平成13年度　福岡教育大学２次試験前期日程 (数学問題)
教育学部　平成13年2月25日

- 中等教育数学，理科専攻，環境情報教育情報教育コースは，$\boxed{1}$ 〜 $\boxed{4}$ 数II・III・A・B・C (120分)
- 初等教育人文・社会，自然，実技，教育・心理・幼児教育コース，中等教育技術専攻は，$\boxed{5}$ 〜 $\boxed{8}$ 数II・A・B (100分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ．

(1) 第1項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = an^2 + bn + c$ で表される数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を求めよ．ただし，a，b，c は定数とする．

(2) O を原点とする xyz 座標空間において，4点 A$(-1,\ 5,\ 5)$，B$(1,\ 4,-2)$，C$(3,\ 1,-3)$，D$(4,-2,\ 1)$ を考える．また，点Oに関する位置ベクトルが，定数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と表される点をEとする．このとき，3点A，C，Eが同一直線上にあるように t の値を定め，AE : EC を求めよ．

(3) a を正の数で $a \neq 1$ とし，$b = \dfrac{1}{a}$ とおくとき，次の不等式を解け．

$$\log_a \left(\frac{|x-1|}{3} \right) \leqq \log_b |x-5|$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ r を正の数とし，複素数平面において，点 z が原点を中心とする半径 r の円周上を動くとき，$w = \dfrac{1}{z-i}$ を満たす点 w が描く図形を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a，b を実数とする．また $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $A^2 + 2A + 4E = O$ が成り立つように a，b の値を定めよ．

(2) (1) で求めた a，b の値に対して，次の (ア)，(イ) に答えよ．

　(ア) A^3 を求めよ．

　(イ) A^n を A，E を用いて表せ．ただし，n は自然数とする．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 次の問いに答えよ.

(1) $g(x)$ と $h(x)$ を連続な関数とするとき，次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_0^x h(t)g(x-t)\,dt = \int_0^x h(x-t)g(t)\,dt$$

(2) $g(x)$ を微分可能な関数とし，$f(x) = \dfrac{x}{2} + \displaystyle\int_0^x tg(x-t)\,dt$ とおくとき，次の (ア)，(イ)，(ウ) に答えよ.

(ア) $f''(x) = \cos x$ のとき，$g(x)$ と $f(x)$ をそれぞれ求めよ.

(イ) (ア) で求めた $f(x)$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における最大値を M とする．このとき，M の値と $f(\alpha) = M$ を満たす α の値を求めよ．ただし，$0 \leqq \alpha \leqq 2\pi$ とする.

(ウ) (ア) で求めた $f(x)$ と (イ) で求めた α の値に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^\alpha \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 dx$ を求めよ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の問いに答えよ.

(1) 複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ が正三角形の頂点で，$\alpha = (1+\sqrt{3}i)^6 - (1-\sqrt{3}i)^6$ かつ $\beta = (1+i)^3$ であるとき，γ の値を求めよ．ただし，i は虚数単位とする.

(2) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，次の不等式を解け.

$$-1 \leqq \tan\theta \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3) 次の方程式を解け.

$$\log_{10}\left(\frac{|x-1|}{3}\right) = \log_{\frac{1}{10}}|x-5|$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ 次の問いに答えよ.

(1) 第 1 項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n = an^2 + bn$ で表される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．ただし，a，b は定数とする.

(2) (1) における数列 $\{a_n\}$ は等差数列であることを示し，その公差を求めよ.

$\boxed{7}$ a，b，c を定数とする．O を原点とする xyz 座標空間において，3 点 $\mathrm{A}(a, -9,\ b)$，$\mathrm{B}(2,\ c,\ 3)$，$\mathrm{C}(-3,\ 2,\ 0)$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすように a，b，c の値を定めよ．

(2) (1) で定めた a，b，c の値に対して，次の (ア)，(イ) に答えよ．

(ア) 点 $\mathrm{D}\left(-\dfrac{8}{5},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{19}{5}\right)$ について，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(イ) 点 O に関する位置ベクトルが，定数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ と表される点を E とする．3 点 A，C，E が同一直線上にあるとき，AE : EC を求めよ．

$\boxed{8}$ a を 0 でない定数とし，関数 $f(x)=|(x-1)(x-a)|$ を考える．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(0,\ f(0))$ における接線の傾きを求めよ．

(2) $b=f'(0)$，$c=f(0)$，$S(a)=\displaystyle\int_0^1 |f(x)-(bx+c)|\,dx$ とおくとき，$S(a)$ を求めよ．

(3) $S(a)$ の最小値を求めよ．

正解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 初項 a_1 は　$a_1 = S_1 = a{\cdot}1^2 + b{\cdot}1 + c = \boldsymbol{a + b + c}$

$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= an^2 + bn + c - \{a(n-1)^2 + b(n-1) + c\}$$
$$= \boldsymbol{2an - a + b}$$

(2)
$$\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (4, -2,\ 1) - (1,\ 4, -2) = (3, -6,\ 3)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}} &= (1,\ 4, -2) + t(3, -6,\ 3)\\ &= (1 + 3t,\ 4 - 6t, -2 + 3t),\\ \overrightarrow{\mathrm{AE}} &= \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\\ &= (1 + 3t,\ 4 - 6t, -2 + 3t) - (-1,\ 5,\ 5)\\ &= (2 + 3t, -1 - 6t, -7 + 3t)\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,\ 1, -3) - (-1,\ 5,\ 5) = (4, -4, -8)$$

A，C，E が同一直線上にあるとき，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = s\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

と表されるから

$$(2 + 3t, -1 - 6t, -7 + 3t) = s(4, -4, -8)$$

したがって　　$s = \dfrac{3}{4},\ \boldsymbol{t = \dfrac{1}{3}}$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より　**AE : EC = 3 : 1**

(3) $b=\dfrac{1}{a}$ より，$\log_b|x-5|=-\log_a|x-5|$ であるから

$$\log_a\left(\frac{|x-1|}{3}\right)\leqq -\log_a|x-5|$$
$$\log_a\frac{|(x-1)(x-5)|}{3}\leqq \log_a 1$$

$a>1$ のとき　$0<\dfrac{|(x-1)(x-5)|}{3}\leqq 1$

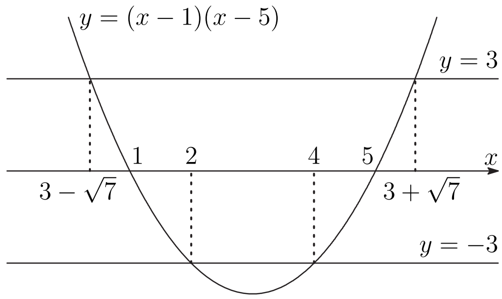
$$-3\leqq (x-1)(x-5)<0,\quad 0<(x-1)(x-5)\leqq 3$$

$0<a<1$ のとき　$\dfrac{|(x-1)(x-5)|}{3}\geqq 1$

$$(x-1)(x-5)\leqq -3,\quad 3\leqq (x-1)(x-5)$$

ここで　$(x-1)(x-5)=3$ を解いて　　$x=3\pm\sqrt{7}$
　　　　$(x-1)(x-5)=-3$ を解いて　$x=2,\ 4$

放物線 $y=(x-1)(x-5)$ と 2 直線 $y=3$，$y=-3$ の位置関係は，下の図のようになる．



よって，求める不等式の解は
$a>1$ のとき
　$\boldsymbol{3-\sqrt{7}\leqq x<1,\ 1<x\leqq 2,\ 4\leqq x<5,\ 5<x\leqq 3+\sqrt{7}}$
$0<a<1$ のとき
　$\boldsymbol{x\leqq 3-\sqrt{7},\ 2\leqq x\leqq 4,\ 3+\sqrt{7}\leqq x}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $w=\dfrac{1}{z-i}$ より，$zw=i(w-i)$ であるから

$$|zw|=|i(w-i)| \quad \text{ゆえに}, |z|=r \text{ より} \quad r|w|=|w-i| \quad \cdots ①$$

$r\neq 1$ のとき，① の両辺を平方すると

$$r^2|w|^2=|w|^2+iw-i\overline{w}+1$$
$$(r^2-1)|w|^2-iw+i\overline{w}=1$$
$$|w|^2+\overline{\left(\frac{i}{r^2-1}\right)}w+\frac{i}{r^2-1}\overline{w}+\left|\frac{i}{r^2-1}\right|^2=\frac{1}{r^2-1}+\left|\frac{i}{r^2-1}\right|^2$$
$$\left|w+\frac{i}{r^2-1}\right|^2=\frac{r^2}{(r^2-1)^2}$$

よって　　**点 $\boldsymbol{\dfrac{i}{1-r^2}}$ を中心とする半径 $\boldsymbol{\dfrac{r}{|r^2-1|}}$ の円周**

$r=1$ のとき，① より　$|w|=|w-i|$

よって　　**点 $\mathbf{0}$ と点 $\boldsymbol{i}$ を結ぶ線分の垂直二等分線**

解説 ① より，$\dfrac{|w-i|}{|w|}=r$ であるから，$r\neq 1$ のとき，w は 2 点 0，i を $1:r$ に内分する点 $\dfrac{i}{1+r}$ および外分する点 $\dfrac{i}{1-r}$ を直径の両端とする円であるから

中心は　$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{i}{1+r}+\dfrac{i}{1-r}\right)=\dfrac{i}{1-r^2}$

半径は　$\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{i}{1+r}-\dfrac{i}{1-r}\right|=\dfrac{r}{|r^2-1|}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$ にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2 - (a+1)A + (a+b)E = O$$

上式と $A^2 + 2A + 4E = O$ より　　$(a+3)A = (a+b-4)E$

$a+3 \neq 0$ のとき A は E の実数倍となり，A の $(1,2)$ 成分 -1 に反するので

$$a+3=0,\ a+b-4=0 \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{a=-3,\ b=7}$$

(2)(ア) $A^2 - 2A + 4E = O$ により

$$A^3 - 8E = (A-2E)(A^2+2A+4E) = O$$

よって　　$A^3 = 8E = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$

(イ) k を 0 以上の整数とすると
$n = 3k$ のとき

$$A^n = A^{3k} = (A^3)^k = (8E)^k = 2^{3k}E = \boldsymbol{2^n E}$$

$n = 3k+1$ のとき

$$A^n = A^{3k+1} = (A^3)^k A = (8E)^k A = 2^{3k}A = \boldsymbol{2^{n-1}A}$$

$n = 3k+2$ のとき，$A^2 = -2A - 4E$ を利用して

$$\begin{aligned} A^n &= A^{3k+2} = (A^3)^k A^2 = (8E)^k(-2A-4E) \\ &= -2^{3k+1}A - 2^{3k+2}E = \boldsymbol{-2^{n-1}A - 2^n E} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $t = x - u$ とおくと

$dt = -du$

t	$0 \longrightarrow x$
u	$x \longrightarrow 0$

$$\begin{aligned}\int_0^x h(t)g(x-t)\,dt &= \int_x^0 h(x-u)g(u)\,(-du)\\ &= \int_0^x h(x-u)g(u)\,du\\ &= \int_0^x h(x-t)g(t)\,dt\end{aligned}$$

(2) (ア) (1) の結果により

$$\int_0^x tg(x-t) = \int_0^x (x-t)g(t)\,dt$$

したがって

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{x}{2} + \int_0^x (x-t)g(t)\,dt\\ &= \frac{x}{2} + x\int_0^x g(t)\,dt - \int_0^x tg(t)\,dt \qquad \cdots①\\ f'(x) &= \frac{1}{2} + \int_0^x g(t)\,dt + xg(x) - xg(x)\\ &= \frac{1}{2} + \int_0^x g(t)\,dt \qquad \cdots②\\ f''(x) &= g(x) \qquad \cdots③\end{aligned}$$

$f''(x) = \cos x$ より，③ から　$\boldsymbol{g(x) = \cos x}$

また，①，② より，$f(0) = 0$，$f'(0) = \dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{aligned}f'(x) &= f'(0) + \int_0^x f''(t)\,dt = \frac{1}{2} + \int_0^x \cos t\,dt\\ &= \frac{1}{2} + \sin x\\ f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2} + \sin t\right)\,dt\\ &= \left[\,\frac{t}{2} - \cos t\,\right]_0^x = \boldsymbol{\frac{x}{2} - \cos x + 1}\end{aligned}$$

（イ） (ア) の結果から，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{7}{6}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{6}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	π

ここで

$$\begin{aligned} f\left(\frac{7}{6}\pi\right) - f(2\pi) &= \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) - \pi \\ &= \frac{6\sqrt{3} + 12 - 5\pi}{6} \\ &> \frac{6 \times 1.7 + 12 - 5 \times 3.2}{6} = \frac{6.2}{6} > 0 \end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{M = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{12} + 1,\ \alpha = \frac{7\pi}{6}}$

（ウ） (ア) の結果より，$f(x) - \dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$ であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{7}{6}\pi} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 dx &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi} (1 - \cos x)^2\, dx \\ &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi} (1 - 2\cos x + \cos^2 x)\, dx \\ &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \\ &= \left[\ \frac{3}{2}x - 2\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x\ \right]_0^{\frac{7}{6}\pi} \\ &= \boldsymbol{\frac{7\pi}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{8}} \end{aligned}$$

$\boxed{5}$ (1)
$$\begin{aligned}\alpha &= (1+\sqrt{3})^6-(1-\sqrt{3})^6\\ &= \{2(\cos\tfrac{\pi}{3}+i\sin\tfrac{\pi}{3})\}^6-\{2(\cos\tfrac{\pi}{3}-i\sin\tfrac{\pi}{3})\}^6\\ &= 2^6(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)-2^6(\cos 2\pi-i\sin 2\pi)=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta &= (1+i)^3\\ &= \{\sqrt{2}(\cos\tfrac{\pi}{4}+i\sin\tfrac{\pi}{4})\}^3\\ &= 2\sqrt{2}(\cos\tfrac{3}{4}\pi+i\sin\tfrac{3}{4}\pi)=-2+2i\end{aligned}$$

γ は α(原点) を中心に β を $\pm\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点であるから

$$\begin{aligned}\gamma &= \left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\beta\\ &= \left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(-2+2i)\\ &= \boldsymbol{-1\mp\sqrt{3}+(1\mp\sqrt{3})}\quad\textbf{(複号同順)}\end{aligned}$$

(2) $\boldsymbol{0^\circ \leqq \theta \leqq 30^\circ,\ 135^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ}$

(3) $\log_{10}\left(\dfrac{|x-1|}{3}\right)=\log_{\frac{1}{10}}|x-5|$ より

$$\log_{10}\left(\frac{|x-1|}{3}\right)+\log_{10}|x-5|=0$$
$$\log_{10}\frac{|(x-1)(x-5)|}{3}=\log_{10}1$$

ゆえに　$|(x-1)(x-5)|=3$

$(x-1)(x-5)=3$　これを解いて　$x=3\pm\sqrt{7}$

$(x-1)(x-5)=-3$　これを解いて　$x=2,\ 4$

よって　$\boldsymbol{x=2,\ 4,\ 3\pm\sqrt{7}}$

$\boxed{6}$ (1) 初項 a_1 は　$a_1=S_1=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b$　$\cdots$①

$n\geqq 2$ のとき　
$$\begin{aligned}a_n &= S_n-S_{n-1}\\ &= an^2+bn-\{a(n-1)^2+b(n-1)\}\\ &= 2an-a+b\end{aligned}$$

① より，この式は，$n=1$ のときにも成り立つ.

よって，一般項は　$\boldsymbol{a_n=(2n-1)a+b}$

(2) $a_{n+1}-a_n=(2n+1)a+b-\{(2n-1)a+b\}=2a$

よって，公差 $\boldsymbol{2a}$ の等差数列

$\boxed{7}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2a-9c+3c,\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-3a-18,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-6+2c$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ であるから

$$2a-9c+3c=0,\quad -3a-18=0,\quad -6+2c=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-6,\ b=13,\ c=3}$

(2)(ア) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると

$$\left(-\frac{8}{5},\ \frac{1}{5},\ \frac{19}{5}\right)=\alpha(-6,-9,\ 13)+\beta(2,\ 3,\ 3)+\gamma(-3,\ 2,\ 0)$$
$$=(-6\alpha+2\beta-3\gamma,-9\alpha+3\beta+2\gamma,\ 13\alpha+3\beta)$$

したがって　$\begin{cases} -6\alpha+2\beta-3\gamma=-\dfrac{8}{15} \\ -9\alpha+3\beta+2\gamma=\dfrac{1}{5} \\ 13\alpha+3\beta=\dfrac{19}{5} \end{cases}$

ゆえに　$\alpha=\dfrac{1}{5},\ \beta=\dfrac{2}{5},\ \gamma=\dfrac{2}{5}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

(イ) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$
$$=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\left(\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$
$$=\left(-1+\frac{1}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-\frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{5}t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ であるから

$$\left(-1+\frac{1}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-\frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{5}t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=k(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$$

したがって

$$\left(-1+\frac{1}{5}t+k\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(1-\frac{3}{5}t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(\frac{2}{5}t-k\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は互いに直交するので，これらは1次独立であるから

$$-1+\frac{1}{5}t+k=0,\quad 1-\frac{3}{5}t=0,\quad \frac{2}{5}t-k=0$$

これを解いて　$t=\dfrac{5}{3},\ k=\dfrac{2}{3}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　よって　$\mathbf{AE:EC=2:1}$

$\boxed{8}$ (1) $f(x) = |(x-1)(x-a)|$ より　$f(0) = |\,a\,|$

(i) $a < 0$ のとき，$a < x < 1$ において

$$f(x) = -(x-1)(x-a),\ \ f'(x) = -2x + a + 1$$

(ii) $a > 0$ のとき，$x < \min\{a,\ 1\}$ において

$$f(x) = (x-1)(x-a),\ \ f'(x) = 2x - a - 1$$

よって　$a < 0$ のとき　$\boldsymbol{f'(0) = a + 1}$**,**

$a > 0$ のとき　$\boldsymbol{f'(0) = -a - 1}$

(2) (1) の結果から　$f(x) - bx - c = |(x-1)(x-a)| - f'(0)x - f(0)$ より

(i) $a < 0$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x) - bx - c &= |(x-1)(x-a)| - (a+1)x + a \\ &= -(x-1)(x-a) - (a+1)x + a = -x^2 \end{aligned}$$

したがって　$S(a) = \displaystyle\int_0^1 |-x^2|\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

(ii) $0 < a < 1$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x) - bx - c &= |(x-1)(x-a)| + (a+1)x - a \\ &= \begin{cases} (x-1)(x-a) + (a+1)x - a & (0 \leqq x \leqq a) \\ -(x-1)(x-a) + (a+1)x - a & (a \leqq x \leqq 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 & (0 \leqq x \leqq a) \\ -(x-a-1)^2 + a^2 + 1 > 0 & (a \leqq x \leqq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a x^2\,dx + \int_a^1 \{-(x-a-1)^2 + a^2 + 1\}\,dx \\ &= \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^a + \left[-\frac{1}{3}(x-a-1)^3 + (a^2+1)x\ \right]_a^1 \\ &= \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{1}{3} + (a^2+1)(1-a) \\ &= -\frac{a^3}{3} + a^2 - a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(iii) $1 \leqq a$ のとき，$0 \leqq x \leqq 1$ において

$$\begin{aligned} f(x) - bx - c &= |(x-1)(x-a)| + (a+1)x - a \\ &= (x-1)(x-a) + (a+1)x - a = x^2 \end{aligned}$$

したがって　$S(a) = \displaystyle\int_0^1 x^2\,dx = \left[\ \frac{x^3}{3}\ \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

よって　$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & \boldsymbol{S(a) = \dfrac{1}{3}} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} & \boldsymbol{S(a) = -\dfrac{a^3}{3} + a^2 - a + \dfrac{2}{3}} \\ 1 \leqq a \text{ のとき} & \boldsymbol{S(a) = \dfrac{1}{3}} \end{cases}$

(3) (2) の結果から，$0 < a < 1$ のとき

$$S'(a) = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2$$

$S(a)$ は $0 < a < 1$ で単調減少であるから，$0 < a < 1$ に極値をもたない．
よって，$S(a)$ の最小値は　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}}$ $(a < 0,\ 1 \leqq a)$