平成17年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　平成17年2月25日

- 中等教育数学，理科専攻，環境情報教育情報教育コースは，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数II・III・A・B・C (120分)
- 初等教育人文・社会，自然，実技，教育・心理・幼児教育コースは，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{7}$ 数II・A・B (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 不等式 $4\sin x \geqq \dfrac{3}{\sin x}$ $(0 < x < 2\pi,\ x \neq \pi)$ を解け.

(2) 関数 $f(x)$ の $x = a$ における微分係数 $f'(a)$ が存在するとき，

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+3h) - f(a-4h)}{h}$$

を $f'(a)$ を用いて表せ.

(3) a は定数で，$0 < a < 1$ とする．関数

$$y = a^{3x} + a^{-3x} - 9(a^{2x} + a^{-2x}) + 27(a^x + a^{-x}) \quad (x \geqq 0)$$

の最小値を求め，そのときの x を求めよ.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 四面体OABCがある．辺ACを1 : 2に内分する点をDとし，線分DBを1 : 2に内分する点をEとする．また，線分CEを延長した直線と辺ABの交点をFとする．$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ.

(1) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を使って，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を表せ.

(2) CE : EF を最も簡単な整数比で表せ.

(3) 四面体OABCの体積を V とするとき，四面体OBEFの体積を V を用いて表せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 2×1 行列 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ と 1×2 行列 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ の積で表される2次の正方行列は逆行列をもたないことを示せ.

(2) 2次の正方行列 A が逆行列をもたなければ，A は 2×1 行列と 1×2 行列の積で表されることを示せ.

(3) k 個の2次の正方行列 $A_1, \cdots, A_k$ の中に逆行列をもたないものがあれば，これらの積 $A_1 \cdots A_k$ も逆行列をもたないことを示せ.

$\boxed{4}$ 自然数 n に対して，$a_n = -\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\,x\,| \cos nx\,dx$，$b_n = -\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx\,dx$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) a_n と b_n の値を求めよ．

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{2n+1}}{b_{2n}}$ は発散することを示せ．

$\boxed{5}$ (1) $(ab+1)(a+1)(b+1)+ab$ を因数分解せよ．

(2) 不等式 $4\sin^2 x \geqq 3$ $(0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ)$ を解け．

(3) 円 $x^2+y^2+2x+6y-6=0$ と中心が同じで，直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$ に接する円の方程式を求めよ．

$\boxed{6}$ 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする．いま $S_n = n^2-25n$ のとき，次の問いに答えよ．

(1) 初項 a_1 を求めよ．

(2) この数列が等差数列であることを示せ．

(3) $S_n > 396$ となる最小の n を求めよ．

$\boxed{7}$ t は実数とする．$f(x) = x|\,x-t\,|$ について，次の問いに答えよ．

(1) $S(t) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ．

(2) (1) で求めた $S(t)$ の最小値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) (i) $0 < x < \pi$ のとき，$\sin x > 0$ であるから

$$4\sin^2 x \geqq 3 \quad \text{ゆえに} \qquad (2\sin x + \sqrt{3}\,)(2\sin x - \sqrt{3}\,) \geqq 0$$

$\sin x > 0$ より　$\sin x \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　すなわち　$\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{2}{3}\pi$

(ii) $\pi < x < 2\pi$ のとき，$\sin x < 0$ であるから

$$4\sin^2 x \leqq 3 \quad \text{ゆえに} \qquad (2\sin x + \sqrt{3}\,)(2\sin x - \sqrt{3}\,) \leqq 0$$

$\sin x < 0$ より　$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin x < 0$

すなわち　$\pi < x \leqq \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3} \leqq x < 2\pi$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3} \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{3},\ \pi < x \leqq \dfrac{4\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3} \leqq x < 2\pi}$

(2)
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a-4h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times 3 + \frac{f(a-4h)-f(a)}{-4h}\times 4\right\}$$
$$= 3f'(a) + 4f'(a) = \boldsymbol{7f'(a)}$$

(3)
$$y = a^{3x} + a^{-3x} - 9(a^{2x} + a^{-2x}) + 27(a^x + a^{-x}) \quad \cdots(*)$$

$t = a^x + a^{-x}$ とおくと　$t = \left(a^{\frac{x}{2}} - a^{-\frac{x}{2}}\right)^2 + 2 \geqq 2$

また　$a^{2x} + a^{-2x} = (a^x + a^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$

$a^{3x} + a^{-3x} = (a^x + a^{-x})^3 - 3(a^x + a^{-x}) = t^3 - 3t$

上の諸式を $(*)$ に代入すると

$$y = (t^3 - 3t) - 9(t^2 - 2) + 27t$$
$$= t^3 - 9t^2 + 24t + 18$$
$$y' = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4)$$

t	2	$\cdots$	4	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	34	$\nearrow$

ゆえに，y の増減表は次のようになる．

$t = 4$ のとき　$a^x + a^{-x} = 4$　ゆえに　$(a^x)^2 - 4a^x + 1 = 0$

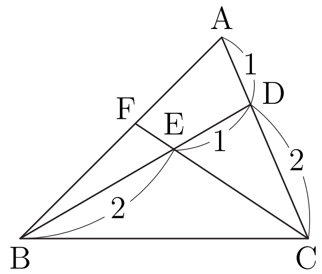
$a^x > 0$ であるから　$a^x = 2 - \sqrt{3}$

よって，$\boldsymbol{x = \log_a(2 - \sqrt{3})}$ のとき最小値 **34** をとる．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}},$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}\right)$

$= \boldsymbol{\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{9}\vec{c}}$



(2) (1) の結果から

$$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \frac{7}{9}\cdot\frac{4\vec{a}+3\vec{b}}{7} + \frac{2}{9}\vec{c} = \frac{7}{9}\overrightarrow{\mathrm{OF}} + \frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \frac{2\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 7\overrightarrow{\mathrm{OF}}}{9}$$

したがって　**CE : EF = 7 : 2**

(3) (2) から　$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \frac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{7}$　ゆえに　BF : FA = 4 : 3

したがって　$\triangle\mathrm{BCF} = \frac{4}{7}\triangle\mathrm{ABC}$

(2) の結果から　$\triangle\mathrm{BEF} = \frac{2}{9}\triangle\mathrm{BCF}$

上の 2 式から　$\triangle\mathrm{BEF} = \frac{2}{9}\cdot\frac{4}{7}\triangle\mathrm{ABC} = \frac{8}{63}\triangle\mathrm{ABC}$

よって，四面体 OBEF の体積は　$\boldsymbol{\frac{8}{63}V}$

$\boxed{3}$ (1) 2×1 行列 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ と 1×2 行列 $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ の積は

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ux & uy \\ vx & vy \end{pmatrix} \quad \cdots ①$$

この 2 次の正方行列の行列式 Δ は

$$\Delta = ux{\cdot}vy - uy{\cdot}vx = 0$$

したがって，① の行列は逆行列をもたない．

(2) 2 次の正方行列 A を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．

A が逆行列をもたないとき

$$ad - bc = 0 \quad \text{すなわち} \quad ad = bc$$

i) $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，

実数 k を用いて $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ とおけるから

$$A = \begin{pmatrix} a & ka \\ c & kc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k \end{pmatrix}$$

ii) $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき，

実数 t を用いて $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおけるから

$$A = \begin{pmatrix} tb & b \\ td & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 1 \end{pmatrix}$$

iii) $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ のとき

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i)〜iii) により，題意は満たされた．

(3) A_1, A_2, $\cdots$, A_k の中で逆行列をもたないものを A_i とする．A_i は 2×1 行列 X と 1×2 行列 Y の積 XY で表されるから

$$\begin{aligned} A_1\cdots A_i\cdots A_k &= A_1\cdots A_{i-1}XYA_{i+1}\cdots A_k \\ &= (A_1\cdots A_{i-1}X)(YA_{i+1}\cdots A_k) \end{aligned}$$

このとき，$A_1\cdots A_{i-1}X$ は 2×1 行列，$YA_{i+1}\cdots A_k$ は 1×2 行列である．したがって，(2) の結果から，$A_1A_2\cdots A_k$ は逆行列をもたない．

別解 一般に，行列 A の行列式を $\det(A)$ とすると，2 つの 2 次の正方行列 A，B について，$\det(AB)=\det(A)\det(B)$ が成り立つ．

したがって，k 個の 2 次の正行列の積 $A_1A_2\cdots A_k$ の行列式は

$$\det(A_1A_2\cdots A_k)=\det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_k) \quad \cdots(*)$$

ゆえに，A_1，A_2，$\cdots$，A_k の中で逆行列をもたないものを A_i とすると，$\det(A_i)=0$ であるから，$(*)$ より

$$\det(A_1A_2\cdots A_k)=0$$

よって，$A_1A_2\cdots A_k$ は逆行列をもたない．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $|\,x\,|\cos nx$，$|\sin x|\cos nx$ は，偶関数であるから

$$
\begin{aligned}
a_n &= -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} |\,x\,|\cos nx\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx \\
&= -\frac{1}{2n}\int_0^{\pi} x(\sin nx)'\,dx \\
&= -\frac{1}{2n}\Big[\ x\sin nx\ \Big]_0^{\pi} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx \\
&= -\frac{1}{2n^2}\Big[\ \cos nx\ \Big]_0^{\pi} = \boldsymbol{\frac{1-(-1)^n}{2n^2}} \\
b_1 &= -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x\cos x\,dx \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx = \frac{1}{8}\Big[\ \cos 2x\ \Big]_0^{\pi} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$n \geqq 2$ のとき

$$
\begin{aligned}
b_n &= -\frac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos nx\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin x\cos nx\,dx \\
&= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\}dx \\
&= \frac{1}{4}\Big[\ \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \frac{\cos(n-1)x}{n-1}\ \Big]_0^{\pi} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}-1}{4(n+1)} - \frac{(-1)^{n-1}-1}{4(n-1)} \\
&= \frac{1+(-1)^n}{4}\left(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\right) = \boldsymbol{\frac{1+(-1)^n}{2(n^2-1)}}
\end{aligned}
$$

(2) (1) の結果から

$$\frac{a_{2n+1}}{b_{2n}} = \frac{1-(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)^2}\cdot\frac{2\{(2n)^2-1\}}{1+(-1)^{2n}} = \frac{2n-1}{2n+1}$$

ここで　$\displaystyle \frac{2n+1}{2n+3} - \frac{2n-1}{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)(2n+3)} > 0$

$\displaystyle \left\{\frac{a_{2n+1}}{b_{2n}}\right\}$ は単調増加列であるから　$\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n+1}}{b_{2n}} > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3}$

よって，$\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n+1}}{b_{2n}}$ は発散する．

$\boxed{5}$ (1)

$$\begin{aligned}
&(ab+1)(a+1)(b+1)+ab\\
&=(ab+1)(ab+1+a+b)+ab\\
&=(ab+1)^2+(a+b)(ab+1)+ab\\
&=\{(ab+1)+a\}\{(ab+1)+b\}\\
&=\boldsymbol{(ab+a+1)(ab+b+1)}
\end{aligned}$$

(2) $4\sin^2 x \geqq 3$ より　$(2\sin x+\sqrt{3})(2\sin x-\sqrt{3}) \geqq 0$

したがって　　$\sin x \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\quad \dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \sin x$

$0^\circ \leqq x \leqq 360^\circ$ であるから　$\boldsymbol{60^\circ \leqq x \leqq 120^\circ,\ 240^\circ \leqq x \leqq 300^\circ}$

(3) 円 $x^2+y^2+2x+6y-6=0$ の中心 $(-1,-3)$ から直線 $y=-\dfrac{1}{2}x+1$,
すなわち $x+2y-2=0$ までの距離 d は

$$d=\frac{|-1+2\cdot(-3)-2}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{9}{\sqrt{5}}$$

よって，求める円は，中心 $(-1,-3)$，半径 d であるから

$$\boldsymbol{(x+1)^2+(y+3)^2=\frac{81}{5}}$$

$\boxed{6}$ (1) $a_1=S_1=1^2-25\cdot 1=\boldsymbol{-24}$

(2) $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n&=S_n-S_{n-1}=n^2-25n-\{(n-1)^2-25(n-1)\}\\
&=2n-26=-24+(n-1)\cdot 2
\end{aligned}$$

上式は，(1) の結果から，$n=1$ のときも成り立つ．
よって，$\{a_n\}$ は初項 -24，公差 2 の等差数列である．

(3) (1) より，$a_n=2(n-13)$ であるから，$n \geqq 13$ のとき，S_n は単調増加
$S_n=n(n-25)$ であるから　$S_{36}=36(36-25)=396$
よって，$S_n>396$ となる最小の n は　　$\boldsymbol{n=37}$

$\boxed{\mathbf{7}}$ (1)

$$S(t) = \int_0^1 x|\,x - t\,|\,dx$$

(i) $t < 0$ のとき

$$S(t) = \int_0^1 x(x-t)\,dt = \left[\,\frac{1}{3}x^3 - \frac{t}{2}x^2\,\right]_0^1 = \boldsymbol{-\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}}$$

(ii) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^t x(-x+t)\,dx + \int_t^1 x(x-t)\,dx \\ &= \left[\,-\frac{1}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2\,\right]_0^t + \left[\,\frac{1}{3}x^3 - \frac{t}{2}x^2\,\right]_t^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}} \end{aligned}$$

(iii) $1 < t$ のとき

$$S(t) = \int_0^1 x(-x+t)\,dt = \left[\,-\frac{1}{3}x^3 + \frac{t}{2}x^2\,\right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{2}t - \frac{1}{3}}$$

(2) (1) の (i)，(iii) の開区間における $S(t)$ は，それぞれ単調減少，単調増加であるから最小値をもたない．したがって，(ii) についてその最小値を求めればよい．

$$S'(t) = t^2 - \frac{1}{2} = \left(t + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の増減表は，次のようになる．

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，最小値は $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boldsymbol{\dfrac{1}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{6}}$