

## 平成 13 年度 福岡教育大学 2 次試験前期日程 (数学問題)

## 教育学部 平成 13 年 2 月 25 日

- 中等教育数学, 理科専攻, 環境情報教育情報教育コース  
 [1] [2] [3] [4] 数 I・II・III・A・B・C (120 分)
- 初等教育人文・社会, 自然, 実技, 教育・心理・幼児教育コース, 中等教育技術専攻 [5] [6] [7] [8] 数 I・II・A・B (100 分)

[1] 次の問いに答えよ.

- (1) 第 1 項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が,  $S_n = an^2 + bn + c$  で表される数列  $\{a_n\}$  の第  $n$  項を求めよ. ただし,  $a, b, c$  は定数とする.
- (2)  $O$  を原点とする  $xyz$  座標空間において, 4 点  $A(-1, 5, 5), B(1, 4, -2), C(3, 1, -3), D(4, -2, 1)$  を考える. また, 点  $O$  に関する位置ベクトルが, 定数  $t$  を用いて  $\vec{OB} + t\vec{BD}$  と表される点を  $E$  とする. このとき, 3 点  $A, C, E$  が同一直線上にあるように  $t$  の値を定め,  $AE : EC$  を求めよ.
- (3)  $a$  を正の数で  $a \neq 1$  とし,  $b = \frac{1}{a}$  とおくとき, 次の不等式を解け.

$$\log_a \left( \frac{|x-1|}{3} \right) \leq \log_b |x-5|$$

[2]  $r$  を正の数とし, 複素数平面において, 点  $z$  が原点を中心とする半径  $r$  の円周上を動くとき,  $w = \frac{1}{z-i}$  を満たす点  $w$  が描く図形を求めよ. ただし,  $i$  は虚数単位とする.

[3]  $a, b$  を実数とする. また  $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  とするとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $A^2 + 2A + 4E = O$  が成り立つように  $a, b$  の値を定めよ.
- (2) (1) で求めた  $a, b$  の値に対して, 次の (ア), (イ) に答えよ.
  - (ア)  $A^3$  を求めよ.
  - (イ)  $A^n$  を  $A, E$  を用いて表せ. ただし,  $n$  は自然数とする.

4 次の問いに答えよ.

(1)  $g(x)$  と  $h(x)$  を連続な関数とするとき, 次の等式が成り立つことを証明せよ.

$$\int_0^x h(t)g(x-t) dt = \int_0^x h(x-t)g(t) dt$$

(2)  $g(x)$  を微分可能な関数とし,  $f(x) = \frac{x}{2} + \int_0^x tg(x-t) dt$  とおくとき, 次の (ア), (イ), (ウ) に答えよ.

(ア)  $f''(x) = \cos x$  のとき,  $g(x)$  と  $f(x)$  をそれぞれ求めよ.

(イ) (ア) で求めた  $f(x)$  の  $0 \leq x \leq 2\pi$  における最大値を  $M$  とする. このとき,  $M$  の値と  $f(\alpha) = M$  を満たす  $\alpha$  の値を求めよ. ただし,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$  とする.

(ウ) (ア) で求めた  $f(x)$  と (イ) で求めた  $\alpha$  の値に対して, 定積分  $\int_0^\alpha \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 dx$  を求めよ.

5 次の問いに答えよ.

(1) 複素数平面上の 3 点  $A(\alpha)$ ,  $B(\beta)$ ,  $C(\gamma)$  が正三角形の頂点で,  $\alpha = (1 + \sqrt{3}i)^6 - (1 - \sqrt{3}i)^6$  かつ  $\beta = (1 + i)^3$  であるとき,  $\gamma$  の値を求めよ. ただし,  $i$  は虚数単位とする.

(2)  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  のとき, 次の不等式を解け.

$$-1 \leq \tan \theta \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(3) 次の方程式を解け.

$$\log_{10} \left( \frac{|x-1|}{3} \right) = \log_{\frac{1}{10}} |x-5|$$

6 次の問いに答えよ.

(1) 第 1 項から第  $n$  項までの和  $S_n$  が,  $S_n = an^2 + bn$  で表される数列  $\{a_n\}$  の一般項を求めよ. ただし,  $a, b$  は定数とする.

(2) (1) における数列  $\{a_n\}$  は等差数列であることを示し, その公差を求めよ.

7  $a, b, c$  を定数とする.  $O$  を原点とする  $xyz$  座標空間において, 3点  $A(a, -9, b)$ ,  $B(2, c, 3)$ ,  $C(-3, 2, 0)$  を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$  かつ  $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$  かつ  $\overrightarrow{OB} \perp \overrightarrow{OC}$  を満たすように  $a, b, c$  の値を定めよ.

(2) (1) で定めた  $a, b, c$  の値に対して, 次の (ア), (イ) に答えよ.

(ア) 点  $D\left(-\frac{8}{5}, \frac{1}{5}, \frac{19}{5}\right)$  について,  $\overrightarrow{OD}$  を  $\overrightarrow{OA}$ ,  $\overrightarrow{OB}$ ,  $\overrightarrow{OC}$  を用いて表せ.

(イ) 点  $O$  に関する位置ベクトルが, 定数  $t$  を用いて  $\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BD}$  と表される点を  $E$  とする. 3点  $A, C, E$  が同一直線上にあるとき,  $AE : EC$  を求めよ.

8  $a$  を 0 でない定数とし, 関数  $f(x) = |(x-1)(x-a)|$  を考える. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) 曲線  $y = f(x)$  上の点  $(0, f(0))$  における接線の傾きを求めよ.

(2)  $b = f'(0)$ ,  $c = f(0)$ ,  $S(a) = \int_0^1 |f(x) - (bx + c)| dx$  とおくとき,  $S(a)$  を求めよ.

(3)  $S(a)$  の最小値を求めよ.

## 解答例

$$\begin{aligned} \boxed{1} \quad (1) \quad & \text{初項 } a_1 \text{ は } a_1 = S_1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = \mathbf{a + b + c} \\ & n \geq 2 \text{ のとき } a_n = S_n - S_{n-1} \\ & \qquad \qquad \qquad = an^2 + bn + c - \{a(n-1)^2 + b(n-1) + c\} \\ & \qquad \qquad \qquad = \mathbf{2an - a + b} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB} = (4, -2, 1) - (1, 4, -2) = (3, -6, 3)$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BD} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= (1, 4, -2) + t(3, -6, 3) \\ &= (1 + 3t, 4 - 6t, -2 + 3t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} \\ &= (1 + 3t, 4 - 6t, -2 + 3t) - (-1, 5, 5) \\ &= (2 + 3t, -1 - 6t, -7 + 3t) \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (3, 1, -3) - (-1, 5, 5) = (4, -4, -8)$$

A, C, E が同一直線上にあるとき, 実数  $s$  を用いて

$$\overrightarrow{AE} = s\overrightarrow{AC}$$

と表されるから

$$(2 + 3t, -1 - 6t, -7 + 3t) = s(4, -4, -8)$$

$$\text{したがって } s = \frac{3}{4}, t = \frac{1}{3}$$

$$\text{また, } \overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \text{ より } \mathbf{AE : EC = 3 : 1}$$

(3)  $b = \frac{1}{a}$  より,  $\log_b |x - 5| = -\log_a |x - 5|$  であるから

$$\log_a \left( \frac{|x - 1|}{3} \right) \leq -\log_a |x - 5|$$

$$\log_a \frac{|(x - 1)(x - 5)|}{3} \leq \log_a 1$$

$$a > 1 \text{ のとき } 0 < \frac{|(x - 1)(x - 5)|}{3} \leq 1$$

$$-3 \leq (x - 1)(x - 5) < 0, \quad 0 < (x - 1)(x - 5) \leq 3$$

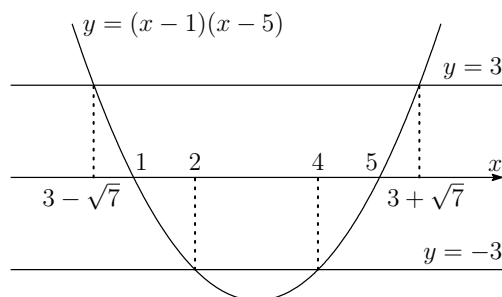
$$0 < a < 1 \text{ のとき } \frac{|(x - 1)(x - 5)|}{3} \geq 1$$

$$(x - 1)(x - 5) \leq -3, \quad 3 \leq (x - 1)(x - 5)$$

ここで  $(x - 1)(x - 5) = 3$  を解いて  $x = 3 \pm \sqrt{7}$

$(x - 1)(x - 5) = -3$  を解いて  $x = 2, 4$

放物線  $y = (x - 1)(x - 5)$  と 2 直線  $y = 3, y = -3$  の位置関係は, 下の図のようになる.



よって, 求める不等式の解は

$a > 1$  のとき

$$3 - \sqrt{7} \leq x < 1, \quad 1 < x \leq 2, \quad 4 \leq x < 5, \quad 5 < x \leq 3 + \sqrt{7}$$

$0 < a < 1$  のとき

$$x \leq 3 - \sqrt{7}, \quad 2 \leq x \leq 4, \quad 3 + \sqrt{7} \leq x$$



2  $w = \frac{1}{z-i}$  より,  $zw = i(w-i)$  であるから

$$|zw| = |i(w-i)| \quad \text{ゆえに, } |z| = r \text{ より } r|w| = |w-i| \quad \dots \textcircled{1}$$

$r \neq 1$  のとき, ①の両辺を平方すると

$$\begin{aligned} r^2|w|^2 &= |w|^2 + iw - i\bar{w} + 1 \\ (r^2 - 1)|w|^2 - iw + i\bar{w} &= 1 \\ |w|^2 + \overline{\left(\frac{i}{r^2 - 1}\right)w} + \frac{i}{r^2 - 1}\bar{w} + \left|\frac{i}{r^2 - 1}\right|^2 &= \frac{1}{r^2 - 1} + \left|\frac{i}{r^2 - 1}\right|^2 \\ \left|w + \frac{i}{r^2 - 1}\right|^2 &= \frac{r^2}{(r^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

よって 点  $\frac{i}{1-r^2}$  を中心とする半径  $\frac{r}{|r^2-1|}$  の円周

$r = 1$  のとき, ①より  $|w| = |w-i|$

よって 点  $0$  と点  $i$  を結ぶ線分の垂直二等分線

解説 ①より,  $\frac{|w-i|}{|w|} = r$  であるから,  $r \neq 1$  のとき,  $w$  は 2 点  $0, i$  を  $1:r$  に内分する点  $\frac{i}{1+r}$  および外分する点  $\frac{i}{1-r}$  を直径の両端とする円であるから

$$\text{中心は } \frac{1}{2} \left( \frac{i}{1+r} + \frac{i}{1-r} \right) = \frac{i}{1-r^2}$$

$$\text{半径は } \frac{1}{2} \left| \frac{i}{1+r} - \frac{i}{1-r} \right| = \frac{r}{|r^2-1|}$$



**3** (1)  $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$  にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2 - (a+1)A + (a+b)E = O$$

上式と  $A^2 + 2A + 4E = O$  より  $(a+3)A = (a+b-4)E$

$a+3 \neq 0$  のとき  $A$  は  $E$  の実数倍となり,  $A$  の  $(1,2)$  成分  $-1$  に反するので

$$a+3=0, a+b-4=0 \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{a = -3, b = 7}$$

(2)(ア)  $A^2 - 2A + 4E = O$  により

$$A^3 - 8E = (A - 2E)(A^2 + 2A + 4E) = O$$

$$\text{よって} \quad A^3 = 8E = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

(イ)  $k$  を 0 以上の整数とすると

$n = 3k$  のとき

$$A^n = A^{3k} = (A^3)^k = (8E)^k = 2^{3k}E = \mathbf{2^n E}$$

$n = 3k + 1$  のとき

$$A^n = A^{3k+1} = (A^3)^k A = (8E)^k A = 2^{3k}A = \mathbf{2^{n-1} A}$$

$n = 3k + 2$  のとき,  $A^2 = -2A - 4E$  を利用して

$$\begin{aligned} A^n &= A^{3k+2} = (A^3)^k A^2 = (8E)^k (-2A - 4E) \\ &= -2^{3k+1}A - 2^{3k+2}E = \mathbf{-2^{n-1}A - 2^n E} \end{aligned}$$



4 (1)  $t = x - u$  とおくと

$$dt = -du$$

$t$	$0 \rightarrow x$
$u$	$x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_0^x h(t)g(x-t) dt &= \int_x^0 h(x-u)g(u) (-du) \\ &= \int_0^x h(x-u)g(u) du \\ &= \int_0^x h(x-t)g(t) dt \end{aligned}$$

(2)(ア) (1) の結果により

$$\int_0^x tg(x-t) = \int_0^x (x-t)g(t) dt$$

したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} + \int_0^x (x-t)g(t) dt \\ &= \frac{x}{2} + x \int_0^x g(t) dt - \int_0^x tg(t) dt \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} + \int_0^x g(t) dt + xg(x) - xg(x) \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^x g(t) dt \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$f''(x) = g(x) \quad \dots \textcircled{3}$$

$f''(x) = \cos x$  より, ③ から  $g(x) = \cos x$

また, ①, ② より,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = \frac{1}{2}$  であるから

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'(0) + \int_0^x f''(t) dt = \frac{1}{2} + \int_0^x \cos t dt \\ &= \frac{1}{2} + \sin x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \left( \frac{1}{2} + \sin t \right) dt \\ &= \left[ \frac{t}{2} - \cos t \right]_0^x = \frac{x}{2} - \cos x + 1 \end{aligned}$$

(イ) (ア)の結果から,  $f(x)$ の増減表は

$x$	0	...	$\frac{7}{6}\pi$	...	$\frac{11}{6}\pi$	...	$2\pi$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	極大	↘	極小	↗	$\pi$

ここで

$$\begin{aligned} f\left(\frac{7}{6}\pi\right) - f(2\pi) &= \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) - \pi \\ &= \frac{6\sqrt{3} + 12 - 5\pi}{6} \\ &> \frac{6 \times 1.7 + 12 - 5 \times 3.2}{6} = \frac{6.2}{6} > 0 \end{aligned}$$

よって  $M = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{7\pi}{12} + 1$ ,  $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

(ウ) (ア)の結果より,  $f(x) - \frac{x}{2} = 1 - \cos x$  であるから

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{7}{6}\pi} \left(f(x) - \frac{x}{2}\right)^2 dx &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi} (1 - \cos x)^2 dx \\ &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi} (1 - 2\cos x + \cos^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{7}{6}\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x - 2\sin x + \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\frac{7}{6}\pi} \\ &= \frac{7\pi}{4} + 1 + \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 \text{[5]} \quad (1) \quad \alpha &= (1 + \sqrt{3})^6 - (1 - \sqrt{3})^6 \\
 &= \{2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})\}^6 - \{2(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3})\}^6 \\
 &= 2^6(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) - 2^6(\cos 2\pi - i \sin 2\pi) = 0 \\
 \beta &= (1 + i)^3 \\
 &= \{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})\}^3 \\
 &= 2\sqrt{2}(\cos \frac{3}{4}\pi + i \sin \frac{3}{4}\pi) = -2 + 2i
 \end{aligned}$$

$\gamma$  は  $\alpha$ (原点) を中心に  $\beta$  を  $\pm \frac{\pi}{3}$  だけ回転した点であるから

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \left\{ \cos \left( \pm \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( \pm \frac{\pi}{3} \right) \right\} \beta \\
 &= \left( \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) (-2 + 2i) \\
 &= -1 \mp \sqrt{3} + (1 \mp \sqrt{3})i \quad (\text{複号同順})
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad 0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ, \quad 135^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

$$(3) \quad \log_{10} \left( \frac{|x-1|}{3} \right) = \log_{\frac{1}{10}} |x-5| \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
 \log_{10} \left( \frac{|x-1|}{3} \right) + \log_{10} |x-5| &= 0 \\
 \log_{10} \frac{|(x-1)(x-5)|}{3} &= \log_{10} 1
 \end{aligned}$$

$$\text{ゆえに} \quad |(x-1)(x-5)| = 3$$

$$(x-1)(x-5) = 3 \quad \text{これを解いて} \quad x = 3 \pm \sqrt{7}$$

$$(x-1)(x-5) = -3 \quad \text{これを解いて} \quad x = 2, 4$$

$$\text{よって} \quad x = 2, 4, 3 \pm \sqrt{7} \quad \blacksquare$$

$$\text{[6]} \quad (1) \quad \text{初項 } a_1 \text{ は } a_1 = S_1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = a + b \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 n \geq 2 \text{ のとき } a_n &= S_n - S_{n-1} \\
 &= an^2 + bn - \{a(n-1)^2 + b(n-1)\} \\
 &= 2an - a + b
 \end{aligned}$$

① より, この式は,  $n = 1$  のときにも成り立つ.

$$\text{よって, 一般項は } a_n = (2n-1)a + b$$

$$(2) \quad a_{n+1} - a_n = (2n+1)a + b - \{(2n-1)a + b\} = 2a$$

よって, 公差  $2a$  の等差数列 \blacksquare

$$\boxed{7} \quad (1) \quad \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 2a - 9c + 3c, \quad \vec{OA} \cdot \vec{OC} = -3a - 18, \quad \vec{OB} \cdot \vec{OC} = -6 + 2c$$

このとき,  $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$ ,  $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = 0$ ,  $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0$  であるから

$$2a - 9c + 3c = 0, \quad -3a - 18 = 0, \quad -6 + 2c = 0$$

これを解いて  $\mathbf{a = -6, b = 13, c = 3}$

$$(2)(ア) \quad \vec{OD} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB} + \gamma \vec{OC} \text{ とすると}$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{8}{5}, \frac{1}{5}, \frac{19}{5}\right) &= \alpha(-6, -9, 13) + \beta(2, 3, 3) + \gamma(-3, 2, 0) \\ &= (-6\alpha + 2\beta - 3\gamma, -9\alpha + 3\beta + 2\gamma, 13\alpha + 3\beta) \end{aligned}$$

$$\text{したがって} \quad \begin{cases} -6\alpha + 2\beta - 3\gamma = -\frac{8}{5} \\ -9\alpha + 3\beta + 2\gamma = \frac{1}{5} \\ 13\alpha + 3\beta = \frac{19}{5} \end{cases}$$

$$\text{ゆえに } \alpha = \frac{1}{5}, \beta = \frac{2}{5}, \gamma = \frac{2}{5} \text{ よって } \vec{OD} = \frac{1}{5}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB} + \frac{2}{5}\vec{OC}$$

$$(イ) \quad \vec{OE} = \vec{OB} + t\vec{BD} = (1-t)\vec{OB} + t\vec{OD} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} \vec{AE} &= \vec{OE} - \vec{OA} = -\vec{OA} + (1-t)\vec{OB} + t\vec{OD} \\ &= -\vec{OA} + (1-t)\vec{OB} + t\left(\frac{1}{5}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB} + \frac{2}{5}\vec{OC}\right) \\ &= \left(-1 + \frac{1}{5}t\right)\vec{OA} + \left(1 - \frac{3}{5}t\right)\vec{OB} + \frac{2}{5}t\vec{OC} \end{aligned}$$

このとき,  $\vec{AE} = k\vec{AC}$  であるから

$$\left(-1 + \frac{1}{5}t\right)\vec{OA} + \left(1 - \frac{3}{5}t\right)\vec{OB} + \frac{2}{5}t\vec{OC} = k(\vec{OC} - \vec{OA})$$

したがって

$$\left(-1 + \frac{1}{5}t + k\right)\vec{OA} + \left(1 - \frac{3}{5}t\right)\vec{OB} + \left(\frac{2}{5}t - k\right)\vec{OC} = \vec{0}$$

$\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$  は互いに直交するので, これらは1次独立であるから

$$-1 + \frac{1}{5}t + k = 0, \quad 1 - \frac{3}{5}t = 0, \quad \frac{2}{5}t - k = 0$$

$$\text{これを解いて } t = \frac{5}{3}, \quad k = \frac{2}{3}$$

$$\text{したがって } \vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AC} \text{ よって } \mathbf{AE : EC = 2 : 1} \quad \blacksquare$$

8 (1)  $f(x) = |(x-1)(x-a)|$  より  $f(0) = |a|$

(i)  $a < 0$  のとき,  $a < x < 1$  において

$$f(x) = -(x-1)(x-a), \quad f'(x) = -2x + a + 1$$

(ii)  $a > 0$  のとき,  $x < \min\{a, 1\}$  において

$$f(x) = (x-1)(x-a), \quad f'(x) = 2x - a - 1$$

よって  $a < 0$  のとき  $f'(0) = a + 1$ ,

$a > 0$  のとき  $f'(0) = -a - 1$

(2) (1) の結果から  $f(x) - bx - c = |(x-1)(x-a)| - f'(0)x - f(0)$  より

(i)  $a < 0$  のとき,  $0 \leq x \leq 1$  において

$$\begin{aligned} f(x) - bx - c &= |(x-1)(x-a)| - (a+1)x + a \\ &= -(x-1)(x-a) - (a+1)x + a = -x^2 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } S(a) = \int_0^1 |-x^2| dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(ii)  $0 < a < 1$  のとき,  $0 \leq x \leq 1$  において

$$\begin{aligned} f(x) - bx - c &= |(x-1)(x-a)| + (a+1)x - a \\ &= \begin{cases} (x-1)(x-a) + (a+1)x - a & (0 \leq x \leq a) \\ -(x-1)(x-a) + (a+1)x - a & (a \leq x \leq 1) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^2 & (0 \leq x \leq a) \\ -(x-a-1)^2 + a^2 + 1 > 0 & (a \leq x \leq 1) \end{cases} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^a x^2 dx + \int_a^1 \{-(x-a-1)^2 + a^2 + 1\} dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^a + \left[ -\frac{1}{3}(x-a-1)^3 + (a^2+1)x \right]_a^1 \\ &= \frac{a^3}{3} + \frac{a^3}{3} - \frac{1}{3} + (a^2+1)(1-a) \\ &= -\frac{a^3}{3} + a^2 - a + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(iii)  $1 \leq a$  のとき,  $0 \leq x \leq 1$  において

$$\begin{aligned} f(x) - bx - c &= |(x-1)(x-a)| + (a+1)x - a \\ &= (x-1)(x-a) + (a+1)x - a = x^2 \end{aligned}$$

$$\text{したがって } S(a) = \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって } \begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & S(a) = \frac{1}{3} \\ 0 < a < 1 \text{ のとき} & S(a) = -\frac{a^3}{3} + a^2 - a + \frac{2}{3} \\ 1 \leq a \text{ のとき} & S(a) = \frac{1}{3} \end{cases}$$

(3) (2) の結果から,  $0 < a < 1$  のとき

$$S'(a) = -a^2 + 2a - 1 = -(a-1)^2$$

$S(a)$  は  $0 < a < 1$  で単調減少であるから,  $0 < a < 1$  に極値をもたない.

よって,  $S(a)$  の最小値は  $\frac{1}{3}$  ( $a < 0, 1 \leq a$ ) ■