

平成19年度 福岡教育大学2次試験前期日程(数学問題)

教育学部 平成19年2月25日

- 中等教育数学, 理科専攻, 環境情報教育情報教育コース
 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 初等教育人文・社会, 自然, 実技, 教育・心理・幼児教育コース
 $\boxed{1}$ (1)(2) $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ 数I・II・A・B (100分)

 $\boxed{1}$ 次の問いに答えよ.

- (1) 鋭角三角形の3つの角の大きさを α , β , γ とする. このとき, $\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}$ を $\tan \alpha$, $\tan \beta$ を用いて表せ.
- (2) 2次方程式 $x^2 - (2a + 5)x + a + 3 = 0$ の2つの解が $\log_2 2b$ と $\log_2 4b$ であるとき, 定数 a , b の値を求めよ.
- (3) 関数 $y = e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + \cos 2x)$ は, 次の等式を満たすことを示せ.

$$4y'' - 12y' + 25y = 0$$

 $\boxed{2}$ 次の命題の真偽を述べよ. また, その命題が真である場合には証明し, 偽である場合には反例をあげよ.

- (1) ab が無理数ならば, a と b の少なくとも一方は無理数である.
- (2) a が有理数, b が無理数ならば, $a + b$, ab はともに無理数である.
- (3) n を正の整数とし, $f(n) = 2^n + 3^n$ とする. このとき, $f(2n - 1)$ は5の倍数となる.

 $\boxed{3}$ x , y についての連立1次方程式

$$\begin{cases} (a - 6)x - 4y = p \\ 5x + (a + 3)y = q \end{cases}$$

において, 係数の行列を $A = \begin{pmatrix} a - 6 & -4 \\ 5 & a + 3 \end{pmatrix}$ とする. A が逆行列をもたないとき, 次の問に答えよ.

- (1) a の値を求めよ.
- (2) 上の連立1次方程式が解をもつとする. このとき, p を q を用いて表せ.
- (3) A^{2007} を求めよ.

4 関数 $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ ($1 \leq x \leq e^3$) について、次の問いに答えよ。ただし、 $\log x$ は自然対数とし、その底を e とする。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べ、極値を求めよ。また、グラフの凹凸を調べ、変曲点を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = e^2$ によって囲まれた部分の面積 S を求めよ。
- (3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = e^3$ によって囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

5 1 から 5 までの番号をつけた 5 枚のカードから 3 枚を同時に取り出すとき次の問いに答えよ。

- (1) 番号の和が 8 となる確率を求めよ。
- (2) 番号の和の期待値を求めよ。
- (3) 一番大きい番号の期待値を求めよ。

6 四面体 $OABC$ において、辺 OA の中点を D 、辺 OB を $1:2$ に内分する点を E 、辺 OC を $1:4$ に内分する点を F とする。また、 $\triangle ABC$ の重心を G とする。 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ 、 $\vec{OC} = \vec{c}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 3 点 D 、 E 、 F の定める平面を α とする。直線 OG と平面 α の交点を P とするとき、 \vec{OP} を \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} を用いて表せ。
- (2) \vec{DP} を \vec{DE} 、 \vec{DF} を用いて表せ。
- (3) $\triangle PDE$ 、 $\triangle PEF$ 、 $\triangle PFD$ の面積をそれぞれ S_1 、 S_2 、 S_3 とするとき、 $S_1 : S_2 : S_3$ を最も簡単な整数の比で表せ。

7 $a > 0$ とし、2 つの放物線を

$$C_1 : y = x^2 + ax$$

$$C_2 : y = \frac{1}{4}x^2$$

とする。次の問いに答えよ。

- (1) 放物線 C_1 上の点 $(t, t^2 + at)$ における接線の方程式を求めよ。
- (2) 放物線 C_1 、 C_2 の両方に接する直線の方程式を求めよ。
- (3) (2) で求めた接線のうち、傾きが正であるものを l とする。放物線 C_1 、 C_2 および接線 l で囲まれた部分の面積が 1 となるような a の値を求めよ。

解答例

- 1 (1) $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ であるから, $\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$ より

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma} &= \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \beta}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta}} = \frac{\tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} \end{aligned}$$

- (2) $\log_2 2b = \log_2 b + 1$, $\log_2 4b = \log_2 b + 2$

2次方程式 $x^2 - (2a + 5)x + a + 3 = 0$ の解が $\log_2 b + 1$, $\log_2 b + 2$ であるから, 解と係数の関係により

$$(\log_2 b + 1) + (\log_2 b + 2) = 2a + 5, \quad (\log_2 b + 1)(\log_2 b + 2) = a + 3$$

上の第1式から, $\log_2 b = a + 1 \cdots \textcircled{1}$. これを第2式に代入すると

$$(a + 2)(a + 3) = a + 3 \quad \text{これを解いて} \quad a = -1, -3$$

$$\textcircled{1} \text{ より} \quad a = -1 \text{ のとき} \quad \log_2 b = 0 \quad \text{すなわち} \quad b = 1$$

$$a = -3 \text{ のとき} \quad \log_2 b = -2 \quad \text{すなわち} \quad b = \frac{1}{4}$$

$$\text{よって} \quad (a, b) = (-1, 1), \left(-3, \frac{1}{4}\right)$$

(3) $y = e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + \cos 2x)$ より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + \cos 2x) + e^{\frac{3}{2}x}(2 \cos 2x - 2 \sin 2x) \\ &= e^{\frac{3}{2}x} \left(-\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{7}{2} \cos 2x \right), \\ y'' &= \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x} \left(-\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{7}{2} \cos 2x \right) + e^{\frac{3}{2}x} (-\cos 2x - 7 \sin 2x) \\ &= e^{\frac{3}{2}x} \left(-\frac{31}{4} \sin 2x + \frac{17}{4} \cos 2x \right) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} 4y'' - 12y' + 25y &= 4e^{\frac{3}{2}x} \left(-\frac{31}{4} \sin 2x + \frac{17}{4} \cos 2x \right) \\ &\quad - 12e^{\frac{3}{2}x} \left(-\frac{1}{2} \sin 2x + \frac{7}{2} \cos 2x \right) \\ &\quad + 25e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + \cos 2x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

補足 微分方程式 $4y'' - 12y' + 25 = 0 \cdots (*)$ の特性方程式 $4\lambda^2 - 12\lambda + 25 = 0$ の解は $\frac{3}{2} \pm 2i$ であるから、微分方程式 $(*)$ の解は

$$y = e^{\frac{3}{2}x}(A \sin 2x + B \cos 2x) \quad (A, B \text{ は定数})$$

参照 <http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/diff.eq.pdf> ■

- 2** (1) 真
命題「 a と b がともに有理数ならば ab は有理数である」は真である。この命題の対偶が与えられた命題である。
- (2) 偽
反例： $a = 0, b = \sqrt{2}$
- (3) 真
 $f(2n - 1) = 2^{2n-1} + 3^{2n-1} \equiv 2^{2n-1} + (-2)^{2n-1} \equiv 0 \pmod{5}$ ■

3 (1) A は逆行列をもたないので, $\det A \neq 0$ より

$$(a-6)(a+3) - (-4) \cdot 5 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad \mathbf{a = 1, 2}$$

(2) i) $a = 1$ のとき

$$\begin{cases} -5x - 4y = p \\ 5x + 4y = q \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -5x - 4y = p \\ -5x - 4y = -q \end{cases}$$

この連立方程式が解をもつとき, $p = -q$

ii) $a = 2$ のとき

$$\begin{cases} -4x - 4y = p \\ 5x + 5y = q \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -4x - 4y = p \\ -4x - 4y = -\frac{4}{5}q \end{cases}$$

この連立方程式が解をもつとき, $p = -\frac{4}{5}q$

$$\text{i), ii) より} \quad \begin{cases} \mathbf{a = 1} \text{ のとき} & \mathbf{p = -q} \\ \mathbf{a = 2} \text{ のとき} & \mathbf{p = -\frac{4}{5}q} \end{cases}$$

(3) A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると, $\det A = 0$ より

$$A^2 - (2a-3)A = O \quad \text{ゆえに} \quad A^{n+1} = (2a-3)A^n$$

したがって $A^n = (2a-3)^{n-1}A \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

$$\text{ゆえに} \quad a = 1 \text{ のとき} \quad A^n = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$a = 2 \text{ のとき} \quad A^n = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{よって} \quad a = 1 \text{ のとき} \quad \mathbf{A^{2007}} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},$$

$$a = 2 \text{ のとき} \quad \mathbf{A^{2007}} = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

■

4 (1) $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \log x$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \log x + x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \log x + x^{-\frac{3}{2}} = \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}, \\ f''(x) &= \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} \log x - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} - \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}} \\ &= \frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}} \log x - 2x^{-\frac{5}{2}} = \frac{3 \log x - 8}{4x^2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

したがって、 $f(x)$ の増減表は次のようになる。

x	1	...	e^2	...	$e^{\frac{8}{3}}$...	e^3
$f'(x)$		+	0	-	-	-	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	$\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}$	↘	$3e^{-\frac{3}{2}}$

よって 極大値 $f(e^2) = \frac{2}{e}$, 変曲点 $(e^{\frac{8}{3}}, \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}})$

$$(2) S = \int_1^{e^2} \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x}(\log x - 2) \right]_1^{e^2} = 4$$

解説 $\int \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx = \int (2\sqrt{x})' \log x dx = 2\sqrt{x} \log x - \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx$
 $= 2\sqrt{x} \log x - 4\sqrt{x} + C$

$$(3) \frac{V}{\pi} = \int_1^{e^3} \left(\frac{\log x}{\sqrt{x}} \right)^2 dx = \int_1^{e^3} (\log x)^2 (\log x)' dx = \left[\frac{1}{3} (\log x)^3 \right]_1^{e^3} = 9$$

よって $V = 9\pi$ ■

- 5 (1) 取り出した3枚のカードの組合せとその和は下の表のようになる.

和	3枚のカード
6	{1, 2, 3}
7	{1, 2, 4}
8	{1, 3, 4}, {1, 2, 5}
9	{2, 3, 4}, {1, 3, 5}
10	{1, 4, 5}, {2, 3, 5}
11	{2, 4, 5}
12	{3, 4, 5}

よって, 求める確率は $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

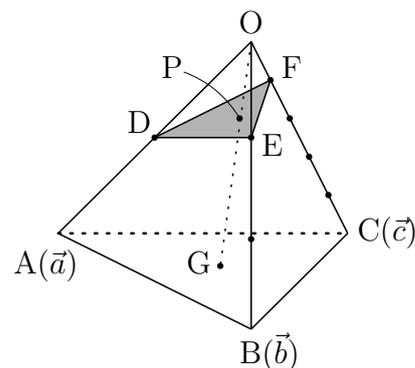
- (2) 求める期待値は

$$6 \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{2}{10} + 9 \cdot \frac{2}{10} + 10 \cdot \frac{2}{10} + 11 \cdot \frac{1}{10} + 12 \cdot \frac{1}{10} = 9$$

- (3) 求める期待値は $3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{3}{10} + 5 \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{2}$ ■

- 6 (1) PはOG上の点であるから、実数kを用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= k\overrightarrow{OG} = \frac{k}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \frac{k}{3}(2\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OE} + 5\overrightarrow{OF}) \quad \dots \textcircled{1} \\ &= \frac{2k}{3}\overrightarrow{OD} + k\overrightarrow{OE} + \frac{5k}{3}\overrightarrow{OF}\end{aligned}$$



また、Pは平面DEF上の点であるから

$$\frac{2k}{3} + k + \frac{5k}{3} = 1 \quad \text{ゆえに} \quad k = \frac{3}{10}$$

$$\text{よって} \quad \overrightarrow{OP} = \frac{1}{10}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

- (2) ①より $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{10}(2\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OE} + 5\overrightarrow{OF}) \quad \dots \textcircled{1}'$

$$\overrightarrow{DP} = s\overrightarrow{DE} + t\overrightarrow{DF} \quad \text{とおくと}$$

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OD} = s(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}) + t(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD})$$

$$\text{したがって} \quad \overrightarrow{OP} = (1-s-t)\overrightarrow{OD} + s\overrightarrow{OE} + t\overrightarrow{OF} \quad \dots \textcircled{2}$$

\overrightarrow{OD} , \overrightarrow{OE} , \overrightarrow{OF} は1次独立であるから、①'と②の係数を比較して

$$s = \frac{3}{10}, \quad t = \frac{1}{2} \quad \text{よって} \quad \overrightarrow{DP} = \frac{3}{10}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DF}$$

- (3) (2)の結果から $\overrightarrow{DP} = \frac{4}{5} \cdot \frac{3\overrightarrow{DE} + 5\overrightarrow{DF}}{8}$

DPとEFの交点をQとおくと

$$DP : PQ = 4 : 1$$

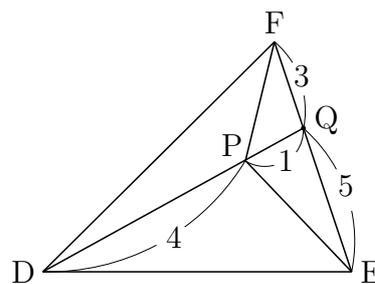
$\triangle DEF$ の面積をSとすると

$$S_1 = \triangle PDE = \frac{4}{5}\triangle DEQ = \frac{4}{5} \times \frac{5}{8}S = \frac{1}{2}S$$

$$S_2 = \triangle PEF = \frac{PQ}{DQ}S = \frac{1}{5}S$$

$$S_3 = \triangle PFD = \frac{4}{5}\triangle DQF = \frac{4}{5} \times \frac{3}{8}S = \frac{3}{10}S$$

$$\text{よって} \quad S_1 : S_2 : S_3 = \frac{1}{2}S : \frac{1}{5}S : \frac{3}{10}S = 5 : 2 : 3$$



解説 (2)の結果から $5\overrightarrow{PF} + 2\overrightarrow{PD} + 3\overrightarrow{PE} = \vec{0}$ よって $S_1 : S_2 : S_3 = 5 : 2 : 3$



7 (1) $y = x^2 + ax$ を微分すると $y' = 2x + a$

したがって、 C_1 上の点 $(t, t^2 + at)$ における接線の方程式は

$$y - (t^2 + at) = (2t + a)(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = (2t + a)x - t^2$$

(2) (1) で求めた直線と C_2 の方程式から y を消去して、整理すると

$$\frac{1}{4}x^2 - (2t + a)x + t^2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

この方程式は重解をもつので、係数について

$$(2t + a)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}t^2 = 0 \quad \text{これを解いて} \quad t = -a, -\frac{a}{3}$$

これらを (1) の結果に代入して $y = -ax - a^2$, $y = \frac{a}{3}x - \frac{a^2}{9}$

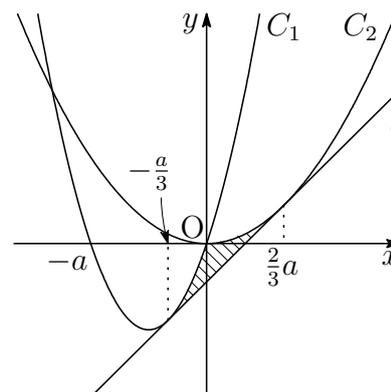
(3) $a > 0$ より $l: y = \frac{a}{3}x - \frac{a^2}{9}$

ゆえに C_1 と l の接点の x 座標は

$$x = t = -\frac{a}{3}$$

C_2 と l の接点の x 座標は、 $\textcircled{1}$ より

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{a}{3}x + \frac{a^2}{9} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{2}{3}a$$



C_1 , C_2 および l で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{a}{3}}^0 \left\{ (x^2 + ax) - \left(\frac{a}{3}x - \frac{a^2}{9} \right) \right\} dx + \int_0^{\frac{2}{3}a} \left\{ \frac{1}{4}x^2 - \left(\frac{a}{3}x - \frac{a^2}{9} \right) \right\} dx \\ &= \int_{-\frac{a}{3}}^0 \left(x + \frac{a}{3} \right)^2 dx + \int_0^{\frac{2}{3}a} \frac{1}{4} \left(x - \frac{2}{3}a \right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \left(x + \frac{a}{3} \right)^3 \right]_{-\frac{a}{3}}^0 + \left[\frac{1}{12} \left(x - \frac{2}{3}a \right)^3 \right]_0^{\frac{2}{3}a} = \frac{a^3}{27} \end{aligned}$$

$S = 1$ であるから $\frac{a^3}{27} = 1$ よって $a = 3$ ■