平成16年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　平成16年2月25日

- 中等教育数学，理科専攻，環境情報教育情報教育コースは，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数II・III・A・B・C (120分)
- 初等教育人文・社会，自然，実技，教育・心理・幼児教育コースは，$\boxed{2}$，$\boxed{5}$ 〜 $\boxed{7}$ 数II・A・B (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $\log_a(x+6)+\log_a(x-1)>\log_a(9x-7)$ を解け．ただし，$a>0$，$a\neq 1$ とする．

(2) A，B を2次正方行列とする．命題「$AB=O$ ならば $A=O$ または $B=O$」は偽である．この命題の反例を1つあげよ．ただし O は零行列である．

(3) 媒介変数表示された曲線

$$x=\log_e(t+\sqrt{t^2+1}),\quad y=\sqrt{t^2+1}$$

の $t=0$ から $t=t_0$ に対応する部分の長さを t_0 で表せ．ただし $t_0>0$ とする．また e は自然対数の底である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $a_1=\dfrac{1}{15}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+4(2n+3)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ．また，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の第1項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 0でない複素数 z_1，z_2 の絶対値を r_1，r_2 とし，z_1，z_2 の偏角をそれぞれ θ_1，θ_2 とする．ただし，$\theta_2>\theta_1$ とする．次の問いに答えよ．

(1) 複素数平面上に0，z_1，z_2，z_1+z_2 を頂点とする平行四辺形がある．この平行四辺形の面積 S を r_1，r_2，θ_1，θ_2 で表せ．

(2) 等式

$$S^2=|z_1|^2|z_2|^2-\frac{(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)^2}{4}$$

が成り立つことを示せ．ただし，複素数 z に対して $\overline{z}$ は z の共役複素数を表す．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 曲線 $y=\sqrt{x}$ について，次の問いに答えよ．

(1) この曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a})$ $(a>0)$ における接線と x 軸およびこの曲線で囲まれた図形の面積 $S_1(a)$ を求めよ．

(2) この曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a})$ $(a>0)$ における法線と x 軸およびこの曲線で囲まれた図形の面積 $S_2(a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\frac{S_1(a)}{S_2(a)}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $a^2(y-b)-(a+b)xy+ab(x+y)+b^2(x-a)$ を因数分解せよ．

(2) $\dfrac{\sin 105^\circ+\cos 75^\circ}{\sin 15^\circ+\cos 15^\circ}$ の値を求めよ．

(3) 不等式 $\log_a(x+6)+\log_a(x-1)>\log_a(9x-7)$ を解け．ただし，$0<a<1$ とする．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{B}(2,-1,\ 4)$，P がある．原点を O とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(2) 線分 OA と線分 OB を 2 辺とする平行四辺形の面積 S を求めよ．

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ がそれぞれ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に垂直で，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=S$ のとき，P の座標を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 関数 $f(x)=-3x^2-\displaystyle\int_{-1}^{0}f(t)\,dt+\int_0^1 2xf(t)\,dt$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線のうち，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通る接線の方程式を求めよ．ただし，$a>-\dfrac{1}{2}$ とする．

(3) (2) で求めた接線と $y=f(x)$ とで囲まれた部分の面積を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $$\log_a(x+6)+\log_a(x-1)>\log_a(9x-7)$$

真数は正であるから

$$x+6>0,\quad x-1>0,\quad 9x-7>0 \quad \text{すなわち} \quad x>1 \quad \cdots ①$$

与えられ不等式から $\log_a(x+6)(x-1)>\log_a(9x-7) \quad \cdots (*)$

(i) $a>1$ のとき，$(*)$ から

$$(x+6)(x-1)>9x-7 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-4x+1>0$$

① に注意して，これを解くと $\boldsymbol{x>2+\sqrt{3}}$

(ii) $0<a<1$ のとき，$(*)$ から

$$(x+6)(x-1)<9x-7 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-4x+1<0$$

① に注意して，これを解くと $\boldsymbol{1<x<2+\sqrt{3}}$

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

(3) $x=\log_e(t+\sqrt{t^2+1})$，$y=\sqrt{t^2+1}$ より

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1+\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}}{t+\sqrt{t^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}, \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}$$

ゆえに $$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\right)^2}=1$$

よって，求める弧長は

$$\int_0^{t_0}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{t_0}dt=\boldsymbol{t_0}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $b_1=15$，$b_{n+1}=b_n+4(2n+3)\quad(n \geqq 1)$ であるから

$n \geqq 2$ のとき $\quad b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}4(2k+3)$

$$=15+8\cdot\frac{1}{2}n(n-1)+12(n-1)$$

$$=4n^2+8n+3=(2n+1)(2n+3)$$

上式は，$n=1$ のときも成り立つので

$$\boldsymbol{b_n=(2n+1)(2n+3)},\ \boldsymbol{a_n=\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}}$$

(2) (1) の結果から

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\boldsymbol{\frac{n}{3(2n+3)}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\angle z_1 0 z_2=\theta_2-\theta_1$ であるから $\quad S=\boldsymbol{r_1r_2|\sin(\theta_2-\theta_1)|}$

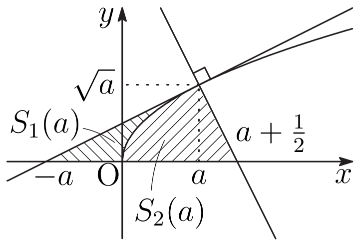
(2) $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ であるから

$$\begin{aligned}z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2&=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)\\&\qquad+r_1(\cos\theta_1-i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\&=r_1r_2\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}\\&\qquad+r_1r_2\{\cos(\theta_2-\theta_1)+i\sin(\theta_2-\theta_1)\}\\&=2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)\end{aligned}$$

したがって，上式および (1) の結果から

$$\begin{aligned}|z_1|^2|z_2|^2-\frac{(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)^2}{4}&={r_1}^2{r_2}^2-\frac{\{2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)\}^2}{4}\\&={r_1}^2{r_2}^2-{r_1}^2{r_2}^2\cos^2(\theta_2-\theta_1)\\&={r_1}^2{r_2}^2\sin^2(\theta_2-\theta_1)\\&=S^2\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $y=\sqrt{x}$ より　$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$



曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a})$ における接線の方程式は

$$y-\sqrt{a}=\frac{1}{2\sqrt{a}}(x-a)$$

すなわち　$y=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}x+\dfrac{\sqrt{a}}{2}$

この接線と x 軸との共有点の x 座標は

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}x+\frac{\sqrt{a}}{2}=0 \qquad \text{これを解いて} \qquad x=-a$$

よって　$S_1(a)=\dfrac{1}{2}\cdot 2a\cdot\sqrt{a}-\displaystyle\int_0^a \sqrt{x}\,dx$

$$=a\sqrt{a}-\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^a=\boldsymbol{\frac{1}{3}a\sqrt{a}}$$

(2) 曲線上の点 $(a,\ \sqrt{a})$ における法線の方程式は

$$y-\sqrt{a}=-2\sqrt{a}\,(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y=-2\sqrt{a}\left(x-a-\frac{1}{2}\right)$$

この法線と x 軸との共有点の x 座標は　$x=a+\dfrac{1}{2}$

よって　$S_2(a)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{a}+\displaystyle\int_0^a \sqrt{x}\,dx$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{a}+\left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_0^a=\boldsymbol{\frac{1}{4}\sqrt{a}+\frac{2}{3}a\sqrt{a}}$$

(3) (1)，(2) の結果から

$$\lim_{a\to+\infty}\frac{S_1(a)}{S_2(a)}=\lim_{a\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{3}a\sqrt{a}}{\dfrac{1}{4}\sqrt{a}+\dfrac{2}{3}a\sqrt{a}}=\lim_{a\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{3}{4a}+2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

$\boxed{5}$ (1) $\quad a^2(y-b)-(a+b)xy+ab(x+y)+b^2(x-a)$
$= a^2(y-b)-a(x-b)(y-b)-bx(y-b)$
$= (y-b)\{a^2+(b-x)a-bx\}$
$= \boldsymbol{(y-b)(a+b)(a-x)}$

(2) $\sin 105^\circ + \cos 75^\circ = \cos 15^\circ + \sin 15^\circ$

よって $\quad \dfrac{\sin 105^\circ + \cos 75^\circ}{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ} = \mathbf{1}$

(3) $\quad \log_a(x+6)+\log_a(x-1) > \log_a(9x-7)$

真数は正であるから

$$x+6>0,\quad x-1>0,\quad 9x-7>0 \quad \text{すなわち} \quad x>1 \quad \cdots ①$$

与えられ不等式から $\quad \log_a(x+6)(x-1) > \log_a(9x-7)$

$0<a<1$ より，上式から

$$(x+6)(x-1) < 9x-7 \quad \text{ゆえに} \quad x^2-4x+1<0$$

① に注意して，これを解くと $\quad \boldsymbol{1<x<2+\sqrt{3}}$

$\boxed{6}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 2,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2, -1,\ 4)$ であるから

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \frac{2-2+12}{\sqrt{14}\sqrt{21}} = \frac{12}{7\sqrt{6}} = \boldsymbol{\frac{2}{7}\sqrt{6}}$$

(2) (1) の結果から $\quad \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\dfrac{24}{49}} = \dfrac{5}{7}$

よって $\quad S = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\sin\theta = \sqrt{14}\sqrt{21}\times\dfrac{5}{7} = \boldsymbol{5\sqrt{6}}$

(3) $\vec{n}=(x,\ y,\ z)\neq\vec{0}$ が，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{n}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\vec{n}$ であるとき

$$x+2y+3z=0,\quad 2x-y+4z=0 \quad \text{ゆえに} \quad x=-\frac{11}{5}z,\quad y=-\frac{2}{5}z$$

したがって，$\vec{n}$ の 1 つを $\vec{n}=(11,\ 2, -5)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \pm|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm\frac{S}{|\vec{n}|}\vec{n} = \pm\frac{5\sqrt{6}}{\sqrt{11^2+2^2+(-5)^2}}(11,\ 2, -5)$$
$$= \boldsymbol{\pm(11,\ 2, -5)}$$

補足 外積 (ベクトル積) を用いると簡単に求めることができる[1]．外積は，高校数学の範囲外であるから，検算用に使用し，答案には書かないようにする．

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf の $\boxed{4}$ を参照

$\boxed{\textbf{7}}$ (1) $$f(x) = -3x^2 + 2x\int_0^1 f(t)\,dt - \int_{-1}^0 f(t)\,dt$$

$A = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$，$B = \displaystyle\int_{-1}^0 f(t)\,dt$ とおくと

$$f(x) = -3x^2 + 2Ax - B$$

ゆえに　$A = \displaystyle\int_0^1 (-3t^2 + 2At - B)\,dt = \Big[-t^3 + At^2 - Bt\Big]_0^1$

$= -1 + A - B$

$B = \displaystyle\int_{-1}^0 (-3t^2 + 2At - B)\,dt = \Big[-t^3 + At^2 - Bt\Big]_{-1}^0$

$= -1 - A - B$

上の 2 式から　$A = 1$，$B = -1$

よって　$\boldsymbol{f(x) = -3x^2 + 2x + 1}$

(2) (1) の結果から　$f'(x) = -6x + 2$

曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y - (-3a^2 + 2a + 1) = (-6a + 2)(x - a)$$

すなわち　$y = (-6a + 2)x + 3a^2 + 1$

これが，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ を通るから

$$0 = (-6a + 2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3a^2 + 1 \quad \text{ゆえに} \quad 3a(a + 1) = 0$$

$a > -\dfrac{1}{2}$ であるから　$a = 0$　よって　$\boldsymbol{y = 2x + 1}$

(3) 求める面積を S とすると

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 - \int_{-\frac{1}{3}}^0 (-3x^2 + 2x + 1)\,dx$$

$$= \frac{1}{4} - \Big[-x^3 + x^2 + x\Big]_{-\frac{1}{3}}^0 = \boldsymbol{\frac{7}{108}}$$