平成 20 年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　平成 20 年 2 月 25 日

- 中等教育 (数学，理科専攻)，環境情報教育 (情報教育コース)
  $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

- 初等教育 (数学専修)
  $\boxed{1}$ (1) $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ 数 I・II・III・A・B・C (120 分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) x を 1 と異なる正の数とする．このとき，x についての方程式
$\log_{10} x - 3\log_x 10 = 2$ を解け．

(2) x についての 2 次方程式 $x^2 + 2ax + a^2 - 5 = 0$ が 2 つの解 α，β をもち，
$\sqrt{\dfrac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = 3$ を満たすように実数の定数 a の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\triangle$ABC において，$\angle$A $= 60^\circ$，AB $= 2$，AC $= 1$ とする．$\angle$A の 2 等分線と辺 BC の交点を D とする．また，$\angle$A の 2 等分線と辺 BC の垂直 2 等分線の交点を E とする．$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ を求めよ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(3) AD : AE を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 楕(だ)円 $C : x^2 + 4y^2 = 5$ について，次の問いに答えよ．

(1) 楕円 C 上の点 P$(a,\ b)$ における接線の方程式は $ax + 4by = 5$ で表されることを示せ．

(2) 点 A$\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ から楕円 C に 2 本の接線をひき，その接点を T_1，T_2 とする．このとき，2 点 T_1，T_2 を通る直線の方程式を求めよ．

4 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = \frac{e}{e-1}, \quad a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^k a_k e^x \, dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) a_2，a_3 の値を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{n^2}$ を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

5 次の問いに答えよ．

(1) x についての 3 次方程式 $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の 1 つの解が $1 - 2i$ であるとき，$1 + 2i$ もこの方程式の解であることを示せ．ただし，a，b，c は実数の定数とし，i は虚数単位とする．

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とするとき，$(A + A^{-1})^2$ を求めよ．

6 $\triangle$ABC において，$\angle$B $= 45^\circ$，$\angle$C $= 75^\circ$，BC $= 3$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) $\triangle$ABC の面積を求めよ．

(2) 辺 BC 上に点 D を BD $= 1$ となるようにとる．このとき，$\triangle$ABC と $\triangle$DAC が相似となることを証明せよ．

7 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = -\frac{5}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

また，$b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) b_1 の値を求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

8 a，b を定数として，関数 $f(x) = (ax + b)e^x$ を考える．$f(x)$ は $x = 2$ で極小値 $-\dfrac{1}{3}e^2$ をとるとき，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) a，b の値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^4 f(x) \, dx$ を求めよ．

解答例

1 (1) $\log_{10} x - 3\log_x 10 = 2$ より

$$\log_{10} x - \frac{3\log_{10} 10}{\log_{10} x} = 2 \quad 整理すると \quad (\log_{10} x)^2 - 2\log_{10} x - 3 = 0$$

したがって　$(\log_{10} x + 1)(\log_{10} x - 3) = 0$

ゆえに　$\log_{10} x = -1,\ 3$　よって　$\boldsymbol{x = \frac{1}{10},\ 1000}$

(2) 2 次方程式 $x^2 + 2ax + a^2 - 5 = 0 \cdots (*)$ の判別式を D とすると

$$D/4 = a^2 - 1\cdot(a^2 - 5) = 5 > 0$$

ゆえに，2 次方程式 $(*)$ は，異なる 2 つの実数解をもつ．
2 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = -2a, \quad \alpha\beta = a^2 - 5$$

$\alpha > 0$，$\beta > 0$ であるから，$\alpha + \beta > 0$，$\alpha\beta > 0$ より

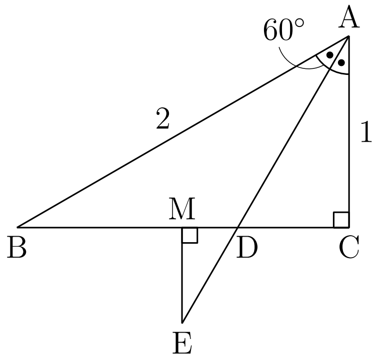
$$-2a > 0, \quad a^2 - 5 > 0 \quad ゆえに \quad a < -\sqrt{5} \quad \cdots ①$$

$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = 3$ より　$\frac{\alpha + \beta}{\sqrt{\alpha\beta}} = 3$　ゆえに　$(\alpha + \beta)^2 = 9\alpha\beta$

したがって　$(-2a)^2 = 9(a^2 - 5)$

① に注意してこれを解くと　$\boldsymbol{a = -3}$　■

2 (1) $\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ = 2\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \mathbf{1}$



(2) AD は ∠A の二等分線であるから

BD : DC = AD : AC = 2 : 1

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}}$

(3) M は BC の中点，BD : DC = 2 : 1 より

MD : DC = 1 : 2

また，△MED ∽ △CAD より

ED : AD = 1 : 2

よって　**AD : AE = 2 : 3**　■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x^2+4y^2=5$ を x で微分すると　$2x+8yy'=0$　ゆえに　$y'=-\dfrac{x}{4y}$

$b\neq 0$ のとき，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の傾きは　$-\dfrac{a}{4b}$

したがって，接線の方程式は

$$y-b=-\frac{a}{4b}(x-a)\quad \text{ゆえに}\quad ax+4by=a^2+4b^2$$

$\mathrm{P}(a,\ b)$ は楕円 C 上の点であるから　　$a^2+4b^2=5$

よって，$\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は　　$ax+4by=5$　$\cdots(*)$

$b=0$，すなわち，点 $(\pm\sqrt{5},\ 0)$ における接線の方程式は　$x=\pm\sqrt{5}$

これは，$(*)$ をみたす．

別解 $(x,y)=(x(t),y(t))$ を C 上の正則な曲線で，$(a,b)=(x(t_0),y(t_0))$ とする．
$f(t)=\{x(t)\}^2+4\{y(t)\}^2-5$ とおくと

$$f'(t)=2x(t)x'(t)+8y(t)y'(t)$$

$f(t)=0$ であるから，$f'(t)=0$ より　$x(t)x'(t)+4y(t)y'(t)=0$

これに $t=t_0$ を代入すると　　$ax'(t_0)+4by'(t_0)=0$

ベクトル $(x'(t_0),\ y'(t_0))$ は曲線の P における接ベクトルで，ベクトル $(a,\ 4b)$ は C の P における法ベクトルである．よって，C の P における接線の方程式は

$$a(x-a)+4b(y-b)=0\quad \text{整理すると}\quad ax+4by=a^2+4b^2$$

$\mathrm{P}(a,\ b)$ は楕円 C 上の点であるから　　$a^2+4b^2=5$

よって，$\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は　　$ax+4by=5$

(2) $\mathrm{T}_1(a_1,\ b_1)$，$\mathrm{T}_2(a_2,\ b_2)$ とおくと，C の T_1，T_2 における接線の方程式は，それぞれ

$$a_1x+4b_1y=5,\quad a_2x+4b_2y=5$$

これらは，点 $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を通るから

$$a_1+6b_1=5,\quad a_2+6b_2=5$$

これから，2 点 T_1，T_2 を通る直線の方程式は　　$\boldsymbol{x+6y=5}$

解説 $x+6y=5$ を $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{3}{2}\right)$ を極とする C の極線という．　■

$\boxed{4}$ (1) $$a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} \int_0^k a_k e^x \, dx = \sum_{k=1}^{n} a_k \Big[\, e^x \, \Big]_0^k = \sum_{k=1}^{n} a_k(e^k - 1) \quad \cdots (*)$$

ゆえに $$a_2 = a_1(e-1) = \frac{e}{e-1}(e-1) = \boldsymbol{e}$$

$$a_3 = a_1(e-1) + a_2(e^2-1) = e + e(e^2-1) = \boldsymbol{e^3}$$

(2) $(*)$ より，$n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned} a_n - a_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k(e^k-1) - \sum_{k=1}^{n-2} a_k(e^k-1) \\ &= a_{n-1}(e^{n-1}-1) \end{aligned}$$

整理すると $\quad a_n = e^{n-1}a_{n-1} \quad$ ゆえに $\quad \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = e^{n-1}$

$n \geqq 3$ のとき
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_3}{a_2} \cdot a_2 \\ &= e^{n-1} \cdot e^{n-2} \cdots e^2 \cdot e \\ &= e^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1} = e^{\frac{1}{2}n(n-1)} \end{aligned}$$

上式は，$n = 2$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{e}{e-1}, \quad a_n = e^{\frac{1}{2}n(n-1)} \quad (n \geqq 2)}$$

(3) (2) の結果から
$$\frac{\log a_n}{n^2} = \frac{\frac{1}{2}n(n-1)}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$$

よって $$\boldsymbol{\lim_{n \to \infty} \frac{\log a_n}{n^2} = \frac{1}{2}}$$

■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ とおく．$P(x)$ を $x^2 - 2x + 5$ で割った商と余りは，それぞれ $2x + a + 4$，$(2a + b - 2)x + (-5a + c - 20)$ であるから

$$P(x) = (x^2 - 2x + 5)(2x + a + 4) + (2a + b - 2)x + (-5a + c - 20) \quad \cdots (*)$$

$z = 1 - 2i$ とすると，$P(z) = 0$，$z^2 - 2z + 5 = 0$ であるから

$$(2a + b - 2)z + (-5a + c - 20) = 0$$

$2a + b - 2$，$-5a + c - 20$ は実数であるから

$$2a + b - 2 = 0, \quad -5a + c - 20 = 0$$

これを $(*)$ に代入すると

$$P(x) = (x^2 - 2x + 5)(2x + a + 4)$$

$\overline{z} = 1 + 2i$ とすると　　$\overline{z}^2 - 2\overline{z} + 5 = 0$

したがって，$P(\overline{z}) = 0$ となる．よって，$1 + 2i$ も $P(x) = 0$ の解である．

参照 九大2012年一般前期理系数学 $\boxed{4}$ の補足[1] を参照.

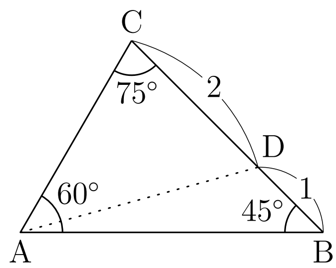
(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ より，$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ であるから

$$A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3E$$

よって　　$(A + A^{-1})^2 = 9E = \begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{9} \end{pmatrix}$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) 正弦定理により



$$\frac{3}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ} \quad ゆえに \quad b = \sqrt{6}$$

加法定理により

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(45^\circ + 30^\circ)\\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$\triangle$ABC の面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}ab\sin 75^\circ = \frac{1}{2}\times 3\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \boldsymbol{\frac{3}{4}(3+\sqrt{3})}$$

別解 第1余弦定理により

$$c = a\cos B + b\cos A = 3\cos 45^\circ + \sqrt{6}\cos 60^\circ = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

よって　$S = \dfrac{1}{2}ca\sin 45^\circ = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\times 3\times\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{3}{4}(3+\sqrt{3})$

第1余弦定理

$$\begin{aligned}a &= b\cos C + c\cos B\\ b &= c\cos A + a\cos C\\ c &= a\cos B + b\cos A\end{aligned}$$

単に余弦定理というと第2余弦定理を指す.

(2) $\triangle$DAC と $\triangle$ABC について

$$\frac{\text{CD}}{\text{CA}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\text{CA}}{\text{CB}}, \quad \angle\text{C} は共通$$

2組の辺の比とその間の角が等しいから　　$\triangle\text{ABC} \backsim \triangle\text{DAC}$　■

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1) $a_2 = \dfrac{1}{3}a_1 + 1 = \dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{5}{4}\right) + 1 = \dfrac{7}{12}$

$b_1 = a_2 - a_1 = \dfrac{7}{12} - \left(-\dfrac{5}{4}\right) = \mathbf{\dfrac{11}{6}}$

(2) 与えらえた漸化式から

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + n, \quad a_{n+2} = \frac{1}{3}a_{n+1} + n + 1$$

上の第 2 式から第 1 式の辺々を引くと

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{3}(a_{n+1} - a_n) + 1 \quad \text{すなわち} \quad b_{n+1} = \frac{1}{3}b_n + 1$$

したがって $\quad b_{n+1} - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{3}\left(b_n - \dfrac{3}{2}\right)$

$$b_n - \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left(b_1 - \frac{3}{2}\right)$$

よって $\quad \boldsymbol{b_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n + \dfrac{3}{2}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \\ &= -\frac{5}{4} + \sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{3}{2}\right\} \\ &= -\frac{5}{4} + \frac{\dfrac{1}{3}\left\{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1 - \dfrac{1}{3}} + \frac{3}{2}(n-1) \\ &= \boldsymbol{\frac{3}{2}n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{9}{4}} \end{aligned}$$

■

$\boxed{8}$ (1) $f(x)=(ax+b)e^x$ より　$f'(x)=(ax+a+b)e^x$

$f(x)$ は $x=2$ で極小値 $-\dfrac{1}{3}e^2$ をとるから，$f(2)=-\dfrac{1}{3}e^2$，$f'(2)=0$ より

$$(2a+b)e^2=-\frac{1}{3}e^2,\quad (3a+b)e^2=0$$

したがって　$2a+b=-\dfrac{1}{3}$，$3a+b=0$　これを解いて　$a=\dfrac{1}{3}$，$b=-1$

このとき　$f(x)=\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)e^x$，$f'(x)=\left(\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}\right)e^x$

$f(x)$ の増減表は右のようになり，
条件をみたす.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　$\boldsymbol{a=\dfrac{1}{3}}$, $\boldsymbol{b=-1}$

(2) $f(x)=\left(\dfrac{1}{3}x-1\right)e^x$ より

$$\begin{aligned}\int_0^4 f(x)\,dx &= \int_0^4 \left(\frac{1}{3}x-1\right)e^x\,dx \\ &= \Big[\left(\frac{1}{3}x-\frac{4}{3}\right)e^x\Big]_0^4 = \boldsymbol{\frac{4}{3}}\end{aligned}$$

■