平成19年度　福岡教育大学2次試験前期日程(数学問題)
教育学部　平成19年2月25日

- 中等教育数学，理科専攻，環境情報教育情報教育コースは，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数II・III・A・B・C (120分)
- 初等教育人文・社会，自然，実技，教育・心理・幼児教育コースは，$\boxed{1}$ (1)，(2)，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{7}$ 数II・A・B (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 鋭角三角形の3つの角の大きさを α，β，γ とする．このとき，$\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$ を $\tan\alpha$，$\tan\beta$ を用いて表せ．

(2) 2次方程式 $x^2-(2a+5)x+a+3=0$ の2つの解が $\log_2 2b$ と $\log_2 4b$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ．

(3) 関数 $y=e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x+\cos 2x)$ は，次の等式を満たすことを示せ．

$$4y''-12y'+25y=0$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の命題の真偽を述べよ．また，その命題が真である場合には証明し，偽である場合には反例をあげよ．

(1) ab が無理数ならば，a と b の少なくとも一方は無理数である．

(2) a が有理数，b が無理数ならば，$a+b$，ab はともに無理数である．

(3) n を正の整数とし，$f(n)=2^n+3^n$ とする．このとき，$f(2n-1)$ は5の倍数となる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ x，y についての連立1次方程式

$$\begin{cases}(a-6)x-4y=p\\ 5x+(a+3)y=q\end{cases}$$

において，係数の行列を $A=\begin{pmatrix}a-6 & -4\\ 5 & a+3\end{pmatrix}$ とする．A が逆行列をもたないとき，次の問に答えよ．

(1) a の値を求めよ．

(2) 上の連立1次方程式が解をもつとする．このとき，p を q を用いて表せ．

(3) A^{2007} を求めよ．

4 関数 $f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ $(1 \leqq x \leqq e^3)$ について，次の問いに答えよ．ただし，$\log x$ は自然対数とし，その底を e とする．

(1) 関数 $y = f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．また，グラフの凹凸を調べ，変曲点を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = e^2$ によって囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸および直線 $x = e^3$ によって囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ．

5 1 から 5 までの番号をつけた 5 枚のカードから 3 枚を同時に取り出すとき次の問いに答えよ．

(1) 番号の和が 8 となる確率を求めよ．

(2) 番号の和の期待値を求めよ．

(3) 一番大きい番号の期待値を求めよ．

6 四面体 OABC において，辺 OA の中点を D，辺 OB を 1 : 2 に内分する点を E，辺 OC を 1 : 4 に内分する点を F とする．また，△ABC の重心を G とする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) 3 点 D，E，F の定める平面を α とする．直線 OG と平面 α の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を用いて表せ．

(3) △PDE，△PEF，△PFD の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とするとき，$S_1 : S_2 : S_3$ を最も簡単な整数の比で表せ．

7 $a > 0$ とし，2 つの放物線を

$$C_1 : y = x^2 + ax$$
$$C_2 : y = \frac{1}{4}x^2$$

とする．次の問いに答えよ．

(1) 放物線 C_1 上の点 $(t,\ t^2 + at)$ における接線の方程式を求めよ．

(2) 放物線 C_1，C_2 の両方に接する直線の方程式を求めよ．

(3) (2) で求めた接線のうち，傾きが正であるものを l とする．放物線 C_1，C_2 および接線 l で囲まれた部分の面積が 1 となるような a の値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ であるから，$\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$ より

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\boldsymbol{\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}}$$

(2)
$$\log_2 2b=\log_2 b+1,\ \log_2 4b=\log_2 b+2$$

2 次方程式 $x^2-(2a+5)x+a+3=0$ の解が $\log_2 b+1$，$\log_2 b+2$ であるから，解と係数の関係により

$$(\log_2 b+1)+(\log_2 b+2)=2a+5,\quad (\log_2 b+1)(\log_2 b+2)=a+3$$

上の第 1 式から，$\log_2 b=a+1\cdots$①．これを第 2 式に代入すると

$$(a+2)(a+3)=a+3\quad \text{これを解いて}\quad a=-1,-3$$

① より　$a=-1$ のとき　$\log_2 b=0$　すなわち　$b=1$

$a=-3$ のとき　$\log_2 b=-2$　すなわち　$b=\dfrac{1}{4}$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=(-1,\ 1),\ \left(-3,\ \frac{1}{4}\right)}$

(3) $y = e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + \cos 2x)$ より

$$\begin{aligned} y' &= \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + \cos 2x) + e^{\frac{3}{2}x}(2\cos 2x - 2\sin 2x) \\ &= e^{\frac{3}{2}x}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{7}{2}\cos 2x\right), \\ y'' &= \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{7}{2}\cos 2x\right) + e^{\frac{3}{2}x}\left(-\cos 2x - 7\sin 2x\right) \\ &= e^{\frac{3}{2}x}\left(-\frac{31}{4}\sin 2x + \frac{17}{4}\cos 2x\right) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} 4y'' - 12y' + 25y = 4e^{\frac{3}{2}x}&\left(-\frac{31}{4}\sin 2x + \frac{17}{4}\cos 2x\right) \\ &- 12e^{\frac{3}{2}x}\left(-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{7}{2}\cos 2x\right) \\ &+ 25e^{\frac{3}{2}x}(\sin 2x + \cos 2x) \\ = 0 \end{aligned}$$

補足 微分方程式 $4y'' - 12y' + 25 = 0 \cdots (*)$ の特性方程式 $4\lambda^2 - 12\lambda + 25 = 0$ の解は $\dfrac{3}{2} \pm 2i$ であるから，微分方程式 $(*)$ の解は

$$y = e^{\frac{3}{2}x}(A\sin 2x + B\cos 2x) \quad (A,\ B\ \text{は定数})$$

参照 http://kumamoto.s12.xrea.com/chie/diff_eq.pdf

2 (1) 真

命題「a と b がともに有理数ならば ab は有理数である」は真である．この命題の対偶が与えられた命題である．

(2) 偽

反例：$a = 0$，$b = \sqrt{2}$

(3) 真

$f(2n-1) = 2^{2n-1} + 3^{2n-1} \equiv 2^{2n-1} + (-2)^{2n-1} \equiv 0 \pmod 5$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) A は逆行列をもたないので，$\det A \neq 0$ より

$$(a-6)(a+3)-(-4)\cdot 5=0 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=1,\ 2}$$

(2) i) $a=1$ のとき

$$\begin{cases} -5x-4y=p \\ 5x+4y=q \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -5x-4y=p \\ -5x-4y=-q \end{cases}$$

この連立方程式が解をもつとき，$p=-q$

ii) $a=2$ のとき

$$\begin{cases} -4x-4y=p \\ 5x+5y=q \end{cases} \quad \text{ゆえに} \quad \begin{cases} -4x-4y=p \\ -4x-4y=-\frac{4}{5}q \end{cases}$$

この連立方程式が解をもつとき，$p=-\frac{4}{5}q$

i)，ii) より $\begin{cases} \boldsymbol{a=1} \textbf{ のとき } \boldsymbol{p=-q} \\ \boldsymbol{a=2} \textbf{ のとき } \boldsymbol{p=-\dfrac{4}{5}q} \end{cases}$

(3) A にハミルトン・ケリーの定理を適用すると，$\det A=0$ より

$$A^2-(2a-3)A=O \quad \text{ゆえに} \quad A^{n+1}=(2a-3)A^n$$

したがって　$A^n=(2a-3)^{n-1}A \quad (n=1,2,3,\cdots)$

ゆえに　$a=1$ のとき　$A^n=(-1)^{n-1}\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$,

$a=2$ のとき　$A^n=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$

よって　$a=1$ のとき　$\boldsymbol{A^{2007}=\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}}$,

$a=2$ のとき　$\boldsymbol{A^{2007}=\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}\log x$ より

$$\begin{aligned} f'(x)&=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\log x+x^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{x}\\ &=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\log x+x^{-\frac{3}{2}}=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}},\\ f''(x)&=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}\log x-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{x}-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\\ &=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}\log x-2x^{-\frac{5}{2}}=\frac{3\log x-8}{4x^2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$	$e^{\frac{8}{3}}$	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{e}$	$\searrow$	$\frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}$	$\searrow$	$3e^{-\frac{3}{2}}$

よって　　極大値 $f(e^2)=\boldsymbol{\dfrac{2}{e}}$，変曲点 $\boldsymbol{\left(e^{\frac{8}{3}},\ \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}}\right)}$

(2) $S=\displaystyle\int_1^{e^2}\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx=\Big[\,2\sqrt{x}(\log x-2)\,\Big]_1^{e^2}=\mathbf{4}$

解説 $\displaystyle\int\frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx=\int(2\sqrt{x})'\log x\,dx=2\sqrt{x}\log x-\int\frac{2}{\sqrt{x}}\,dx$

$$=2\sqrt{x}\log x-4\sqrt{x}+C$$

(3) $\dfrac{V}{\pi}=\displaystyle\int_1^{e^3}\left(\frac{\log x}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\int_1^{e^3}(\log x)^2(\log x)'\,dx=\Big[\,\frac{1}{3}(\log x)^3\,\Big]_1^{e^3}=9$

よって　　$\boldsymbol{V=9\pi}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 取り出した3枚のカードの組合せとその和は下の表のようになる．

和	3枚のカード
6	$\{1, 2, 3\}$
7	$\{1, 2, 4\}$
8	$\{1, 3, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$
9	$\{2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 5\}$
10	$\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$
11	$\{2, 4, 5\}$
12	$\{3, 4, 5\}$

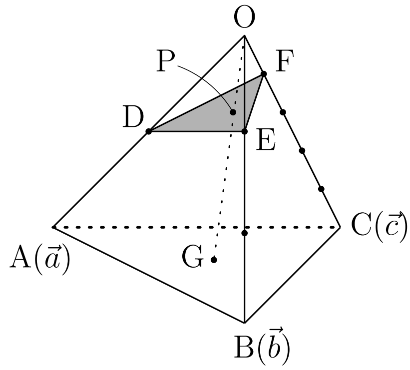
よって，求める確率は $\dfrac{2}{10} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$

(2) 求める期待値は

$$6\cdot\frac{1}{10} + 7\cdot\frac{1}{10} + 8\cdot\frac{2}{10} + 9\cdot\frac{2}{10} + 10\cdot\frac{2}{10} + 11\cdot\frac{1}{10} + 12\cdot\frac{1}{10} = \mathbf{9}$$

(3) 求める期待値は $3\cdot\dfrac{1}{10} + 4\cdot\dfrac{3}{10} + 5\cdot\dfrac{6}{10} = \dfrac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) P は OG 上の点であるから，実数 k を用いて



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}} &= k\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{k}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\\ &= \frac{k}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{OD}}+3\overrightarrow{\mathrm{OE}}+5\overrightarrow{\mathrm{OF}}) \quad \cdots ①\\ &= \frac{2k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+k\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{5k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OF}}\end{aligned}$$

また，P は平面 DEF 上の点であるから

$$\frac{2k}{3}+k+\frac{5k}{3}=1 \quad \text{ゆえに} \quad k=\frac{3}{10}$$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{10}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})}$

(2) ① より　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{10}(2\overrightarrow{\mathrm{OD}}+3\overrightarrow{\mathrm{OE}}+5\overrightarrow{\mathrm{OF}}) \quad \cdots ①'$

$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = s\overrightarrow{\mathrm{DE}}+t\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ とおくと

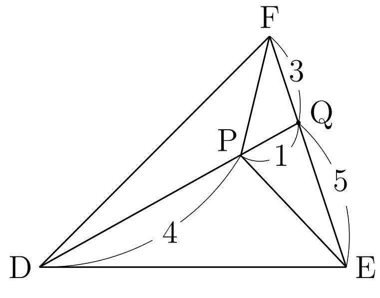
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}} = s(\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})+t(\overrightarrow{\mathrm{OF}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}})$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (1-s-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{OE}}+t\overrightarrow{\mathrm{OF}} \quad \cdots ②$

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ は 1 次独立であるから，①′ と ② の係数を比較して

$$s=\frac{3}{10},\ t=\frac{1}{2} \qquad \text{よって} \qquad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \frac{3}{10}\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{DF}}}$$

(3) (2) の結果から　$\overrightarrow{\mathrm{DP}} = \frac{4}{5}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{DE}}+5\overrightarrow{\mathrm{DF}}}{8}$



DP と EF の交点を Q とおくと

$$\mathrm{DP}:\mathrm{PQ}=4:1$$

△DEF の面積を S とすると

$$S_1 = \triangle\mathrm{PDE} = \frac{4}{5}\triangle\mathrm{DEQ} = \frac{4}{5}\times\frac{5}{8}S = \frac{1}{2}S$$

$$S_2 = \triangle\mathrm{PEF} = \frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{DQ}}S = \frac{1}{5}S$$

$$S_3 = \triangle\mathrm{PFD} = \frac{4}{5}\triangle\mathrm{DQF} = \frac{4}{5}\times\frac{3}{8}S = \frac{3}{10}S$$

よって　$S_1:S_2:S_3 = \frac{1}{2}S:\frac{1}{5}S:\frac{3}{10}S = \mathbf{5:2:3}$

解説 (2) の結果から　$5\overrightarrow{\mathrm{PF}}+2\overrightarrow{\mathrm{PD}}+3\overrightarrow{\mathrm{PE}}=\vec{0}$　よって　$S_1:S_2:S_3=5:2:3$

$\boxed{\textbf{7}}$ (1) $y=x^2+ax$ を微分すると　$y'=2x+a$

したがって，C_1 上の点 $(t,\ t^2+at)$ における接線の方程式は

$$y-(t^2+at)=(2t+a)(x-t) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=(2t+a)x-t^2}$$

(2) (1) で求めた直線と C_2 の方程式から y を消去して，整理すると

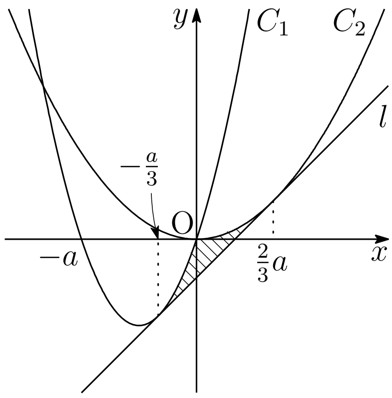
$$\frac{1}{4}x^2-(2t+a)x+t^2=0 \quad \cdots①$$

この方程式は重解をもつので，係数について

$$(2t+a)^2-4\cdot\frac{1}{4}t^2=0 \quad \text{これを解いて} \quad t=-a,-\frac{a}{3}$$

これらを (1) の結果に代入して　$\boldsymbol{y=-ax-a^2,\ y=\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{9}}$

(3) $a>0$ より　$l:y=\dfrac{a}{3}x-\dfrac{a^2}{9}$



ゆえに C_1 と l の接点の x 座標は

$$x=t=-\frac{a}{3}$$

C_2 と l の接点の x 座標は，① より

$$\frac{1}{4}x^2-\frac{a}{3}x+\frac{a^2}{9}=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{2}{3}a$$

C_1，C_2 および l で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S&=\int_{-\frac{a}{3}}^{0}\left\{(x^2+ax)-\left(\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{9}\right)\right\}dx+\int_{0}^{\frac{2}{3}a}\left\{\frac{1}{4}x^2-\left(\frac{a}{3}x-\frac{a^2}{9}\right)\right\}dx \\ &=\int_{-\frac{a}{3}}^{0}\left(x+\frac{a}{3}\right)^2dx+\int_{0}^{\frac{2}{3}a}\frac{1}{4}\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2dx \\ &=\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{a}{3}\right)^3\right]_{-\frac{a}{3}}^{0}+\left[\frac{1}{12}\left(x-\frac{2}{3}a\right)^3\right]_{0}^{\frac{2}{3}a}=\frac{a^3}{27} \end{aligned}$$

$S=1$ であるから　$\dfrac{a^3}{27}=1$　よって　$\boldsymbol{a=3}$