

平成 20 年度 福岡教育大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

教育学部 平成 20 年 2 月 25 日

- 中等教育 (数学, 理科専攻), 環境情報教育 (情報教育コース) は, [1] ~ [4] 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 初等教育 (数学専修) は, [1] (1), [5] ~ [8] 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

[1] 次の問いに答えよ.

(1) x を 1 と異なる正の数とする. このとき, x についての方程式 $\log_{10} x - 3 \log_x 10 = 2$ を解け.

(2) x についての 2 次方程式 $x^2 + 2ax + a^2 - 5 = 0$ が 2 つの解 α, β をもち, $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 3$ を満たすように実数の定数 a の値を求めよ.

[2] $\triangle ABC$ において, $\angle A = 60^\circ$, $AB = 2$, $AC = 1$ とする. $\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする. また, $\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の垂直 2 等分線の交点を E とする. $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$ とするとき, 次の問いに答えよ.

(1) 内積 $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ.

(2) \overrightarrow{AD} を \vec{b}, \vec{c} を用いて表せ.

(3) $AD : AE$ を求めよ.

[3] 楕円 $C: x^2 + 4y^2 = 5$ について, 次の問いに答えよ.

(1) 楕円 C 上の点 $P(a, b)$ における接線の方程式は $ax + 4by = 5$ で表されることを示せ.

(2) 点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ から楕円 C に 2 本の接線をひき, その接点を T_1, T_2 とする. このとき, 2 点 T_1, T_2 を通る直線の方程式を求めよ.

4 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある .

$$a_1 = \frac{e}{e-1}, \quad a_{n+1} = \sum_{k=1}^n \int_0^k a_k e^x dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

次の問いに答えよ . ただし , e は自然対数の底とする .

- (1) a_2, a_3 の値を求めよ .
- (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ .
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{n^2}$ を求めよ . ただし , 対数は自然対数とする .

5 次の問いに答えよ .

- (1) x についての 3 次方程式 $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の 1 つの解が $1 - 2i$ であるとき , $1 + 2i$ もこの方程式の解であることを示せ . ただし , a, b, c は実数の定数とし , i は虚数単位とする .

- (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき , $(A + A^{-1})^2$ を求めよ .

6 $\triangle ABC$ において , $\angle B = 45^\circ$, $\angle C = 75^\circ$, $BC = 3$ のとき , 次の問いに答えよ .

- (1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ .
- (2) 辺 BC 上に点 D を $BD = 1$ となるようにとる . このとき , $\triangle ABC$ と $\triangle DAC$ が相似となることを証明せよ .

7 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある .

$$a_1 = -\frac{5}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

また , $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく . 次の問いに答えよ .

- (1) b_1 の値を求めよ .
- (2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ .
- (3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ .

8 a, b を定数として , 関数 $f(x) = (ax + b)e^x$ を考える . $f(x)$ は $x = 2$ で極小値 $-\frac{1}{3}e^2$ をとるとき , 次の問いに答えよ . ただし , e は自然対数の底とする .

- (1) a, b の値を求めよ .
- (2) 定積分 $\int_0^4 f(x) dx$ を求めよ .

正解

1 (1) $\log_{10} x - 3 \log_x 10 = 2$ より

$$\log_{10} x - \frac{3 \log_{10} 10}{\log_{10} x} = 2 \quad \text{整理すると} \quad (\log_{10} x)^2 - 2 \log_{10} x - 3 = 0$$

$$\text{したがって} \quad (\log_{10} x + 1)(\log_{10} x - 3) = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad \log_{10} x = -1, 3 \quad \text{よって} \quad x = \frac{1}{10}, 1000$$

(2) 2次方程式 $x^2 + 2ax + a^2 - 5 = 0 \cdots (*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = a^2 - 1 \cdot (a^2 - 5) = 5 > 0$$

ゆえに, 2次方程式 (*) は, 異なる2つの実数解をもつ.

2次方程式 (*) の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -2a, \quad \alpha\beta = a^2 - 5$$

$\alpha > 0, \beta > 0$ であるから, $\alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ より

$$-2a > 0, \quad a^2 - 5 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a < -\sqrt{5} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 3 \text{ より} \quad \frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = 3 \quad \text{ゆえに} \quad (\alpha + \beta)^2 = 9\alpha\beta$$

$$\text{したがって} \quad (-2a)^2 = 9(a^2 - 5)$$

① に注意してこれを解くと $a = -3$

2 (1) $\vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}| |\vec{c}| \cos 60^\circ = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1$

(2) AD は $\angle A$ の二等分線であるから

$$BD : DC = AD : AC = 2 : 1$$

$$\text{よって} \quad \vec{AD} = \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c}$$

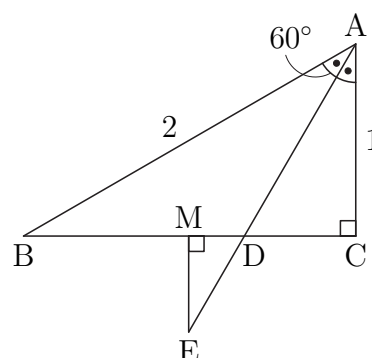
(3) M は BC の中点, $BD : DC = 2 : 1$ より

$$MD : DC = 1 : 2$$

また, $\triangle MED \sim \triangle CAD$ より

$$ED : AD = 1 : 2$$

よって $AD : AE = 2 : 3$



3 (1) $x^2 + 4y^2 = 5$ を x で微分すると $2x + 8yy' = 0$ ゆえに $y' = -\frac{x}{4y}$

$b \neq 0$ のとき, 点 $P(a, b)$ における接線の傾きは $-\frac{a}{4b}$

したがって, 接線の方程式は

$$y - b = -\frac{a}{4b}(x - a) \quad \text{ゆえに} \quad ax + 4by = a^2 + 4b^2$$

$P(a, b)$ は楕円 C 上の点であるから $a^2 + 4b^2 = 5$

よって, $P(a, b)$ における接線の方程式は $ax + 4by = 5 \quad \dots (*)$

$b = 0$, すなわち, 点 $(\pm\sqrt{5}, 0)$ における接線の方程式は $x = \pm\sqrt{5}$

これは, $(*)$ をみただけ.

別解 $(x, y) = (x(t), y(t))$ を C 上の正則な曲線で, $(a, b) = (x(t_0), y(t_0))$ とする.
 $f(t) = \{x(t)\}^2 + 4\{y(t)\}^2 - 5$ とおくと

$$f'(t) = 2x(t)x'(t) + 8y(t)y'(t)$$

$f(t) = 0$ であるから, $f'(t) = 0$ より $x(t)x'(t) + 4y(t)y'(t) = 0$

これに $t = t_0$ を代入すると $ax'(t_0) + 4by'(t_0) = 0$

ベクトル $(x'(t_0), y'(t_0))$ は曲線の P における接ベクトルで, ベクトル $(a, 4b)$ は C の P における法ベクトルである. よって, C の P における接線の方程式は

$$a(x - a) + 4b(y - b) = 0 \quad \text{整理すると} \quad ax + 4by = a^2 + 4b^2$$

$P(a, b)$ は楕円 C 上の点であるから $a^2 + 4b^2 = 5$

よって, $P(a, b)$ における接線の方程式は $ax + 4by = 5$

(2) $T_1(a_1, b_1)$, $T_2(a_2, b_2)$ とおくと, C の T_1, T_2 における接線の方程式は, それぞれ

$$a_1x + 4b_1y = 5, \quad a_2x + 4b_2y = 5$$

これらは, 点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ を通るから

$$a_1 + 6b_1 = 5, \quad a_2 + 6b_2 = 5$$

これから, 2点 T_1, T_2 を通る直線の方程式は $x + 6y = 5$

解説 $x + 6y = 5$ を $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ を極とする C の極線という.

$$\boxed{4} \quad (1) \quad a_{n+1} = \sum_{k=1}^n \int_0^k a_k e^x dx = \sum_{k=1}^n a_k \left[e^x \right]_0^k = \sum_{k=1}^n a_k (e^k - 1) \quad \dots (*)$$

$$\text{ゆえに} \quad a_2 = a_1(e - 1) = \frac{e}{e - 1}(e - 1) = e$$

$$a_3 = a_1(e - 1) + a_2(e^2 - 1) = e + e(e^2 - 1) = e^3$$

(2) (*) より, $n \geq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k (e^k - 1) - \sum_{k=1}^{n-2} a_k (e^k - 1) \\ &= a_{n-1} (e^{n-1} - 1) \end{aligned}$$

$$\text{整理すると} \quad a_n = e^{n-1} a_{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_n}{a_{n-1}} = e^{n-1}$$

$$\begin{aligned} n \geq 3 \text{ のとき} \quad a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_3}{a_2} \cdot a_2 \\ &= e^{n-1} \cdot e^{n-2} \cdots e^2 \cdot e \\ &= e^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} = e^{\frac{1}{2}n(n-1)} \end{aligned}$$

上式は, $n = 2$ のときも成り立つので

$$a_1 = \frac{e}{e - 1}, \quad a_n = e^{\frac{1}{2}n(n-1)} \quad (n \geq 2)$$

(3) (2) の結果から

$$\frac{\log a_n}{n^2} = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a_n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

- 5 (1) $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ とおく. $P(x)$ を $x^2 - 2x + 5$ で割った商と余りは, それぞれ $2x + a + 4$, $(2a + b - 2)x + (-5a + c - 20)$ であるから

$$P(x) = (x^2 - 2x + 5)(2x + a + 4) + (2a + b - 2)x + (-5a + c - 20) \quad \dots (*)$$

$z = 1 - 2i$ とすると, $P(z) = 0$, $z^2 - 2z + 5 = 0$ であるから

$$(2a + b - 2)z + (-5a + c - 20) = 0$$

$2a + b - 2$, $-5a + c - 20$ は実数であるから

$$2a + b - 2 = 0, \quad -5a + c - 20 = 0$$

これを (*) に代入すると

$$P(x) = (x^2 - 2x + 5)(2x + a + 4)$$

$$\bar{z} = 1 + 2i \text{ とすると } \bar{z}^2 - 2\bar{z} + 5 = 0$$

したがって, $P(\bar{z}) = 0$ となる. よって, $1 + 2i$ も $P(x) = 0$ の解である.

参照 九大 2012 年一般前期理系数学⁴の補足¹を参照.

- (2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ より, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3E$$

$$\text{よって } (A + A^{-1})^2 = 9E = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

6 (1) 正弦定理により

$$\frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \quad \text{ゆえに} \quad b = \sqrt{6}$$

加法定理により

$$\begin{aligned} \sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$\triangle ABC$ の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2} ab \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{3}{4} (3 + \sqrt{3})$$

別解 第1余弦定理により

$$c = a \cos B + b \cos A = 3 \cos 45^\circ + \sqrt{6} \cos 60^\circ = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2}$$

$$\text{よって} \quad S = \frac{1}{2} ca \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \times 3 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4} (3 + \sqrt{3})$$

第1余弦定理

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

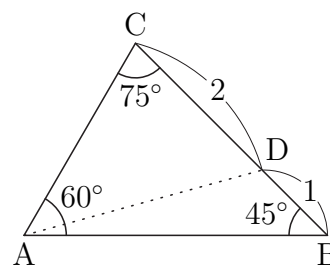
$$c = a \cos B + b \cos A$$

単に余弦定理というと第2余弦定理を指す。

(2) $\triangle DAC$ と $\triangle ABC$ について

$$\frac{CD}{CA} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{CA}{CB}, \quad \angle C \text{ は共通}$$

2組の辺の比とその間の角が等しいから $\triangle ABC \sim \triangle DAC$



$$\boxed{7} \quad (1) \quad a_2 = \frac{1}{3}a_1 + 1 = \frac{1}{3}\left(-\frac{5}{4}\right) + 1 = \frac{7}{12}$$

$$b_1 = a_2 - a_1 = \frac{7}{12} - \left(-\frac{5}{4}\right) = \frac{11}{6}$$

(2) 与えられた漸化式から

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + n, \quad a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + n + 1$$

上の第2式から第1式の辺々を引くと

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n) + 1 \quad \text{すなわち} \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + 1$$

$$\text{したがって} \quad b_{n+1} - \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left(b_n - \frac{3}{2}\right)$$

$$b_n - \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(b_1 - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{よって} \quad b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}$$

(3) (2)の結果から

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= -\frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2} \right\} \\ &= -\frac{5}{4} + \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{3}{2}(n-1) \\ &= \frac{3}{2}n - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{9}{4} \end{aligned}$$

- 8 (1) $f(x) = (ax + b)e^x$ より $f'(x) = (ax + a + b)e^x$
 $f(x)$ は $x = 2$ で極小値 $-\frac{1}{3}e^2$ をとるから, $f(2) = -\frac{1}{3}e^2$, $f'(2) = 0$ より

$$(2a + b)e^2 = -\frac{1}{3}e^2, \quad (3a + b)e^2 = 0$$

したがって $2a + b = -\frac{1}{3}$, $3a + b = 0$ これを解いて $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$

このとき $f(x) = \left(\frac{1}{3}x - 1\right)e^x$, $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right)e^x$

$f(x)$ の増減表は右のようになり,
条件をみtas.

よって $a = \frac{1}{3}$, $b = -1$

x	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	極小	↗

- (2) $f(x) = \left(\frac{1}{3}x - 1\right)e^x$ より

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^4 \left(\frac{1}{3}x - 1\right)e^x dx \\ &= \left[\left(\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}\right)e^x \right]_0^4 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$