平成15年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　平成15年2月25日

- 中等教育数学，理科専攻，環境情報教育情報教育コースは，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数II・III・A・B・C (120分)
- 初等教育人文・社会，自然，実技，教育・心理・幼児教育コースは，$\boxed{5}$ 〜 $\boxed{8}$ 数II・A・B (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) a，b を正の整数とし，$f(x) = ax + b$ とする．$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ のうち，2つの値が3の倍数ならば a，b はともに3の倍数であることを示せ．

(2) a，b，c，d を正の整数とし，$f(x) = ax + b$，$g(x) = cx + d$ とする．$F(x) = f(x)g(x)$ の係数，定数項がすべて3の倍数ならば，a，b はともに3の倍数であるか，または c，d はともに3の倍数であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ に対して，$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22}$，$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 行列 A，B に対して $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$，$\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を示せ．

(2) 行列 A，B に対して，A が逆行列を持つとき，行列 X を $X = ABA^{-1}$ で定める．このとき，$\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(B)$，$\det(X) = \det(B)$ を示せ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\triangle\mathrm{OAB}$ について $\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{2}{3}\pi$ であり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = a$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = b$ とする．点Oから辺ABに垂線をおろし，辺ABとの交点をHとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$a$，$b$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 関数 $f_0(x)$，$f_1(x)$，$\cdots$ を

$$f_0(x) = \sin x, \quad f_n(x) = \sin x + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_{n-1}(x)\,dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とする．$g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x) \quad (n = 1, 2, 3 \cdots)$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) $g_1(x)$ を求めよ．

(2) $c = g_1(x)$ とおくとき，$g_n(x)$ を n と c を用いて表せ．

(3) $a_n = f_n(x) - \sin x$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $4\cos^3\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$ を満たす θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ を求めよ．

(2) 不等式 $3^{3x+3} - 7{\cdot}3^{2x+1} - 7{\cdot}3^x + 1 < 0$ を解け．

(3) 複素数 z_1，z_2 に対して $|z_1||z_2| \geqq \dfrac{\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}}{2}$ が成り立つことを示せ．ただし，複素数 z に対して $\overline{z}$ は z の共役複素数である．

$\boxed{\mathbf{6}}$ $a_n = \log_{10}\left(\dfrac{1}{2} + 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1}\right)$ について，次の問いに答えよ．

(1) a_n を求めよ．

(2) $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $\triangle\mathrm{OAB}$ は $\angle\mathrm{AOB} = 120^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 4$ である．点 O から辺 AB に垂線をおろし，辺 AB との交点を H とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

$\boxed{\mathbf{8}}$ 3 次関数 $f(x)$ は $x = -1$ と $x = 1$ で極値をとり，$f(1) = 0$ である．次の問いに答えよ．

(1) $f(-2)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分のうち，y 軸の左側にある部分の面積を S_1，y 軸の右側にある部分の面積を S_2 とする．このとき，$\dfrac{S_1}{S_2}$ を求めよ．ただし，$\displaystyle\int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ (C は積分定数) である．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $f(0)=b$，$f(1)=a+b$，$f(2)=2a+b$ より

$$f(1)-f(0)=a,\quad f(2)-f(1)=a,\quad f(2)-f(0)=2a$$

$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ のうち，2 つの値が 3 の倍数であるから，上の 3 つの値のうち少なくとも 1 つは 3 の倍数であるから，整数 a は 3 の倍数である．また

$$b=f(0),\quad b=f(1)-a,\quad b=f(2)-2a$$

であるから，b も 3 の倍数である．

(2) $F(x)=f(x)g(x)$ の係数，定数項がすべて 3 の倍数であるから

$$F(0)=f(0)g(0),\quad F(1)=f(1)g(1),\quad F(2)=f(2)g(2)$$

は，すべて 3 の倍数である．a，b，c，d が整数であるから，
$f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$g(0)$，$g(1)$，$g(2)$ は整数である．

(i) $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ のうち，2 つの値が 3 の倍数であるとき
(1) の結果から，a，b はともに 3 の倍数である．

(ii) $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$ のうち，2 つの値が 3 の倍数でないとき
$g(0)$，$g(1)$，$g(2)$ のうち，2 つ値が 3 の倍数であるから，
(i) と同様に，c，d はともに 3 の倍数である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ とすると

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

したがって　$\mathrm{tr}(AB) = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}) + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})$

同様にして　$\mathrm{tr}(BA) = (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21}) + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22})$

上の 2 式から　$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

また

$$
\begin{aligned}
\det(AB) &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} b_{11}b_{12} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} b_{11}b_{22} \\
&\quad + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} b_{21}b_{12} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} b_{21}b_{22} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} b_{11}b_{22} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} b_{21}b_{12} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)
\end{aligned}
$$

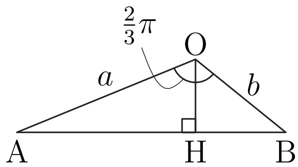
同様にして　$\det(BA) = \det(B)\det(A)$

よって　$\det(AB) = \det(BA)$

(2) (1) の結果を利用して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}(X) &= \mathrm{tr}((AB)A^{-1}) = \mathrm{tr}(A^{-1}(AB)) = \mathrm{tr}(B), \\
\det(X) &= \det((AB)A^{-1}) = \det(A^{-1}(AB)) = \det(B)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 条件により



$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}ab$$

H は辺 AB 上の点であるから，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$,
$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-t)\vec{a} + t\vec{b} \quad (t\text{ は実数})$$

このとき

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (\vec{b}-\vec{a})\cdot\{(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\}\\ &= (t-1)|\vec{a}|^2 + (1-2t)\vec{a}\cdot\vec{b} + t|\vec{b}|^2\\ &= a^2(t-1) - \frac{1}{2}ab(1-2t) + b^2t\\ &= (a^2+ab+b^2)t - a^2 - \frac{1}{2}ab\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$ であるから

$$t = \frac{a^2+\frac{1}{2}ab}{a^2+ab+b^2}, \quad 1-t = \frac{\frac{1}{2}ab+b^2}{a^2+ab+b^2}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \frac{\frac{1}{2}ab+b^2}{a^2+ab+b^2}\vec{a} + \frac{a^2+\frac{1}{2}ab}{a^2+ab+b^2}\vec{b}\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{a^2+ab+b^2}\left\{\left(\frac{1}{2}ab+b^2\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(a^2+\frac{1}{2}ab\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $f_1(x) = \sin x + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_0(x)\,dx$，$f_0(x) = \sin x$ より

$$\begin{aligned} g_1(x) = f_1(x) - f_0(x) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_0(x)\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin x\,dx \\ &= 2\Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boldsymbol{\sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

(2)
$$f_{n+1}(x) = \sin x + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_n(x)\,dx$$
$$f_n(x) = \sin x + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x f_{n-1}(x)\,dx$$

上の 2 式の辺々を引くと

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\{f_n(x) - f_{n-1}(x)\}\,dx$$

したがって $\quad g_{n+1}(x) = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} x g_n(x)\,dx$

上式および (1) の結果から，$g_n(x)$ は定数関数であるから

$$g_{n+1}(x) = g_n(x)\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2x\,dx = g_n(x)\Big[\,x^2\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16}g_n(x)$$

よって $\quad g_n(x) = g_1(x)\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{n-1} = \boldsymbol{c\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{n-1}}$

(3)
$$\begin{aligned} a_n &= f_n(x) - \sin x = f_n(x) - f_0(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\{f_k(x) - f_{k-1}(x)\} = \sum_{k=1}^{n} g_k(x) = c\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi^2}{16}\right)^{k-1} \\ &= \frac{c}{1 - \frac{\pi^2}{16}}\left\{1 - \left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n\right\} = \frac{\sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \frac{\pi^2}{16}}\left\{1 - \left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{\pi}{4}}\left\{1 - \left(\frac{\pi^2}{16}\right)^n\right\} \end{aligned}$$

このとき，$0 < \frac{\pi^2}{16} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 < 1$ であるから $\quad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4\sqrt{2}}{\pi + 4}}$

$\boxed{5}$ (1) $4\cos^3\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$ より

$$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 3) = 0$$

$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ であるから　　$\cos\theta = 1,\ \dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より　　$\boldsymbol{\theta = 0^\circ,\ 60^\circ}$

(2) $3^{3x+3} - 7\cdot3^{2x+1} - 7\cdot3^x + 1 < 0$ より

$$27(3^x)^3 - 21(3^x)^2 - 7\cdot3^x + 1 < 0$$
$$(3^x - 1)(9\cdot3^x - 1)(3\cdot3^x + 1) < 0$$

$3^x > 0$ であるから　$\dfrac{1}{9} < 3^x < 1$　　よって　$\boldsymbol{-2 < x < 0}$

(3) $\overline{z_1}z_2 = x + yi$ とおくと

$$\begin{aligned}|z_1||z_2| &= |z_1||\overline{z_2}| = |z_1\overline{z_2}| = \sqrt{x^2+y^2}\\ &\geqq \sqrt{x^2}\\ &\geqq x = \frac{(x+yi)+(x-yi)}{2} = \frac{\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}}{2}\end{aligned}$$

よって　　$|z_1||z_2| \geqq \dfrac{\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2}}{2}$

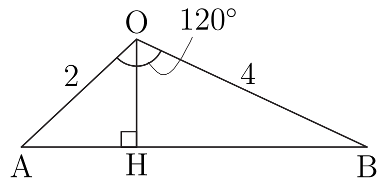
$\boxed{6}$ (1) $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{n-1} = \dfrac{3^n - 1}{3 - 1} = \dfrac{3^n - 1}{2}$ より

$$a_n = \log_{10}\left(\frac{1}{2} + \frac{3^n - 1}{2}\right) = \log_{10}\frac{3^n}{2} = \boldsymbol{n\log_{10}3 - \log_{10}2}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned}a_1 + a_2 + \cdots + a_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k\log_{10}3 - \log_{10}2)\\ &= \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}\log_{10}3 - n\log_{10}2}\end{aligned}$$

$\boxed{7}$ $\triangle$OAB に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{AB}^2 = 2^2 + 4^2 - 2\cdot 2\cdot 4\cos 120^\circ = 28$$

$\mathrm{AB} > 0$ より　$\mathrm{AB} = 2\sqrt{7}$

また　$\cos A = \dfrac{2^2 + (2\sqrt{7})^2 - 4^2}{2\cdot 2\cdot 2\sqrt{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$

ゆえに　$\mathrm{AH} = \mathrm{OA}\cos A = 2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{7}} = \dfrac{4}{\sqrt{7}}$　したがって　$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{4}{\sqrt{7}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{7}} = \dfrac{2}{7}$

よって，H は線分 AB を $2:5$ に内分する点であるから

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \frac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

$\boxed{8}$ (1) $f'(x)$ は 2 次式で，$f'(-1) = f'(1) = 0$ であるから

$$f'(x) = 3a(x+1)(x-1) = 3ax^2 - 3a$$

とおくと (a は定数)

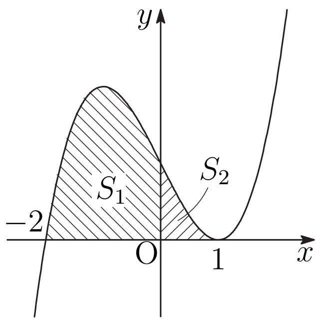
$$f(x) = ax^3 - 3ax + b \quad (b\text{ は定数})$$

また，$f(1) = 0$ であるから　$-2a + b = 0$

したがって　$f(x) = a(x^3 - 3x + 2) = a(x-1)^2(x+2)$

よって　$\boldsymbol{f(-2) = 0}$

(2) (1) の結果から



$$S_1 : S_2 = \int_{-2}^{0}(x^3-3x+2)\,dx : \int_{0}^{2}(x^3-3x+2)\,dx$$

したがって

$$\int_{-2}^{0}(x^3 - 3x + 2)\,dx = \left[\ \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\ \right]_{-2}^{0} = 6$$

$$\int_{0}^{1}(x^3 - 3x + 2)\,dx = \left[\ \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x\ \right]_{0}^{1} = \frac{3}{4}$$

ゆえに　$S_1 : S_2 = 6 : \dfrac{3}{4} = 8 : 1$　よって　$\boldsymbol{\dfrac{S_1}{S_2} = 8}$