平成14年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　平成14年2月25日

- 中等教育数学，理科専攻，環境情報教育情報教育コースは，$\boxed{1}$ ～ $\boxed{4}$ 数II・III・A・B・C (120分)
- 初等教育人文・社会，自然，実技，教育・心理・幼児教育コースは，$\boxed{5}$ ～ $\boxed{8}$ 数II・A・B (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 点 $(r,\ 0)$ を中心とする半径 r の円と $y=\dfrac{1}{2}x$ との交点のうち原点でないほうを P_0 とする．原点Oと点 P_0 の中点を P_1 とし，原点Oと点 P_1 を通り y 軸に接する円の面積を S_1 とする．さらに2以上の自然数 n について，原点Oと点 P_{n-1} の中点を P_n とし，原点Oと点 P_n を通り y 軸に接する円の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ．

(2) $\log x$ の定積分を用いて，次の極限値を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 複素数 $z=x+yi$，$w=u+vi$ について，次の問いに答えよ．ただし，x，y，u，v は実数とする．

(1) $z\cdot w=a+bi$ であるとき，$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ を a，b を用いて表せ．ただし，a，b は実数とする．

(2) $z\neq 0$，$z^{-1}=c+di$ であるとき，$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1}$ を c，d を用いて表せ．ただし，c，d は実数とする．

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^7\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^7$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 楕円 $\left(\dfrac{x}{3}\right)^2+\left(\dfrac{y}{5}\right)^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線と x 軸，y 軸が作る三角形の面積 S とする．ただし，$a>0$，$b>0$ とする．

(1) S を a，b を用いて表せ．

(2) 点Pが $a>0$，$b>0$ の範囲で動くとき，S の最小値とそのときの a，b の値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n が 0 以上の整数のとき，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx$ について，次の問いに答えよ．

(1) I_0 と I_1 を求めよ．

(2) n が 1 以上のとき，I_n を I_{n-1} を用いて表せ．

(3) I_n を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ．

(1) $0 < a < b < 1$ のとき，$\log_a b$ と $\log_b a$ の大小を比べよ．

(2) $\vec{a} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$，$\vec{b} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ．

(3) $|z+i| + |z-i| = \sqrt{6}$ を満たし，偏角が 45° である複素数 z を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 3 の倍数を順に以下のように群に区切り，第 n 群には 2^{n-1} 個の項がある．ただし，n は自然数とする．

$$3 \mid 6\ 9 \mid 12\ 15\ 18\ 21 \mid 24\ 27\ 30\ 33\ 36\ 39\ 42\ 45 \mid 48\ \cdots$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 第 5 群の最後の項を求めよ．

(2) 第 n 群の最初の項を n を用いて表せ．

(3) 第 n 群の項の総和を求めよ．

$\boxed{\mathbf{7}}$ $y = \cos 3\theta - 3\cos\theta + 1$ について，次の問いに答えよ．

(1) $30^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ のとき，$\cos\theta$ の値の範囲を求めよ．

(2) y を $\cos\theta$ を用いて表せ．

(3) $30^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ のとき，y の最大値と最小値を求めよ．また，そのときの θ の値を求めよ．

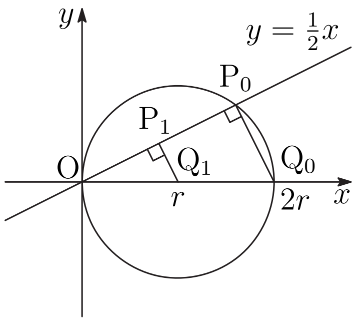
$\boxed{\mathbf{8}}$ 直線 $l : ax + y - 2 = 0\ (a \geqq 0)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 直線 l と接し，原点を中心とする円の方程式を求めよ．

(2) 上の (1) で求めた円と直線 l の接点を P とする．a が $0 \leqq a$ の範囲で動くとき，P の x 座標の範囲を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\mathrm{Q}_0(2r,\ 0)$，$\mathrm{Q}_1(r,\ 0)$ とし，2 以上の自然数 n の自然数 n に対して，原点 O と点 Q_{n-1} の中点を Q_n とする．このとき，原点 O と点 P_n を通り，y 軸に接する円を C_n とすると，C_n は OQ_n を直径とする円であるから，その面積 S_n は



$$S_n = \pi\left(\frac{1}{2}\mathrm{OQ}_n\right)^2 = \pi\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{r}{2^{n-1}}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{4^n}$$

$\{S_n\}$ は初項が $S_1 = \dfrac{\pi r^2}{4}$，公比が $\dfrac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi r^2}{4} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \boldsymbol{\frac{\pi r^2}{3}}$$

(2)
$$\log\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!} = \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

したがって
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\frac{(2n)!}{n^n\cdot n!} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\\ &= \int_0^1 \log(1+x)\,dx\\ &= \Big[\ (1+x)\log(1+x)-x\ \Big]_0^1\\ &= \mathbf{2\log 2 - 1}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $z=x+yi$，$w=u+vi$ より

$$zw=(x+yi)(u+vi)=(xu-yv)+(xv+yu)i$$

$zw=a+bi$ であるから　　$a=xu-yv$，$b=xv+yu$

したがって　$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xu-yv & -(xv+yu) \\ xv+yu & xu-yv \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-b} \\ \boldsymbol{b} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

(2) $z=x+yi$ $(z\neq 0)$ より

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{\overline{z}}{|z|^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{y}{x^2+y^2}i$$

$z^{-1}=c+di$ であるから　　$c=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$d=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$

したがって　$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{c} & \boldsymbol{-d} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

(3) 一般に2つの複素数 $z=x+yi$，$w=u+vi$ に対して

$$M(z)=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix},\quad M(w)=\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

とおくと，(1) の結果から　　$M(z)M(w)=M(zw)$
よって，n を自然数とすると　　$M(z)^n=M(z^n)$
ゆえに　　$M(z)^nM(w)^n=M(z^n)M(w^n)=M(z^nw^n)=M((zw)^n)$
$z=1+i$，$w=1-i$，$n=7$ とすると，上式から

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^7\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^7=\begin{pmatrix} 2^7 & 0 \\ 0 & 2^7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{128} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{128} \end{pmatrix}$$

別解 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^7 = (\sqrt{2}\,)^7\begin{pmatrix} \cos\frac{7}{4}\pi & -\sin\frac{7}{4}\pi \\ \sin\frac{7}{4}\pi & \cos\frac{7}{4}\pi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^7 = (\sqrt{2}\,)^7\begin{pmatrix} \cos\frac{7}{4}\pi & \sin\frac{7}{4}\pi \\ -\sin\frac{7}{4}\pi & \cos\frac{7}{4}\pi \end{pmatrix}$$

よって $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^7 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} \mathbf{128} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{128} \end{pmatrix}$

別解 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと，$AB = 2E$ (E は単位行列)

であるから

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^7 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^7 &= A^7B^7 \\
&= A^6(AB)B^6 = 2A^6B^6 \\
&= 2A^5(AB)B^5 = 2^2A^5B^5 \\
&\quad \cdots \\
&= 2^7E = \begin{pmatrix} \mathbf{128} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{128} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 楕円 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ $(a > 0,\ b > 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線の方程式は

$$\frac{ax}{9} + \frac{by}{25} = 1$$

この接線の x 切片および y 切片は，それぞれ $\dfrac{9}{a}$, $\dfrac{25}{b}$

よって $S = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{a}\cdot\dfrac{25}{b} = \boldsymbol{\dfrac{225}{2ab}}$

(2) P$(a,\ b)$ は楕円 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$ 上の点であるから　$\dfrac{a^2}{9}+\dfrac{b^2}{25}=1$　$\cdots$①

したがって　$\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{5}\right)^2=1-\dfrac{2ab}{15}$　ゆえに　$2ab=15-15\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{5}\right)^2$

これを (1) の結果に代入すると

$$S=\frac{225}{15-15\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{5}\right)^2}=\frac{15}{1-\left(\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{5}\right)^2}$$

① より，$\dfrac{a}{3}=\dfrac{b}{5}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，すなわち，$\boldsymbol{a=\dfrac{3}{\sqrt{2}}}$**,** $\boldsymbol{b=\dfrac{5}{\sqrt{2}}}$ のとき，

S は最小値 **15** をとる**.**

$\boxed{\textbf{4}}$ (1) $I_0=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$

(2) n が 1 以上の整数のとき

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}x(\cos x)'\\&=-\Big[\sin^{2n-1}x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}x\cos^2 x\,dx\\&=(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx\\&=(2n-1)I_{n-1}-(2n-1)I_n\end{aligned}$$

したがって　$2nI_n=(2n-1)I_{n-1}$　よって　$\boldsymbol{I_n=\dfrac{2n-1}{2n}I_{n-1}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0\\&=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdots3\cdot2\cdot1}{(2n)^2(2n-2)^2\cdots4^2\cdot2^2}I_0\\&=\boldsymbol{\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $0 < a < b < 1$ より　$\log_a a > \log_a b$,　$\log_b a > \log_b b$

$\log_a a = \log_b b = 1$ であるから　$\log_a b < 1 < \log_b a$

よって　$\boldsymbol{\log_a b < \log_b a}$

(2) $\vec{a} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$，$\vec{b} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ に垂直なベクトルを

$\vec{n} = (x,\ y,\ z)$ とすると，$\vec{a}\perp\vec{n}$，$\vec{b}\perp\vec{n}$ より，$\vec{a}\cdot\vec{n} = 0$，$\vec{b}\cdot\vec{n} = 0$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0 \qquad \text{ゆえに}\quad x - y = 0$$
$$\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \qquad \text{ゆえに}\quad \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2\sqrt{3}z = 0$$

上の 2 式から　$x : y : z = \sqrt{3} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$

$\vec{n}$ は，実数 t を用いて　$\vec{n} = t(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{2})$

$|\vec{n}| = 1$ であるから　$|\,t\,|\sqrt{3+3+2} = 1$　ゆえに　$t = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

よって　$\vec{n} = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ \sqrt{2}) = \pm\left(\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{6}}{4},\ \dfrac{\sqrt{6}}{4},\ \dfrac{1}{2}}\right)$

解説 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$，$\vec{a}\perp\vec{b}$ より，$\vec{a}$，$\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積が 1 であるから，求めるベクトル $\vec{n}$ は，ベクトル積 (外積)[1]を用いて求めることもできる (高校数学の範囲外).

$$\vec{n} = \pm\vec{a}\times\vec{b}$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

(3) z の偏角が 45° であるから，$z=x+xi$ とおくと $(x>0)$

$$|z+i|=|x+(x+1)i|=\sqrt{2x^2+2x+1}$$
$$|z-i|=|x+(x-1)i|=\sqrt{2x^2-2x+1}$$

これらを $|z+i|+|z-i|=\sqrt{6}$ に代入すると

$$\sqrt{2x^2+2x+1}+\sqrt{2x^2-2x+1}=\sqrt{6}$$
$$\sqrt{2x^2+2x+1}=\sqrt{6}-\sqrt{2x^2-2x+1}$$

両辺を 2 乗して整理すると　$\sqrt{6(2x^2-2x+1)}=2x-3$

再び両辺を 2 乗して整理すると　$8x^2=3$

$x>0$ により　$x=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$　よって　$\boldsymbol{z=\dfrac{\sqrt{6}}{4}(1+i)}$

解説 $|z+i|+|z-i|=\sqrt{6}$ の表す図形は，焦点が $-i$，i で，長軸が $\sqrt{6}$ の楕円を表し，短軸上の頂点は実軸上にあり，その座標を a とすると (a は実数)

$$|a+i|+|a-i|=\sqrt{6}\quad ゆえに\quad 2\sqrt{a^2+1}=\sqrt{6}$$

これを解いて　$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　また，長軸上の頂点は　$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$

$z=x+yi$ とおくと，楕円の方程式は　$2x^2+\dfrac{2}{3}y^2=1$

これと $y=x$ $(x>0)$ により　$x=y=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$\boxed{\textbf{6}}$ (1) 第 5 群の最後の項は

$$\sum_{k=1}^{5}2^{k-1}=\frac{2^5-1}{2-1}=31\ (番目)\quad よって\quad 3\cdot 31=\mathbf{93}$$

(2) 第 n 群の最初の項は

$$\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}+1=\frac{2^{n-1}-1}{2-1}+1=2^{n-1}\ (番目)\quad よって\quad \boldsymbol{3\cdot 2^{n-1}}$$

(3) 第 n 群の項の総和は，初項 $3\cdot 2^{n-1}$，公差 3，項数 2^{n-1} の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2}\cdot 2^{n-1}\{2\cdot 3\cdot 2^{n-1}+(2^{n-1}-1)\cdot 3\}=\boldsymbol{9\cdot 2^{2n-3}-3\cdot 2^{n-2}}$$

$\boxed{7}$ (1) $30^\circ \leqq \theta \leqq 120^\circ$ のとき　$\boldsymbol{-\frac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}}$

(2) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ であるから

$$\begin{aligned} y &= \cos 3\theta - 3\cos\theta + 1 = (4\cos^3\theta - 3\cos\theta) - 3\cos\theta + 1 \\ &= \boldsymbol{4\cos^3\theta - 6\cos\theta + 1} \end{aligned}$$

(3) $x = \cos\theta$ とおくと，(1)，(2) より　$y = 4x^3 - 6x + 1$　$\left(-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

微分すると　$y' = 12x^2 - 6 = 12\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

したがって，y の増減表は

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{7}{2}$	$\searrow$	$1-2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$1-\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 120^\circ}$**のとき　最大値**$\boldsymbol{\frac{7}{2}}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$　すなわち　$\boldsymbol{\theta = 45^\circ}$**のとき　最小値**$\boldsymbol{1 - 2\sqrt{2}}$

$\boxed{8}$ (1) 原点から直線 $l : ax + y - 2 = 0$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|-2|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{a^2+1}}$$

よって，求める円の方程式は　$\boldsymbol{x^2 + y^2 = \frac{4}{a^2+1}}$

(2) 原点を通り，l に垂直な直線の方程式は　$x - ay = 0$

これと l の方程式から y を消去すると

$$x - a(-ax + 2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{2a}{a^2+1}$$

$0 \leqq a$ より，$a = \tan\theta$ $\left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x = \frac{2\tan\theta}{\tan^2\theta + 1} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

このとき，$0 \leqq 2\theta < \pi$ であるから　$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 1}$