平成 21 年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　平成 21 年 2 月 25 日

- 中等教育 (数学，理科専攻)，環境情報教育 (情報教育コース) は，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 初等教育 (数学専修) は，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) munakata の 8 文字を一列に並べるとき，次の確率を求めよ．ただし，この文字列中の母音は a，u で，子音は k，m，n，t である．

(ア) 両端が子音となる確率

(イ) 両端が母音となる確率

(ウ) 母音と子音が交互に並ぶ確率

(2) 3 桁の自然数 a について，百の位の数を a_1，十の位の数を a_2，一の位の数を a_3 とする．$a_1 + a_2 + a_3$ と a は 9 で割った余りが等しいことを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_n\}$ は次の 2 つの条件 (ア)，(イ) を満たす．

(ア) $a_n > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

(イ) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {a_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$

このとき次の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3 を求めよ．

(2) $\displaystyle{a_{n+1}}^2 = a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k$ が成り立つことを示せ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ とする．行列 $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換によって，点 (1, 0) が点 P に，点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ が点 Q に移されるとする．3 点 P，Q，O(0, 0) を頂点とする三角形の面積が $\dfrac{1}{6}$ であるとき，次の問いに答えよ．

(1) $\cos\alpha$，$\sin\alpha$ をそれぞれ求めよ．

(2) 行列 A^3 の表す 1 次変換による点 (1, 0) の像を求めよ．

4 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ とおく．次の各問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 7} f(x)\,dx$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(2) 等式 $f'(x)=af(x)+b\{f(x)\}^2$ が成り立つように，定数 a，b の値を求めよ．ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 7} \{f(x)\}^2\,dx$ を求めよ．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 7} \{f(x)\}^3\,dx$ を求めよ．

5 次の問いに答えよ．

(1) 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -a \end{pmatrix}$ が $A^3=A$ を満たすとき，a^2+b の値を求めよ．

(2) ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を $|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\dfrac{1}{2}$ とする．t が実数を動くとき $|t\vec{a}+\vec{b}|$ の最小値が $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ である．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ．ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である．

(3) munakata の 8 文字を一列に並べるとき，両端が母音になる確率を求めよ．ただし，この文字列中の母音は a と u である．

6 △ABC は AB = AC で ∠C = 72° である．∠B の二等分線と AC との交点を D とする．次の問いに答えよ．

(1) △ABC と △BCD は相似であることを示せ．

(2) AD : DC を求めよ．

(3) 直線 BC 上の点 E を BC = BE となるようにとる．ただし，E は C と異なる点である．DE と AB の交点を F とするとき，AF : FB を求めよ．

7 次の問いに答えよ．ただし，$\dfrac{30}{100}<\log_{10}2<\dfrac{31}{100}$ であることは用いてよい．

(1) $\dfrac{n}{100}<\log_{10}5<\dfrac{n+1}{100}$ を満たす自然数 n を求めよ．

(2) 5^{21} は何桁の整数か．

(3) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{20}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 と異なる数字が現れるか．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 関数 $f(x)$ は等式 $f(x) = 3x^2 + 2\int_0^2 xf(t)\,dt + \int_0^2 f(t)\,dt$ を満たす．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $x\log x - x$ と $\dfrac{x^2}{2}\log x - \dfrac{x^2}{4}$ の導関数をそれぞれ求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \{3x^2 - f(x)\}\log x\,dx$ を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 母音を X，子音を Y で表すと，X4 個と Y4 個の並べ方の総数は

$$\frac{8!}{4!4!} = 70\ (\text{通り})$$

(ア) 両端が Y となるとき，X4 個と Y2 個の並べ方の総数であるから

$$\frac{6!}{4!2!} = 15\ (\text{通り})$$

よって，求める確率は $\dfrac{15}{70} = \mathbf{\dfrac{3}{14}}$

(イ) (ア) における X と Y を入れ替えたものであるから，求める確率は

$$\mathbf{\frac{3}{14}}$$

(ウ) 母音と子音が交互に並ぶのは，次の 2 通りである

XYXYXYXY，　YXYXYXYX

よって，求める確率は $\dfrac{2}{70} = \mathbf{\dfrac{1}{35}}$

(2)
$$\begin{aligned} a &= 100a_1 + 10a_2 + a_3 \\ &= 9(11a_1 + a_2) + (a_1 + a_2 + a_3) \end{aligned}$$

$9(11a_1 + a_2)$ は，9 の倍数であるから，3 桁の自然数 a と $a_1 + a_2 + a_3$ を 9 で割った余りは等しい．

別解 $10 \equiv 1,\ \ 10^2 \equiv 1 \pmod 9$ であるから

$$a = 10^2a_1 + 10a_2 + a_3 \equiv a_1 + a_2 + a_3 \pmod 9$$

よって，3 桁の自然数 a と $a_1 + a_2 + a_3$ を 9 で割った余りは等しい．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_1 > 0$，${a_1}^3 = {a_1}^2$ を解いて　$\boldsymbol{a_1 = 1}$

$a_2 > 0$，$1^3 + {a_2}^3 = (1 + a_2)^2$ より

$$a_2(a_2 + 1)(a_2 - 2) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_2 = 2}$$

$a_3 > 0$，$1^3 + 2^3 + {a_3}^3 = (1 + 2 + a_3)^2$ より

$$a_3(a_3 + 2)(a_3 - 3) = 0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_3 = 3}$$

(2) (イ) より

$$\sum_{k=1}^{n+1} {a_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2, \quad \sum_{k=1}^{n} {a_k}^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$\begin{aligned} {a_{n+1}}^3 &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_k\right) \\ &= a_{n+1}\left(a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \end{aligned}$$

$a_{n+1} \neq 0$ であるから　　${a_{n+1}}^2 = a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k$

(3) (2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$ {a_{n+1}}^2 = a_{n+1} + 2\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad {a_n}^2 = a_n + 2\sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

上の第 1 式から第 2 式の辺々を引くと

$$ {a_{n+1}}^2 - {a_n}^2 = a_{n+1} - a_n + 2a_n$$

整理すると　　$(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n - 1) = 0$

$a_{n+1} + a_n > 0$ であるから　　$a_{n+1} = a_n + 1$

数列 $\{a_n\}$ は初項が 1 で公差 1 の等差数列であるから

$$a_n = 1 + (n - 1)\cdot 1 = \boldsymbol{n}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) A は原点を中心とし，回転角が α の回転移動を表す $(0^\circ < \alpha < 90^\circ)$．

したがって，$\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ より $\mathrm{Q}(\cos 2\alpha,\ \sin 2\alpha)$．

$\angle\mathrm{POQ} = \alpha$，$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ} = 1$ であるから，$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{6}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin\alpha = \frac{1}{6} \quad \text{ゆえに} \quad \sin\alpha = \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ$ より，$\cos\alpha > 0$ であるから

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

(2) (1) の結果から，$A = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$ より

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4\sqrt{2}}{9} \\ \frac{4\sqrt{2}}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

ゆえに　$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{7}{9} & -\frac{4\sqrt{2}}{9} \\ \frac{4\sqrt{2}}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10\sqrt{2}}{27} & -\frac{23}{27} \\ \frac{23}{27} & \frac{10\sqrt{2}}{27} \end{pmatrix}$

A^3 による点 $(1,\ 0)$ の像は　$\begin{pmatrix} \frac{10\sqrt{2}}{27} & -\frac{23}{27} \\ \frac{23}{27} & \frac{10\sqrt{2}}{27} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10\sqrt{2}}{27} \\ \frac{23}{27} \end{pmatrix}$

よって　$\boldsymbol{\left(\frac{10\sqrt{2}}{27},\ \frac{23}{27}\right)}$

別解　A^3 による点 $(1,\ 0)$ の像は $(\cos 3\alpha,\ \sin 3\alpha)$ であるから

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = 4\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^3 - 3\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{10\sqrt{2}}{27}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 3\times\frac{1}{3} - 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{23}{27}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $\displaystyle\int_0^{\log 7} f(x)\,dx = \int_0^{\log 7} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$

$$= \Big[\ \log(1+e^x)\ \Big]_0^{\log 7} = \log 8 - \log 2 = \mathbf{2\log 2}$$

(2) $(1+e^x)f(x) = e^x$ であるから，この両辺を微分すると

$$e^x f(x) + (1+e^x)f'(x) = e^x$$

上式の両辺を $1+e^x$ で割ると

$$\frac{e^x}{1+e^x}f(x) + f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad ゆえに \quad \{f(x)\}^2 + f'(x) = f(x)$$

$f'(x) = f(x) - \{f(x)\}^2$ であるから　　$\boldsymbol{a=1}$，$\boldsymbol{b=-1}$

(3) $$f(0) = \frac{1}{2},\ f(\log 7) = \frac{7}{8}$$

(1)，(2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 7}\{f(x)\}^2\,dx &= \int_0^{\log 7} f(x)\,dx - \int_0^{\log 7} f'(x)\,dx \\ &= 2\log 2 - \Big[\ f(x)\ \Big]_0^{\log 7} \\ &= 2\log 2 - \left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right) = \mathbf{2\log 2 - \frac{3}{8}}\end{aligned}$$

(4) (2) の結果から，$\{f(x)\}^3 = \{f(x)\}^2 - f(x)f'(x)$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 7}\{f(x)\}^3\,dx &= \int_0^{\log 7}\{f(x)\}^2\,dx - \int_0^{\log 7} f(x)f'(x)\,dx \\ &= 2\log 2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\Big[\ \{f(x)\}^2\ \Big]_0^{\log 7} \\ &= 2\log 2 - \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{7}{8}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right\} \\ &= \mathbf{2\log 2 - \frac{81}{128}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2+(-a^2-b)E=O \quad ゆえに \quad A^2=(a^2+b)E$$

したがって　$A^3=A^2A=(a^2+b)A$

これを $A^3=A$ に代入すると

$$(a^2+b)A=A \quad すなわち \quad (a^2+b-1)A=O$$

A の (2,1) 成分より，$A\neq O$ であるから　$a^2+b-1=0$

よって　$\boldsymbol{a^2+b=1}$

(2) $$\begin{aligned}|t\vec{a}+\vec{b}|^2&=t^2|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\\&=t^2\cdot1^2+2t|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+\left(\frac{1}{2}\right)^2\\&=t^2+2t\cdot1\cdot\frac{1}{2}\cos\theta+\frac{1}{4}\\&=t^2+t\cos\theta+\frac{1}{4}\\&=\left(t+\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2-\frac{1}{4}\cos^2\theta+\frac{1}{4}\\&=\left(t+\frac{1}{2}\cos\theta\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sin\theta\right)^2\end{aligned}$$

$|t\vec{a}+\vec{b}|$ の最小値が $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ であるから ($0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$)

$$\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{4} \quad ゆえに \quad \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

これを解いて　$\boldsymbol{\theta=60^\circ，120^\circ}$

(3) 母音 4 個と子音 4 個をそれぞれ同一視する．

これら 8 個の並び方は　$\dfrac{8!}{4!4!}=70$ (通り)

両端が母音になるとき，間に母音 2 個と子音 4 個の並び方は

$$\frac{6!}{2!4!}=15 \text{ (通り)}$$

よって，求める確率は　$\dfrac{15}{70}=\boldsymbol{\dfrac{3}{14}}$

別解 3 つの a を a_1，a_2，a_3 と区別する．

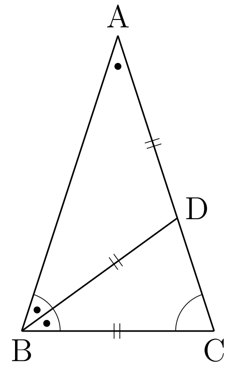
8 文字の並び方は　$8!$ (通り)

両端の母音 2 個の並び方は　${}_4\mathrm{P}_2$ (通り)

間に並ぶ残り 6 個の文字の並び方は　$6!$ (通り)

よって，求める確率は　$\dfrac{{}_4\mathrm{P}_2\times6!}{8!}=\dfrac{3}{14}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\angle \mathrm{BAC} = 180^\circ - 2 \times 72^\circ = 36^\circ$



$\angle \mathrm{CBD} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{ACB} = 36^\circ$

$\triangle \mathrm{ABC}$ と $\triangle \mathrm{BCD}$ について

$\angle \mathrm{C}$ は共通，

$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{CBD}$

2 角が等しいから，$\triangle \mathrm{ABC} \backsim \triangle \mathrm{BCD}$

(2) (1) の結果より，$\triangle \mathrm{BCD}$ は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BD} \quad \cdots ①$$

$\angle \mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\angle \mathrm{ABC} = 36^\circ$ より，$\triangle \mathrm{ABD}$ は二等辺三角形であるから

$$\mathrm{AD} = \mathrm{BD} \quad \cdots ②$$

①，② より，$\mathrm{AD} = \mathrm{BD} = \mathrm{BC} = 1$，$\mathrm{DC} = x$ とおくと

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AD} + \mathrm{DC} = 1 + x$$

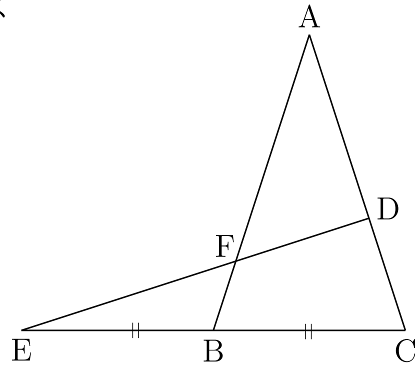
(1) の結果より，$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} = \mathrm{BC} : \mathrm{DC}$ であるから

$$(1+x) : 1 = 1 : x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + x - 1 = 0$$

$x > 0$ に注意して，これを解くと　$x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

よって　　$\mathrm{AD} : \mathrm{DC} = 1 : \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} = \mathbf{2 : \sqrt{5} - 1}$

(3) $\triangle \mathrm{ABC}$ と直線 DE について，メネラウスの定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \cdot \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}} \cdot \frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DA}} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FB}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1} = 1$$

よって　　$\mathrm{AF} : \mathrm{FB} = 2 : x$

$$= 2 : \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$= \mathbf{\sqrt{5} + 1 : 1}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $\dfrac{31}{100} < \log_{10} 2 < \dfrac{31}{100}$ より　$-\dfrac{31}{100} < -\log_{10} 2 < -\dfrac{30}{100}$

上式の辺々に 1 を加えると　$\dfrac{69}{100} < \log_{10} 5 < \dfrac{70}{100}$

よって，$\dfrac{n}{100} < \log_{10} 5 < \dfrac{n+1}{100}$ を満たす自然数 n は　$\boldsymbol{n = 69}$

(2) $\log_{10} 5^{21} = 21 \log_{10} 5$ より　$21 \times \dfrac{69}{100} < \log_{10} 5^{21} < 21 \times \dfrac{70}{100}$

ゆえに　$14 < 14.47 < \log_{10} 5^{21} < 14.7 < 15$

したがって　$10^{14} < 5^{21} < 10^{15}$　よって　5^{21} は **15 桁**の整数

(3) $\log_{10} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{20} = 20(2\log_{10} 2 - 1)$ より

$$-8 = 20\left(2 \times \frac{30}{100} - 1\right) < \log_{10} \left(\frac{2}{5}\right)^{20} < 20\left(2 \times \frac{31}{100} - 1\right) = -7.6$$

ゆえに　$-8 < \log_{10} \left(\dfrac{2}{5}\right)^{20} < -7$　したがって　$10^{-8} < \left(\dfrac{2}{5}\right)^{20} < 10^{-7}$

よって，$\left(\dfrac{2}{5}\right)^{20}$ は**小数第 8 位**に初めて 0 と異なる数字が現れる.

$\boxed{\mathbf{8}}$ (1) $k=\displaystyle\int_0^2 f(t)\,dt$ とおくと，$f(x)=3x^2+2kx+k$ であるから

$$\begin{aligned} k &= \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 (3t^2+2kt+k)\,dt \\ &= \Big[\ t^3+kt^2+kt\ \Big]_0^2 = 6k+8 \end{aligned}$$

これを解いて　$k=-\dfrac{8}{5}$　　よって　$\boldsymbol{f(x)=3x^2-\dfrac{16}{5}x-\dfrac{8}{5}}$

(2)
$$(x\log x-x)'=\log x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\boldsymbol{\log x}$$
$$\left(\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\right)'=x\log x+\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}-\frac{x}{2}=\boldsymbol{x\log x}$$

(3) (1) の結果から，$3x^2-f(x)=\dfrac{16}{5}x+\dfrac{8}{5}$ であるから，(2) の結果より

$$\begin{aligned} \int_1^2 \{3x^2-f(x)\}\log x\,dx &= \frac{16}{5}\int_1^2 x\log x\,dx+\frac{8}{5}\int_1^2 \log x\,dx \\ &= \frac{16}{5}\Big[\ \frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}\ \Big]_1^2+\frac{8}{5}\Big[\ x\log x-x\ \Big]_1^2 \\ &= \frac{16}{5}\left(2\log 2-\frac{3}{4}\right)+\frac{8}{5}(2\log 2-1) \\ &= \boldsymbol{\frac{48}{5}\log 2-4} \end{aligned}$$