

## 平成 22 年度 福岡教育大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

教育学部 平成 22 年 2 月 25 日

- 中等教育 (数学, 理科専攻), 環境情報教育 (情報教育コース) は, [1] ~ [4] 数 I · II · III · A · B · C (120 分)
- 初等教育 (数学専修) は, [5] ~ [8] 数 I · II · III · A · B · C (120 分)

[1] 次の問いに答えよ.

(1) 円  $x^2 + y^2 = 1$  と放物線  $y = x^2 + 5$  との共通の接線のうち, 円と第 1 象限で接する接線の方程式を求めよ.

(2)  $n \geq 2$  であるような自然数  $n$  に対して

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = (1+2+3+\cdots+n)(2+3+\cdots+n)$$

が成り立つことを示せ.

(3) 関数  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$   $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi\right)$  の増減を調べ, 最大値と最小値を求めよ.

[2] 次の問いに答えよ.

(1) 恒等式  $\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\} = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$  が成り立つことを示せ.

(2)  $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$  のとき,  $\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$  が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのは  $a = b = c$  のときであることを示せ.

(3) 一辺の長さがそれぞれ  $a, b, c$  の三角形の面積は  $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$  で与えられることが知られている. ただし,  $s = \frac{a+b+c}{2}$  とする. 三辺の長さの和が  $2s$  ( $s > 0$ ) であるような三角形の面積は  $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$  以下であることを示せ. また, 面積が  $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$  となるのは, 三角形が正三角形のときであることを示せ.

3 赤, 青, 黄 3 組のカードがある. 各組は 10 枚ずつで, それぞれ 1 から 10 までの番号がひとつずつ書かれている. 次の問いに答えよ.

(1) 30 枚のカードの中からカード 4 枚を取り出すとき, 2 枚だけが同じ番号で残りの 2 枚は相異なる番号である確率を求めよ.

(2) 30 枚のカードの中から  $k$  枚 ( $4 \leq k \leq 10$ ) を取り出すとき, 2 枚だけが同じ番号で残りの  $(k-2)$  枚はすべて異なる番号が書かれている確率を  $p(k)$  とする.

(ア)  $\frac{p(k+1)}{p(k)}$  ( $4 \leq k \leq 9$ ) を求めよ.

(イ)  $p(k)$  ( $4 \leq k \leq 10$ ) が最大となる  $k$  を求めよ.

4 空間上に相異なる 4 点  $O, A, B, C$  があり, 線分  $OA, OB, OC$  は互いに直交している. 次の問いに答えよ.

(1) 4 点  $O, A, B, C$  からの距離が全て等しくなる点がただ一つ存在する. この点を  $G$  とする. 線分  $OA$  の中点を  $M$  とする.  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{MG}$  が直交することをを用いて

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA}|^2$$

となることを示せ. ただし,  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OG}$  は  $\overrightarrow{OA}$  と  $\overrightarrow{OG}$  の内積とする.

(2) (1) を用いて

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

が成り立つことを示せ.

(3)  $O(0, 0, 0), P(1, \sqrt{3}, 0), Q\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), R\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  とする. このとき線分  $OP, OQ, OR$  は互いに直交していることを示せ. また, 4 点  $O, P, Q, R$  を通る球面の半径を求めよ.

5 次の問いに答えよ.

(1) 1 から 9 までの整数がひとつずつ書かれた 9 個の玉が入っている袋の中から玉を 3 個取り出す. 取り出した玉に書かれた整数の和が 12 以上となる確率を求めよ.

(2) 円  $x^2 + y^2 = 1$  と放物線  $y = x^2 + 5$  との共通の接線のうち, 円と第 1 象限で接する接線の方程式を求めよ.

(3) 平面上の 3 点  $A, B, C$  に対して  $|\overrightarrow{AB}| = 1, |\overrightarrow{AC}| = 5, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$  である.  $|\overrightarrow{BC}|$  を求めよ. ただし,  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  は  $\overrightarrow{AB}$  と  $\overrightarrow{AC}$  の内積とする.

6  $y = 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - 6 \sin x \cos x (\sin x - \cos x - 1)$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) に対して、次の問いに答えよ。

- (1)  $t = \sin x - \cos x$  とおくとき、 $t$  の範囲を求めよ。
- (2)  $y$  を  $t$  で表せ。
- (3)  $y$  の最大値と最小値を求めよ。

7 数列  $\{a_n\}$  は次の条件を満たす。

$$a_1 = -1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき次の問いに答えよ。

- (1)  $a_3, a_4, a_5$  を求めよ。
- (2)  $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$  を満たす実数  $\alpha, \beta$  の組を全て求めよ。
- (3) 数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ。

8  $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 8 & -13 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $J^2$  を求めよ。
- (2)  $\alpha, \beta$  を実数とする。  $(\alpha E + \beta J)^2 = cE + dJ$  となる実数  $c, d$  を  $\alpha, \beta$  で表せ。
- (3)  $a, b$  を  $a^2 < b$  となる実数とする。実数  $\alpha, \beta$  に対して  $X = \alpha E + \beta J$  が  $X^2 + 2aX + bE = O$  を満たす時、 $\alpha, \beta$  を  $a$  と  $b$  で表せ。

ただし、 $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  とする。

## 正解

1 (1)  $y = x^2 + 5$  より  $y' = 2x$

放物線  $y = x^2 + 5$  上の点  $(a, a^2 + 5)$  における接線の方程式は

$$y - (a^2 + 5) = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 + 5 \quad \dots (*)$$

この直線が円  $x^2 + y^2 = 1$  に接するから、原点から直線  $2ax - y - a^2 + 5 = 0$  までの距離が 1 であるから

$$\frac{|-a^2 + 5|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a^2 - 2)(a^2 - 12) = 0$$

直線は、円と第 1 象限で接するから、直線 (\*) の傾きおよび  $y$  切片について

$$2a < 0 \quad \text{かつ} \quad -a^2 + 5 > 0$$

であることに注意すると  $a = -\sqrt{2}$

よって、求める接線の方程式は  $y = -2\sqrt{2}x + 3$

(2)  $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n (k-1)k(k+1) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \{(k+2) - (k-2)\}(k-1)k(k+1) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \{(k-1)k(k+1)(k+2) - (k-2)(k-1)k(k+1)\} \\ &= \frac{1}{4} (n-1)n(n+1)(n+2) \\ &= \frac{1}{2} n(1+n) \times \frac{1}{2} (n-1)(2+n) \\ &= (1+2+3+\dots+n)(2+3+\dots+n) \end{aligned}$$

(3)  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}$  を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-\sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} - \cos x \times \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cos x (-\sin x)}{\sqrt{1 + \cos^2 x}}}{1 + \cos^2 x} \\ &= \frac{-\sin x (1 + \cos^2 x) + \sin x \cos^2 x}{(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sin x}{(1 + \cos^2 x)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$f(x)$  の増減表は次のようになる.

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$0$	$\cdots$	$\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$
$f'(x)$		$+$	$0$	$-$	$0$	$+$	
$f(x)$	$0$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\nearrow$	$0$

よって  $x = 0$  のとき最大値  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $x = \pi$  のとき最小値  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

**2** (1) 
$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\} \\ &= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\ &= \{(x+y) + z\}\{(x+y)^2 - (x+y)z + z^2 - 3xy\} \\ &= \{(x+y) + z\}\{(x+y)^2 - (x+y)z + z^2\} - 3xy\{(x+y) + z\} \\ &= (x+y)^3 + z^3 - 3xy(x+y) - 3xyz \\ &= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \end{aligned}$$

(2)  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  のとき

$$(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\} \geq 0$$

等号が成立するのは,  $x = y = z$  のときである.

(1) の結果から  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  のとき

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0 \quad (\text{等号が成立するのは } x = y = z \text{ のとき})$$

$a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$  より, 上式に  $x = \sqrt[3]{a}, y = \sqrt[3]{b}, z = \sqrt[3]{c}$  を代入すると

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c} \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

また, 上式において等号が成立するのは, 次のときである.

$$\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{c} \quad \text{すなわち} \quad a = b = c$$

$$(3) (2) \text{の結果から } \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{3} \geq \sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{ゆえに } (s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{1}{27} \{3s - (a+b+c)\}^3 = \frac{s^3}{27}$$

$$\text{したがって } s(s-a)(s-b)(s-c) \leq \frac{s^4}{27}$$

$$\text{よって } \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \leq \frac{s^2}{3\sqrt{3}}$$

また、上式において、等号が成立するのは、次のときである。

$$s-a = s-b = s-c \quad \text{すなわち} \quad a = b = c$$

よって、面積が  $\frac{s^2}{3\sqrt{3}}$  となるのは、三角形が正三角形のときである。

- 3** (1) 30枚から4枚取る取り出し方の総数は  ${}_{30}C_4$  (通り)  
 2枚だけ同じ番号の取り出し方は  ${}_{10}C_1 \cdot {}_3C_2$  (通り)  
 残り2枚の相異なる番号の取り出し方は  ${}_9C_2 \cdot 3^2$  (通り)

$$\text{よって、求める確率は } \frac{{}_{10}C_1 \cdot {}_3C_2 \times {}_9C_2 \cdot 3^2}{{}_{30}C_4} = \frac{72}{203}$$

- (2)(ア) 30枚から  $k$ 枚取る取り出し方の総数は  ${}_{30}C_k$  (通り)  
 2枚だけ同じ番号の取り出し方は  ${}_{10}C_1 \cdot {}_3C_2$  (通り)  
 残り  $k-2$ 枚の相異なる番号の取り出し方は  ${}_9C_{k-2} \cdot 3^{k-2}$  (通り)

$$\text{したがって } P(k) = \frac{{}_{10}C_1 \cdot {}_3C_2 \times {}_9C_{k-2} \cdot 3^{k-2}}{{}_{30}C_k}$$

$$\begin{aligned} \frac{P(k+1)}{P(k)} &= \frac{{}_{10}C_1 \cdot {}_3C_2 \times {}_9C_{k-1} \cdot 3^{k-1}}{{}_{30}C_{k+1}} \times \frac{{}_{30}C_k}{{}_{10}C_1 \cdot {}_3C_2 \times {}_9C_{k-2} \cdot 3^{k-2}} \\ &= 3 \times \frac{{}_9C_{k-1}}{{}_9C_{k-2}} \times \frac{{}_{30}C_k}{{}_{30}C_{k+1}} \\ &= 3 \times \frac{9!}{(k-1)!(10-k)!} \cdot \frac{(k-2)!(11-k)!}{9!} \\ &\quad \times \frac{30!}{k!(30-k)!} \cdot \frac{(k+1)!(29-k)!}{30!} \\ &= 3 \times \frac{11-k}{k-1} \times \frac{k+1}{30-k} \\ &= \frac{3(k+1)(11-k)}{(k-1)(30-k)} \quad (4 \leq k \leq 9) \end{aligned}$$

(イ) (ア)の結果から

$$\frac{P(k+1)}{P(k)} - 1 = \frac{3(k+1)(11-k)}{(k-1)(30-k)} - 1 = \frac{63 - k(2k+1)}{(k-1)(30-k)}$$

$$\text{したがって } 4 \leq k \leq 5 \text{ のとき } \frac{P(k+1)}{P(k)} > 1$$

$$6 \leq k \leq 9 \text{ のとき } \frac{P(k+1)}{P(k)} < 1$$

よって,  $P(k)$  を最大にする  $k$  の値は  $k = 6$

$$\boxed{4} \quad (1) \quad \vec{OG} = \vec{OM} + \vec{MG}, \quad \vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{OA} \text{ より } \vec{OG} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \vec{MG} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\vec{OA} \perp \vec{MG} \text{ より } \vec{OA} \cdot \vec{MG} = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } \quad \vec{OA} \cdot \vec{OG} &= \vec{OA} \cdot \left( \frac{1}{2}\vec{OA} + \vec{MG} \right) \\ &= \frac{1}{2}|\vec{OA}|^2 + \vec{OA} \cdot \vec{MG} = \frac{1}{2}|\vec{OA}|^2 \end{aligned}$$

補足 M は線分 OA の中点であるから

$$\begin{aligned} \vec{OG} &= \vec{OM} + \vec{MG} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \vec{MG}, \\ \vec{AG} &= \vec{AM} + \vec{MG} = -\frac{1}{2}\vec{OA} + \vec{MG} \end{aligned}$$

OG = AG より,  $|\vec{OG}|^2 = |\vec{AG}|^2$  であるから

$$\left| \frac{1}{2}\vec{OA} + \vec{MG} \right|^2 = \left| -\frac{1}{2}\vec{OA} + \vec{MG} \right|^2 \quad \text{整理すると } \vec{OA} \cdot \vec{MG} = 0$$

(2) (1)の結果から, 同様にして  $\vec{OB} \cdot \vec{OG} = \frac{1}{2}|\vec{OB}|^2$ ,  $\vec{OC} \cdot \vec{OG} = \frac{1}{2}|\vec{OC}|^2$   
 $\vec{OG} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}$  とおくと, (1) および上の 2 式から

$$\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$$

$$\text{よって } \vec{OG} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

$$(3) \vec{OP} = (1, \sqrt{3}, 0), \vec{OQ} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \vec{OR} = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\text{したがって} \quad \vec{OP} \cdot \vec{OQ} = 1 \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \sqrt{2} = 0$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{OR} = 1 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right) + \sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\vec{OQ} \cdot \vec{OR} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

よって、OP, OQ, ORは互いに直交している。

(2)の結果により、O, P, Q, Rを通る球の中心をGとすると

$$\begin{aligned} 2\vec{OG} &= (\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}) \\ &= \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{4}, \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad 4|\vec{OG}|^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = 9$$

よって、求める球面の半径は  $\frac{3}{2}$

別解  $2\vec{OG} = \vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}$ ,  $|\vec{OP}| = 2$ ,  $|\vec{OQ}| = 2$ ,  $|\vec{OR}| = 1$ であるから

$$\begin{aligned} 4|\vec{OG}|^2 &= (\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}) \cdot (\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR}) \\ &= |\vec{OP}|^2 + |\vec{OQ}|^2 + |\vec{OR}|^2 \\ &= 4 + 4 + 1 = 9 \end{aligned}$$

よって  $|\vec{OG}| = \frac{3}{2}$



- 5 (1) 9個の玉から3個取り出す場合の総数は  ${}_9C_3 = 84$  (通り)  
取り出し3個の玉に書かれた整数の和が12未満になる組は、次の16通り.

$$\begin{aligned} &\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 2, 6\}, \\ &\{1, 2, 7\}, \{1, 2, 8\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3, 5\}, \\ &\{1, 3, 6\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 4, 5\}, \{1, 4, 6\}, \\ &\{2, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 4, 5\} \end{aligned}$$

よって、求める確率は  $1 - \frac{16}{84} = \frac{17}{21}$

- (2)  $y = x^2 + 5$  より  $y' = 2x$   
放物線  $y = x^2 + 5$  上の点  $(a, a^2 + 5)$  における接線の方程式は

$$y - (a^2 + 5) = 2a(x - a) \quad \text{すなわち} \quad y = 2ax - a^2 + 5 \quad \cdots (*)$$

この直線が円  $x^2 + y^2 = 1$  に接するから、原点から直線  $2ax - y - a^2 + 5 = 0$  までの距離が1であるから

$$\frac{|-a^2 + 5|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a^2 - 2)(a^2 - 12) = 0$$

直線は、円と第1象限で接するから、直線(\*)の傾きおよびy切片について

$$2a < 0 \quad \text{かつ} \quad -a^2 + 5 > 0$$

であることに注意すると  $a = -\sqrt{2}$

よって、求める接線の方程式は  $y = -2\sqrt{2}x + 3$

$$\begin{aligned} (3) \quad |\overrightarrow{BC}|^2 &= |\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}|^2 \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AB}|^2 \\ &= 5^2 - 2 \cdot 3 + 1^2 = 20 \end{aligned}$$

よって  $|\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{5}$

$$\boxed{6} \quad (1) \quad y = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{ より } -1 \leq t \leq \sqrt{2}$$

(2)  $t = \sin x - \cos x$  の両辺を平方すると

$$t^2 = 1 - 2 \sin x \cos x \quad \text{ゆえに} \quad \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{また} \quad \sin^3 x - \cos^3 x &= (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) \\ &= (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) \\ &= t \left( 1 + \frac{1 - t^2}{2} \right) = \frac{3t - t^3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって} \quad y &= 2(\sin^3 x - \cos^3 x) - 6 \sin x \cos x (\sin x - \cos x - 1) \\ &= 2 \cdot \frac{3t - t^3}{2} - 6 \cdot \frac{1 - t^2}{2} (t - 1) = \mathbf{2t^3 - 3t^2 + 3} \end{aligned}$$

(3)  $y = 2t^3 - 3t^2 + 3$  を微分すると  $y' = 6t^2 - 6t = 6t(t - 1)$

したがって、増減表は次のようになる。

$t$	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{2}$
$y'$		+	0	-	0	+	
$y$	-2	↗	3	↘	2	↗	$4\sqrt{2} - 3$

よって **最大値 3, 最小値 -2**

$\boxed{7}$  (1) 与えられた漸化式から

$$a_3 = 5a_2 - 6a_1 = 5 \cdot 1 - 6 \cdot (-1) = \mathbf{11}$$

$$a_4 = 5a_3 - 6a_2 = 5 \cdot 11 - 6 \cdot 1 = \mathbf{49}$$

$$a_5 = 5a_4 - 6a_3 = 5 \cdot 49 - 6 \cdot 11 = \mathbf{179}$$

(2)  $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha)$  より  $a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$

これと  $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$  の係数を比較して

$$\alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = 6 \quad \text{これを解いて} \quad (\alpha, \beta) = (\mathbf{2, 3}), (\mathbf{3, 2})$$

(3) (2) の結果から

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - 2a_n = 3^{n-1}(a_2 - 2a_1) = 3^n$$

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 3a_n) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} - 3a_n = 2^{n-1}(a_2 - 3a_1) = 2^{n+1}$$

$$\text{上の 2 式の辺々を引いて} \quad \mathbf{a_n = 3^n - 2^{n+1}}$$

8 (1)  $J$ にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$J^2 + E = O \quad \text{ゆえに} \quad J^2 = -E = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad J^2 = -E \text{ より} \quad (\alpha E + \beta J)^2 = \alpha^2 E + 2\alpha\beta J + \beta^2 J^2 \\ = (\alpha^2 - \beta^2)E + 2\alpha\beta J$$

これが  $cE + dJ$  に等しいから  $(\alpha^2 - \beta^2)E + 2\alpha\beta J = cE + dJ$

$$\text{ゆえに} \quad (2\alpha\beta - d)J = (c - \alpha^2 + \beta^2)E$$

$2\alpha\beta - d \neq 0$  とすると  $J$  は  $E$  の実数倍となり不適.

$$\text{したがって} \quad 2\alpha\beta - d = 0, \quad c - \alpha^2 + \beta^2 = 0$$

$$\text{よって} \quad c = \alpha^2 - \beta^2, \quad d = 2\alpha\beta$$

(3)  $X = \alpha E + \beta J$  および (2) の結果から  $X^2 = (\alpha^2 - \beta^2)E + 2\alpha\beta J$   
これらを  $X^2 + 2aX + bE = O$  に代入すると

$$(\alpha^2 - \beta^2)E + 2\alpha\beta J + 2a(\alpha E + \beta J) + bE = O$$

$$\text{ゆえに} \quad (\alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha + b)E + 2\beta(\alpha + a)J = O$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + 2a\alpha + b = 0 & \dots \textcircled{1} \\ 2\beta(\alpha + a) = 0 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\text{上の第1式から} \quad (\alpha + a)^2 + (b - a^2) = \beta^2 \quad \dots \textcircled{1}'$$

$b > a^2$  より  $b - a^2 > 0$  であるから  $\beta \neq 0$

$$\text{ゆえに, } \textcircled{2} \text{ から} \quad \alpha + a = 0 \quad \text{これを } \textcircled{1}' \text{ に代入して} \quad b - a^2 = \beta^2$$

$$\text{よって} \quad \alpha = -a, \quad \beta = \pm\sqrt{b - a^2}$$