとき

$$x^3+y^3+z^3-3xyz\geqq 0\quad(\text{等号が成立するのは } x=y=z \text{ のとき})$$

$a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0$ より，上式に $x=\sqrt[3]{a},\ y=\sqrt[3]{b},\ z=\sqrt{3}$ を代入すると

$$a+b+c-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}\geqq 0\quad\text{ゆえに}\quad\frac{a+b+c}{3}\geqq\sqrt[3]{abc}$$

また，上式において等号が成立するのは，次のときである．

$$\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{c}\quad\text{すなわち}\quad a=b=c$$

(3) (2) の結果から $\dfrac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3} \geqq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$

ゆえに $(s-a)(s-b)(s-c) \leqq \dfrac{1}{27}\{3s-(a+b+c)\}^3 = \dfrac{s^3}{27}$

したがって $s(s-a)(s-b)(s-c) \leqq \dfrac{s^4}{27}$

よって $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leqq \dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$

また，上式において，等号が成立するのは，次のときである．

$$s-a=s-b=s-c \quad \text{すなわち} \quad a=b=c$$

よって，面積が $\dfrac{s^2}{3\sqrt{3}}$ となるのは，三角形が正三角形のときである． ■

3 (1) 30 枚から 4 枚取る取り出し方の総数は ${}_{30}\mathrm{C}_4$ (通り)
2 枚だけ同じ番号の取り出し方は ${}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2$ (通り)
残り 2 枚の相異なる番号の取り出し方は ${}_9\mathrm{C}_2 \cdot 3^2$ (通り)

よって，求める確率は $\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_9\mathrm{C}_2 \cdot 3^2}{{}_{30}\mathrm{C}_4} = \boldsymbol{\dfrac{72}{203}}$

(2) (ア) 30 枚から k 枚取る取り出し方の総数は ${}_{30}\mathrm{C}_k$ (通り)
2 枚だけ同じ番号の取り出し方は ${}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2$ (通り)
残り $k-2$ 枚の相異なる番号の取り出し方は ${}_9\mathrm{C}_{k-2} \cdot 3^{k-2}$ (通り)

したがって $P(k) = \dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_9\mathrm{C}_{k-2} \cdot 3^{k-2}}{{}_{30}\mathrm{C}_k}$

$$\begin{aligned}
\frac{P(k+1)}{P(k)} &= \frac{{}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_9\mathrm{C}_{k-1} \cdot 3^{k-1}}{{}_{30}\mathrm{C}_{k+1}} \times \frac{{}_{30}\mathrm{C}_k}{{}_{10}\mathrm{C}_1 \cdot {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_9\mathrm{C}_{k-2} \cdot 3^{k-2}} \\
&= 3 \times \frac{{}_9\mathrm{C}_{k-1}}{{}_9\mathrm{C}_{k-2}} \times \frac{{}_{30}\mathrm{C}_k}{{}_{30}\mathrm{C}_{k+1}} \\
&= 3 \times \frac{9!}{(k-1)!(10-k)!} \cdot \frac{(k-2)!(11-k)!}{9!} \\
&\qquad \times \frac{30!}{k!(30-k)!} \cdot \frac{(k+1)!(29-k)!}{30!} \\
&= 3 \times \frac{11-k}{k-1} \times \frac{k+1}{30-k} \\
&= \boldsymbol{\frac{3(k+1)(11-k)}{(k-1)(30-k)}} \quad (4 \leqq k \leqq 9)
\end{aligned}$$

(イ) (ア) の結果から

$$\frac{P(k+1)}{P(k)}-1=\frac{3(k+1)(11-k)}{(k-1)(30-k)}-1=\frac{63-k(2k+1)}{(k-1)(30-k)}$$

したがって　$4 \leqq k \leqq 5$ のとき　$\dfrac{P(k+1)}{P(k)}>1$

$6 \leqq k \leqq 9$ のとき　$\dfrac{P(k+1)}{P(k)}<1$

よって，$P(k)$ を最大にする k の値は　$\boldsymbol{k=6}$ ■

4 (1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{MG}}$　$\cdots$①

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}=0$　$\cdots$②

①，② より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{MG}}\right)$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

補足 M は線分 OA の中点であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{MG}},$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}+\overrightarrow{\mathrm{MG}}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{MG}}$$

$\mathrm{OG}=\mathrm{AG}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2$ であるから

$$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{MG}}\right|^2=\left|-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{MG}}\right|^2 \quad \text{整理すると} \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}=0$$

(2) (1) の結果から，同様にして　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，(1) および上の 2 式から

$$\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{2}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(1,\ \sqrt{3},\ 0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=1\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)+\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+0\cdot\sqrt{2}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=1\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)+\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

よって，OP，OQ，OR は互いに直交している．

(2) の結果により，O，P，Q，R を通る球の中心を G とすると

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{OG}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})\\&=\left(1-\frac{\sqrt{6}}{4},\ \sqrt{3}+\frac{\sqrt{2}}{4},\ \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

したがって　$4|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2=\left(1-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\right)^2+\left(\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2=9$

よって，求める球面の半径は　$\boldsymbol{\dfrac{3}{2}}$

別解 $2\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=1$ であるから

$$\begin{aligned}4|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2\\&=4+4+1=9\end{aligned}$$

よって　$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\dfrac{3}{2}$ ■

5 (1) 9 個の玉から 3 個取り出す場合の総数は　${}_9\mathrm{C}_3 = 84$ (通り)

取り出し 3 個の玉に書かれた整数の和が 12 未満になる組は，次の 16 通り．

$$\begin{array}{llll} \{1,\,2,\,3\}, & \{1,\,2,\,4\}, & \{1,\,2,\,5\}, & \{1,\,2,\,6\}, \\ \{1,\,2,\,7\}, & \{1,\,2,\,8\}, & \{1,\,3,\,4\}, & \{1,\,3,\,5\}, \\ \{1,\,3,\,6\}, & \{1,\,3,\,7\}, & \{1,\,4,\,5\}, & \{1,\,4,\,6\}, \\ \{2,\,3,\,4\}, & \{2,\,3,\,5\}, & \{2,\,3,\,6\}, & \{2,\,4,\,5\} \end{array}$$

よって，求める確率は　$1 - \dfrac{16}{84} = \boldsymbol{\dfrac{17}{21}}$

(2) $y = x^2 + 5$ より　$y' = 2x$

放物線 $y = x^2 + 5$ 上の点 $(a,\ a^2 + 5)$ における接線の方程式は

$$y - (a^2 + 5) = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 + 5 \quad \cdots (*)$$

この直線が円 $x^2 + y^2 = 1$ に接するから，原点から直線 $2ax - y - a^2 + 5 = 0$ までの距離が 1 であるから

$$\frac{|-a^2 + 5|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a^2 - 2)(a^2 - 12) = 0$$

直線は，円と第 1 象限で接するから，直線 $(*)$ の傾きおよび y 切片について

$$2a < 0 \quad \text{かつ} \quad -a^2 + 5 > 0$$

であることに注意すると　　$a = -\sqrt{2}$

よって，求める接線の方程式は　　$\boldsymbol{y = -2\sqrt{2}x + 3}$

(3)
$$\begin{aligned} |\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2 &= |\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 \\ &= |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 \\ &= 5^2 - 2\cdot 3 + 1^2 = 20 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = 2\sqrt{5}}$ ■

6 (1) $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$\boldsymbol{-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}}$

(2) $t = \sin x - \cos x$ の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 - 2\sin x\cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x\cos x = \frac{1-t^2}{2}$$

また
$$\begin{aligned}\sin^3 x - \cos^3 x &= (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x)\\ &= (\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x)\\ &= t\left(1 + \frac{1-t^2}{2}\right) = \frac{3t - t^3}{2}\end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned}y &= 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - 6\sin x\cos x(\sin x - \cos x - 1)\\ &= 2\cdot\frac{3t-t^3}{2} - 6\cdot\frac{1-t^2}{2}(t-1) = \boldsymbol{2t^3 - 3t^2 + 3}\end{aligned}$$

(3) $y = 2t^3 - 3t^2 + 3$ を微分すると　$y' = 6t^2 - 6t = 6t(t-1)$

したがって，増減表は次のようなる．

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	2	$\nearrow$	$4\sqrt{2}-3$

よって　**最大値 3，最小値 −2**　■

7 (1) 与えられた漸化式から

$$\begin{aligned}a_3 &= 5a_2 - 6a_1 = 5\cdot 1 - 6\cdot(-1) = \mathbf{11}\\ a_4 &= 5a_3 - 6a_2 = 5\cdot 11 - 6\cdot 1 = \mathbf{49}\\ a_5 &= 5a_4 - 6a_3 = 5\cdot 49 - 6\cdot 11 = \mathbf{179}\end{aligned}$$

(2) $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha)$ より　$a_{n+2} = (\alpha+\beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$

これと $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ の係数を比較して

$$\alpha + \beta = 5,\quad \alpha\beta = 6 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{(\alpha,\ \beta) = (2,\ 3),\ (3,\ 2)}$$

(3) (2) の結果から

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - 2a_n = 3^{n-1}(a_2 - 2a_1) = 3^n$$
$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - 3a_n = 2^{n-1}(a_2 - 3a_1) = 2^{n+1}$$

上の 2 式の辺々を引いて　$\boldsymbol{a_n = 3^n - 2^{n+1}}$　■

8 (1) J にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$J^2+E=O \quad \text{ゆえに} \quad J^2=-E=\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

(2) $J^2=-E$ より $\quad (\alpha E+\beta J)^2=\alpha^2E+2\alpha\beta J+\beta^2J^2$
$$=(\alpha^2-\beta^2)E+2\alpha\beta J$$

これが $cE+dJ$ に等しいから $\quad (\alpha^2-\beta^2)E+2\alpha\beta J=cE+dJ$

ゆえに $\quad (2\alpha\beta-d)J=(c-\alpha^2+\beta^2)E$

$2\alpha\beta-d\neq 0$ とすると J は E の実数倍となり不適.

したがって $\quad 2\alpha\beta-d=0,\ c-\alpha^2+\beta^2=0$

よって $\quad \boldsymbol{c=\alpha^2-\beta^2,\ d=2\alpha\beta}$

(3) $X=\alpha E+\beta J$ および (2) の結果から $\quad X^2=(\alpha^2-\beta^2)E+2\alpha\beta J$
これらを $X^2+2aX+bE=O$ に代入すると

$$(\alpha^2-\beta^2)E+2\alpha\beta J+2a(\alpha E+\beta J)+bE=O$$

ゆえに $\quad (\alpha^2-\beta^2+2a\alpha+b)E+2\beta(\alpha+a)J=O$

したがって $\quad \begin{cases} \alpha^2-\beta^2+2a\alpha+b=0 & \cdots ① \\ 2\beta(\alpha+a)=0 & \cdots ② \end{cases}$

上の第 1 式から $\quad (\alpha+a)^2+(b-a^2)=\beta^2 \quad \cdots ①'$

$b>a^2$ より $b-a^2>0$ であるから $\quad \beta\neq 0$

ゆえに，② から $\quad \alpha+a=0 \quad$ これを ①′ に代入して $\quad b-a^2=\beta^2$

よって $\quad \boldsymbol{\alpha=-a,\ \beta=\pm\sqrt{b-a^2}}$ ■