

平成14年度 福岡教育大学2次試験前期日程(数学問題)

教育学部 平成14年2月25日

- 中等教育数学, 理科専攻, 環境情報教育情報教育コース
 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$ 数I・II・III・A・B・C (120分)
- 初等教育人文・社会, 自然, 実技, 教育・心理・幼児教育コース, 中等教育技術専攻 $\boxed{5}$ $\boxed{6}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$ 数I・II・A・B (100分)

$\boxed{1}$ 次の問いに答えよ.

(1) 点 $(r, 0)$ を中心とする半径 r の円と $y = \frac{1}{2}x$ との交点のうち原点でないほうを P_0 とする. 原点 O と点 P_0 の中点を P_1 とし, 原点 O と点 P_1 を通り y 軸に接する円の面積を S_1 とする. さらに2以上の自然数 n について, 原点 O と点 P_{n-1} の中点を P_n とし, 原点 O と点 P_n を通り y 軸に接する円の面積を S_n とするとき, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めよ.

(2) $\log x$ の定積分を用いて, 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{(2n)!}{n^n \cdot n!}$$

$\boxed{2}$ 複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ について, 次の問いに答えよ. ただし, x, y, u, v は実数とする.

(1) $z \cdot w = a + bi$ であるとき, $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$ を a, b を用いて表せ. ただし, a, b は実数とする.

(2) $z \neq 0$, $z^{-1} = c + di$ であるとき, $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1}$ を c, d を用いて表せ. ただし, c, d は実数とする.

(3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^7 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^7$ を求めよ.

$\boxed{3}$ 楕円 $\left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$ 上の点 $P(a, b)$ における接線と x 軸, y 軸が作る三角形の面積 S とする. ただし, $a > 0, b > 0$ とする.

(1) S を a, b を用いて表せ.

(2) 点 P が $a > 0, b > 0$ の範囲で動くとき, S の最小値とそのときの a, b の値を求めよ.

4 n が 0 以上の整数のとき, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x dx$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) I_0 と I_1 を求めよ.
- (2) n が 1 以上のとき, I_n を I_{n-1} を用いて表せ.
- (3) I_n を求めよ.

5 次の問いに答えよ.

- (1) $0 < a < b < 1$ のとき, $\log_a b$ と $\log_b a$ の大小を比べよ.
- (2) $\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$, $\vec{b} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ.
- (3) $|z + i| + |z - i| = \sqrt{6}$ を満たし, 偏角が 45° である複素数 z を求めよ.

6 3 の倍数を順に以下のように群に区切り, 第 n 群には 2^{n-1} 個の項がある. ただし, n は自然数とする.

$$3 \mid 6 \ 9 \mid 12 \ 15 \ 18 \ 21 \mid 24 \ 27 \ 30 \ 33 \ 36 \ 39 \ 42 \ 45 \mid 48 \ \cdots$$

このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 第 5 群の最後の項を求めよ.
- (2) 第 n 群の最初の項を n を用いて表せ.
- (3) 第 n 群の項の総和を求めよ.

7 $y = \cos 3\theta - 3 \cos \theta + 1$ について, 次の問いに答えよ.

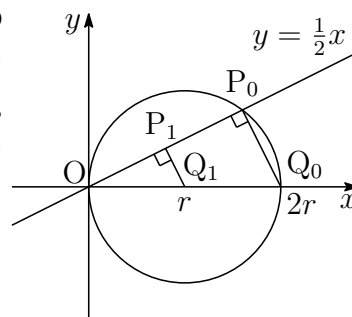
- (1) $30^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ のとき, $\cos \theta$ の値の範囲を求めよ.
- (2) y を $\cos \theta$ を用いて表せ.
- (3) $30^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ のとき, y の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの θ の値を求めよ.

8 直線 $l: ax + y - 2 = 0$ ($a \geq 0$) について, 次の問いに答えよ.

- (1) 直線 l と接し, 原点を中心とする円の方程式を求めよ.
- (2) 上の (1) で求めた円と直線 l の接点を P とする. a が $0 \leq a$ の範囲で動くとき, P の x 座標の範囲を求めよ.

解答例

- 1 (1) $Q_0(2r, 0)$, $Q_1(r, 0)$ とし, 2以上の自然数 n の自然数 n に対して, 原点 O と点 Q_{n-1} の中点を Q_n とする. このとき, 原点 O と点 P_n を通り, y 軸に接する円を C_n とすると, C_n は OQ_n を直径とする円であるから, その面積 S_n は



$$S_n = \pi \left(\frac{1}{2} OQ_n \right)^2 = \pi \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{2^{n-1}} \right)^2 = \frac{\pi r^2}{4^n}$$

$\{S_n\}$ は初項が $S_1 = \frac{\pi r^2}{4}$, 公比が $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi r^2}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\pi r^2}{3}$$

$$(2) \quad \log \frac{(2n)!}{n^n \cdot n!} = \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \frac{(2n)!}{n^n \cdot n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\ &= \int_0^1 \log(1+x) dx \\ &= \left[(1+x) \log(1+x) - x \right]_0^1 \\ &= 2 \log 2 - 1 \end{aligned}$$



2 (1) $z = x + yi$, $w = u + vi$ より

$$zw = (x + yi)(u + vi) = (xu - yv) + (xv + yu)i$$

$$zw = a + bi \text{ であるから } \quad a = xu - yv, \quad b = xv + yu$$

$$\begin{aligned} \text{したがって} \quad \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} xu - yv & -(xv + yu) \\ xv + yu & xu - yv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{a} & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} & \mathbf{a} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) $z = x + yi$ ($z \neq 0$) より

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}i$$

$$z^{-1} = c + di \text{ であるから } \quad c = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad d = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{したがって} \quad \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} & -\mathbf{d} \\ \mathbf{d} & \mathbf{c} \end{pmatrix}$$

(3) 一般に2つの複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ に対して

$$M(z) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad M(w) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$$

とおくと, (1)の結果から $M(z)M(w) = M(zw)$

よって, n を自然数とすると $M(z)^n = M(z^n)$

ゆえに $M(z)^n M(w)^n = M(z^n) M(w^n) = M(z^n w^n) = M((zw)^n)$

$z = 1 + i$, $w = 1 - i$, $n = 7$ とすると, 上式から

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^7 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 2^7 & 0 \\ 0 & 2^7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{128} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{128} \end{pmatrix}$$

別解 1
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^7 = (\sqrt{2})^7 \begin{pmatrix} \cos \frac{7}{4}\pi & -\sin \frac{7}{4}\pi \\ \sin \frac{7}{4}\pi & \cos \frac{7}{4}\pi \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^7 = (\sqrt{2})^7 \begin{pmatrix} \cos \frac{7}{4}\pi & \sin \frac{7}{4}\pi \\ -\sin \frac{7}{4}\pi & \cos \frac{7}{4}\pi \end{pmatrix}$$

よって
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^7 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 128 & 0 \\ 0 & 128 \end{pmatrix}$$

別解 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とおくと, $AB = 2E$ (E は単位行列) であるから

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^7 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^7 &= A^7 B^7 \\ &= A^6 (AB) B^6 = 2A^6 B^6 \\ &= 2A^5 (AB) B^5 = 2^2 A^5 B^5 \\ &\quad \dots \\ &= 2^7 E = \begin{pmatrix} 128 & 0 \\ 0 & 128 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3 (1) 楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) 上の点 $P(a, b)$ における接線の方程式は

$$\frac{ax}{9} + \frac{by}{25} = 1$$

この接線の x 切片および y 切片は, それぞれ $\frac{9}{a}$, $\frac{25}{b}$

よって
$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{a} \cdot \frac{25}{b} = \frac{225}{2ab}$$

(2) $P(a, b)$ は楕円 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 上の点であるから $\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{25} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$

$$\text{したがって} \quad \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{5}\right)^2 = 1 - \frac{2ab}{15} \quad \text{ゆえに} \quad 2ab = 15 - 15\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{5}\right)^2$$

これを (1) の結果に代入すると

$$S = \frac{225}{15 - 15\left(\frac{a}{3} - \frac{b}{5}\right)^2} = \frac{15}{1 - \left(\frac{a}{3} - \frac{b}{5}\right)^2}$$

$\textcircled{1}$ より, $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, すなわち, $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{3}}{\sqrt{2}}$, $\mathbf{b} = \frac{\mathbf{5}}{\sqrt{2}}$ のとき,

S は最小値 $\mathbf{15}$ をとる. ■

4 (1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

(2) n が 1 以上の整数のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \, dx = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x (\cos x)' \\ &= - \left[\sin^{2n-1} x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= (2n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n \end{aligned}$$

したがって $2nI_n = (2n-1)I_{n-1}$ よって $\mathbf{I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}}$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} I_0 \\ &= \frac{2n(2n-1)(2n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(2n)^2 (2n-2)^2 \cdots 4^2 \cdot 2^2} I_0 \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
■

5 (1) $0 < a < b < 1$ より $\log_a a > \log_a b$, $\log_b a > \log_b b$

$$\log_a a = \log_b b = 1 \text{ であるから } \log_a b < 1 < \log_b a$$

$$\text{よって } \log_a b < \log_b a$$

(2) $\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$, $\vec{b} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ に垂直なベクトルを

$$\vec{n} = (x, y, z) \text{ とすると, } \vec{a} \perp \vec{n}, \vec{b} \perp \vec{n} \text{ より, } \vec{a} \cdot \vec{n} = 0, \vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \text{ であるから}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}y = 0 \quad \text{ゆえに } x - y = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{4}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \quad \text{ゆえに } \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 2\sqrt{3}z = 0$$

$$\text{上の 2 式から } x : y : z = \sqrt{3} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$$

$$\vec{n} \text{ は, 実数 } t \text{ を用いて } \vec{n} = t(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{2})$$

$$|\vec{n}| = 1 \text{ であるから } |t|\sqrt{3+3+2} = 1 \quad \text{ゆえに } t = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{よって } \vec{n} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{2}) = \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2} \right)$$

解説 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ より, \vec{a} , \vec{b} の張る平行四辺形の面積が 1 であるから, 求めるベクトル \vec{n} は, ベクトル積 (外積)¹ を用いて求めることもできる (高校数学の範囲外).

$$\vec{n} = \pm \vec{a} \times \vec{b}$$

¹http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2004.pdf

(3) z の偏角が 45° であるから, $z = x + xi$ とおくと ($x > 0$)

$$|z + i| = |x + (x + 1)i| = \sqrt{2x^2 + 2x + 1}$$

$$|z - i| = |x + (x - 1)i| = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$$

これらを $|z + i| + |z - i| = \sqrt{6}$ に代入すると

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} + \sqrt{2x^2 - 2x + 1} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt{2x^2 + 2x + 1} = \sqrt{6} - \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$$

両辺を 2 乗して整理すると $\sqrt{6(2x^2 - 2x + 1)} = 3 - 2x$

再び両辺を 2 乗して整理すると $8x^2 = 3$

$$0 < x < \frac{3}{2} \text{ により } x = \frac{\sqrt{6}}{4} \text{ よって } z = \frac{\sqrt{6}}{4}(1 + i)$$

解説 $|z + i| + |z - i| = \sqrt{6}$ の表す図形は, 焦点が $-i, i$ で, 長軸が $\sqrt{6}$ の楕円を表し, 短軸上の頂点は実軸上にあり, その座標を a とすると (a は実数)

$$|a + i| + |a - i| = \sqrt{6} \text{ ゆえに } 2\sqrt{a^2 + 1} = \sqrt{6}$$

これを解いて $a = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ また, 長軸上の頂点は $\pm \frac{\sqrt{6}}{2}i$

$z = x + yi$ とおくと, 楕円の方程式は $2x^2 + \frac{2}{3}y^2 = 1$

これと $y = x$ ($x > 0$) により $x = y = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ■

6 (1) 第 5 群の最後の項は

$$\sum_{k=1}^5 2^{k-1} = \frac{2^5 - 1}{2 - 1} = 31 \text{ (番目) よって } 3 \cdot 31 = \mathbf{93}$$

(2) 第 n 群の最初の項は

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} + 1 = \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} + 1 = 2^{n-1} \text{ (番目) よって } \mathbf{3 \cdot 2^{n-1}}$$

(3) 第 n 群の項の総和は, 初項 $3 \cdot 2^{n-1}$, 公差 3, 項数 2^{n-1} の等差数列の和であるから

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \{2 \cdot 3 \cdot 2^{n-1} + (2^{n-1} - 1) \cdot 3\} = \mathbf{9 \cdot 2^{2n-3} - 3 \cdot 2^{n-2}}$$
 ■

7 (1) $30^\circ \leq \theta \leq 120^\circ$ のとき $-\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ であるから

$$y = \cos 3\theta - 3 \cos \theta + 1 = (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) - 3 \cos \theta + 1 \\ = 4 \cos^3 \theta - 6 \cos \theta + 1$$

(3) $x = \cos \theta$ とおくと, (1), (2) より $y = 4x^3 - 6x + 1 \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

微分すると $y' = 12x^2 - 6 = 12 \left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

したがって, y の増減表は

x	$-\frac{1}{2}$	\cdots	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	\cdots	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{7}{2}$	\searrow	$1 - 2\sqrt{2}$	\nearrow	$1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$x = -\frac{1}{2}$ すなわち $\theta = 120^\circ$ のとき 最大値 $\frac{7}{2}$

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ すなわち $\theta = 45^\circ$ のとき 最小値 $1 - 2\sqrt{2}$

8 (1) 原点から直線 $l: ax + y - 2 = 0$ までの距離を d とすると

$$d = \frac{|-2|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

よって, 求める円の方程式は $x^2 + y^2 = \frac{4}{a^2 + 1}$

(2) 原点を通り, l に垂直な直線の方程式は $x - ay = 0$
これと l の方程式から y を消去すると

$$x - a(-ax + 2) = 0 \quad \text{ゆえに} \quad x = \frac{2a}{a^2 + 1}$$

$0 \leq a$ より, $a = \tan \theta \quad \left(0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ とおくと

$$x = \frac{2 \tan \theta}{\tan^2 \theta + 1} = 2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$$

このとき, $0 \leq 2\theta < \pi$ であるから $0 \leq x \leq 1$