問題 (時習館プログラム 2012 年 12 月)

$n \geqq 3$ を整数とし，a_2，$a_3, \ldots, a_n$ を $a_2 a_3 \cdots a_n = 1$ をみたす正の実数とする．このとき $(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n > n^n$ が成り立つことを示せ．

第 53 回国際数学オリンピック アルゼンチン大会
第 1 日目 (2012 年 7 月 10 日) の問題 2

問題を $\mathbb{R}^{n-1}$ の超曲面 $x_i > 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$，$x_2 x_3 \cdots x_n - 1 = 0$ における関数 $F_n(x_2, x_3, \ldots, x_n) = (1+x_2)^2(1+x_3)^3 \cdots (1+x_n)^n$ の極値を考えて，次を証明する．

$n \geq 3$ とし，$x_i > 0$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$，$x_2 x_3 \cdots x_n - 1 = 0$,

$$F_n(x_2, x_3, \ldots, x_n) = (1+x_2)^2(1+x_3)^3 \cdots (1+x_n)^n$$

とするとき，次式が成り立つ．

$$F_n(x_2, x_3, \ldots, x_n) > n^n$$

$n \geq 3$ とし，2 つの関数を

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (2x-1)(3x-1)\cdots(nx-1) \qquad (x > \tfrac{1}{2}) \\ g_n(x) &= (2-x)^2(3-x)^3\cdots(n-x)^n \qquad (0 < x < 2) \end{aligned}$$

とおくと，$f_n(x)$ は単調増加，$g_n(x)$ は単調減少で，ともに正値をとる．
$f_n(\lambda) = 1$ $(\lambda > \frac{1}{2})$ をみたす λ は唯一存在し，α_k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ を

$$\frac{1+\alpha_2}{2\alpha_2} = \frac{1+\alpha_3}{3\alpha_3} = \cdots = \frac{1+\alpha_n}{n\alpha_n} = \lambda \quad \text{すなわち} \quad \alpha_k = \frac{1}{k\lambda - 1}$$

とし，$\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ とおくと

$$\begin{aligned} F_n(\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n) &= \prod_{k=2}^{n} (1+\alpha_k)^k = \prod_{k=2}^{n} k^k {\alpha_k}^k \left(\frac{1+\alpha_k}{k\alpha_k}\right)^k \\ &= \prod_{k=2}^{n} k^k \left(\frac{1}{k\lambda - 1}\right)^k \lambda^k = \frac{1}{g_n(\mu)} \prod_{k=2}^{n} k^k \end{aligned}$$

1　$n=3$ のとき

$C(t)$ を $x_2x_3-1=0$ $(x_2>0,\ x_3>0)$ を表す正則な曲線とし，$F_3(C(t))$ を t で微分すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}F_3(C(t)) &= 2(1+x_2)(1+x_3)^3\frac{dx_2}{dt}+3(1+x_2)^2(1+x_3)^2\frac{dx_3}{dt} \\
&= F_3(x_2,x_3)\left(\frac{2}{1+x_2},\ \frac{3}{1+x_3}\right)\left(\frac{dx_2}{dt},\frac{dx_3}{dt}\right) \qquad (1.1)
\end{aligned}
$$

また $x_2x_3-1=0$ を t で微分すると

$$
x_3\frac{dx_2}{dt}+x_2\frac{dx_3}{dt}=0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3}\right)\cdot\left(\frac{dx_2}{dt},\frac{dx_3}{dt}\right)=0 \qquad (1.2)
$$

$F_3(C(t))$ が $t=t_0$ で極値をとり，$C(t_0)=(\alpha_2,\alpha_3)$ とすると，(1.1)，(1.2) より

$$
\left(\frac{2}{1+\alpha_2},\ \frac{3}{1+\alpha_3}\right)\cdot C'(t_0)=0, \quad \left(\frac{1}{\alpha_2},\ \frac{1}{\alpha_3}\right)\cdot C'(t_0)=0
$$

上の 2 式から，λ を用いて

$$
\left(\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3}\right)=\lambda\left(\frac{2}{1+\alpha_2},\frac{3}{1+\alpha_3}\right)
$$

$$
\frac{1+\alpha_2}{2\alpha_2}=\frac{1+\alpha_3}{3\alpha_3}=\lambda
$$

$$
(2\lambda-1)\alpha_2=1, \quad (3\lambda-1)\alpha_3=1
$$

$\alpha_2>0$，$\alpha_3>0$，$\alpha_2\alpha_3=1$ により

$$
\lambda>\frac{1}{2}, \quad (2\lambda-1)(3\lambda-1)=1
$$

したがって　$\lambda=\frac{5}{6}$，$\alpha_2=\frac{3}{2}$，$\alpha_3=\frac{2}{3}$

$$
F_3\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)=\left(1+\frac{3}{2}\right)^2\left(1+\frac{2}{3}\right)^3=\frac{5^5}{2^2\cdot 3^3}=28.935\cdots
$$

$F_3(\frac{3}{2},\frac{2}{3})$ は最小値であるから (p.4 の補足)　　$F_3(x_2,x_3)>3^3$

2　$n=4$ のとき

$\mathrm{P}(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ を曲面 $x_2x_3x_4-1=0$ $(x_2>0,\ x_3>0,\ x_4>0)$ 上の F_4 の極値点，$C(t)$ をこの曲面上で P を通る正則な曲線とし，$F_4(C(t))$ を t で微分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_4(C(t)) &= \left(\frac{\partial F_4}{\partial x_2},\frac{\partial F_4}{\partial x_3},\frac{\partial F_4}{\partial x_4}\right)\cdot C'(t)\\ &= F_4(x_2,x_3,x_4)\left(\frac{2}{1+x_2},\ \frac{3}{1+x_3},\ \frac{4}{1+x_4}\right)\cdot C'(t)\end{aligned} \tag{2.1}$$

また $x_2x_3x_4-1=0$ を t で微分すると

$$x_3x_4\frac{dx_2}{dt}+x_2x_4\frac{dx_3}{dt}+x_2x_3\frac{dx_4}{dt}=0 \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{1}{x_2},\frac{1}{x_3},\frac{1}{x_4}\right)\cdot C'(t)=0 \tag{2.2}$$

$F_4(C(t))$ が $t=t_0$ で極値をとり，$C(t_0)=(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ とすると，(2.1)，(2.2) より

$$\left(\frac{2}{1+\alpha_2},\ \frac{3}{1+\alpha_3},\ \frac{4}{1+\alpha_4}\right)\cdot C'(t_0)=0, \quad \left(\frac{1}{\alpha_2},\ \frac{1}{\alpha_3},\ \frac{1}{\alpha_4}\right)\cdot C'(t_0)=0$$

P における接平面上の接方向 $C'(t_0)$ に関係なく上の 2 式は成り立つから，λ を用いて

$$\left(\frac{1}{\alpha_2},\frac{1}{\alpha_3},\frac{1}{\alpha_4}\right)=\lambda\left(\frac{2}{1+\alpha_2},\frac{3}{1+\alpha_3},\frac{4}{1+\alpha_4}\right)$$

$$\frac{1+\alpha_2}{2\alpha_2}=\frac{1+\alpha_3}{3\alpha_3}=\frac{1+\alpha_4}{4\alpha_4}=\lambda$$

$$(2\lambda-1)\alpha_2=1, \quad (3\lambda-1)\alpha_3=1, \quad (4\lambda-1)\alpha_4=1$$

$\alpha_2>0$，$\alpha_3>0$，$\alpha_4>0$，$\alpha_2\alpha_3\alpha_4=1$ により

$$\lambda>\frac{1}{2}, \quad f_4(\lambda)=1$$

$f_4\left(\dfrac{3}{4}\right)>1$ より　　$\dfrac{1}{2}<\lambda<\dfrac{3}{4}$，$\dfrac{4}{3}<\mu<2$

ゆえに　　$g_4(\mu)<g_4\left(\dfrac{4}{3}\right)=\left(2-\dfrac{4}{3}\right)^2\left(3-\dfrac{4}{3}\right)^3\left(4-\dfrac{4}{3}\right)^4=\dfrac{2^{14}\cdot 5^3}{3^9}$

したがって

$$F_4(\mathrm{P})=\frac{2^2\cdot 3^3\cdot 4^4}{g_4(\mu)}>\frac{2^2\cdot 3^3\cdot 4^4}{g_4(\frac{4}{3})}=4^4\times\frac{3^{12}}{2^{12}\cdot 5^3}=4^4\left(\frac{3^4}{2^4\cdot 5}\right)^3=4^4\left(\frac{81}{80}\right)^3>4^4$$

P は最小点であるから (p.4 の補足)　　$F_4(x_2,x_3,x_4)\geq F_4(\mathrm{P})>4^4$

補足

$n=3$ のとき，例えば，$C(t)=(t,\ \frac{1}{t})\ (t>0)$ とおくと

$$\begin{aligned} F_3(C(t)) &= (1+t)^2\left(1+\frac{1}{t}\right)^3 = \frac{(t+1)^5}{t^3} \\ \frac{d}{dt}F_3(C(t)) &= \frac{(2t-3)(t+1)^4}{t^4} \end{aligned}$$

したがって，$t=\frac{3}{2}$ で極小値 (最小値) をとる．

$n=4$ のとき，F_4 の極値点 $\mathrm{P}(\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ を通る曲線 $C(t)$ $(t>0)$ を

$$C_1(t)=\left(\alpha_2 t,\ \frac{\alpha_3}{t},\ \alpha_4\right),\quad C_2(t)=\left(\alpha_2 t,\ \alpha_3,\ \frac{\alpha_4}{t}\right)$$

とおくと

$$\begin{aligned} F_4(C_1(t)) &= (1+\alpha_2 t)^2\left(1+\frac{\alpha_3}{t}\right)^3(1+\alpha_4)^4 \\ F_4(C_2(t)) &= (1+\alpha_2 t)^2(1+\alpha_3)^3\left(1+\frac{\alpha_4}{t}\right)^4 \end{aligned}$$

これらを t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_4(C_1(t)) &= \frac{1}{t^2}(2\alpha_2 t^2-\alpha_2\alpha_3 t-3\alpha_3)(1+\alpha_2 t)\left(1+\frac{\alpha_3}{t}\right)^2(1+\alpha_4)^4 \\ \frac{d}{dt}F_4(C_2(t)) &= \frac{2}{t^2}(\alpha_2 t^2-\alpha_2\alpha_4 t-2\alpha_4)(1+\alpha_2 t)(1+\alpha_3)^3\left(1+\frac{\alpha_4}{t}\right)^3 \end{aligned}$$

$t=1$ のとき，上の 2 式は 0 であるから

$$2\alpha_2-\alpha_2\alpha_3-3\alpha_3=0,\quad \alpha_2-\alpha_2\alpha_4-2\alpha_4=0$$

ゆえに

$$\frac{1+\alpha_2}{2\alpha_2}=\frac{1+\alpha_3}{3\alpha_3}=\frac{1+\alpha_4}{4\alpha_4}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_4(C_1(t)) &= \frac{1}{t^2}(t-1)(2\alpha_2 t+3\alpha_3)(1+\alpha_2 t)\left(1+\frac{\alpha_3}{t}\right)^2(1+\alpha_4)^4 \\ \frac{d}{dt}F_4(C_2(t)) &= \frac{2}{t^2}(t-1)(\alpha_2 t+2\alpha_4)(1+\alpha_2 t)(1+\alpha_3)^3\left(1+\frac{\alpha_4}{t}\right)^3 \end{aligned}$$

これから，P は F_4 の極小点 (最小点) である．

同様に，$F_n(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ について，$x_i>0$ $(i=2,3,\ldots,n)$ が

$$\frac{1+x_2}{2x_2}=\frac{1+x_3}{3x_3}=\cdots=\frac{1+x_n}{nx_n}$$

をみたすとき，$F_n(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ は最小となる．

3　$n = 5$ のとき

P を F_5 の極値点とする．$f_5\left(\dfrac{2}{3}\right) > 1$ より　　$\dfrac{1}{2} < \lambda < \dfrac{2}{3}$，$\dfrac{3}{2} < \mu < 2$

$$g_5(\mu) < g_5\left(\frac{3}{2}\right) = \prod_{k=2}^{5}\left(k - \frac{3}{2}\right)^k = \frac{3^3{\cdot}5^4{\cdot}7^5}{2^{14}}$$

$$F_5(\mathrm{P}) = \frac{2^2{\cdot}3^3{\cdot}4^4{\cdot}5^5}{g_5(\mu)} > \frac{2^2{\cdot}3^3{\cdot}4^4{\cdot}5^5}{g_5(\frac{3}{2})} = 5^5 \times \frac{2^{24}}{5^4{\cdot}7^5} > 5^5 \quad \left(\log_{10}\frac{2^{24}}{5^4{\cdot}7^5} = 0.2025\right)$$

P は F_5 の最小点であるから　　$F_5(x_2, x_3, x_4, x_5) \geq F_5(\mathrm{P}) > 5^5$

4　$n = 6$ のとき

P を F_6 の極値点とする．$f_6\left(\dfrac{3}{5}\right) > 1$ より　　$\dfrac{1}{2} < \lambda < \dfrac{3}{5}$，$\dfrac{5}{3} < \mu < 2$

$$g_6(\mu) < g_6\left(\frac{5}{3}\right) = \prod_{k=2}^{6}\left(k - \frac{5}{3}\right)^k = \frac{2^{11}{\cdot}5^5{\cdot}7^4{\cdot}13^6}{3^{20}}$$

$$F_6(\mathrm{P}) = \frac{2^2{\cdot}3^3{\cdot}4^4{\cdot}5^5{\cdot}6^6}{g_6(\mu)} > \frac{2^2{\cdot}3^3{\cdot}4^4{\cdot}5^5{\cdot}6^6}{g_6(\frac{5}{3})} = 6^6 \times \frac{3^{23}}{2{\cdot}7^4{\cdot}13^6} \quad \left(\log_{10}\frac{3^{23}}{2{\cdot}7^4{\cdot}13^6} = 0.6085\right)$$

P は F_6 の最小点であるから　　$F_6(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \geq F_6(\mathrm{P}) > 6^6$

5　$n = 7$ のとき

P を F_7 の極値点とする．$f_7\left(\dfrac{5}{9}\right) > 1$ より　　$\dfrac{1}{2} < \lambda < \dfrac{5}{9}$，$\dfrac{9}{5} < \mu < 2$

$$g_7(\mu) < g_7\left(\frac{9}{5}\right) = \prod_{k=2}^{7}\left(k - \frac{9}{5}\right)^k = \frac{2^{30}{\cdot}3^9{\cdot}7^6{\cdot}11^4{\cdot}13^7}{5^{27}}$$

$$\begin{aligned} F_7(\mathrm{P}) &= \frac{2^2{\cdot}3^3{\cdot}4^4{\cdot}5^5{\cdot}6^6{\cdot}7^7}{g_7(\mu)} \\ &> \frac{2^2{\cdot}3^3{\cdot}4^4{\cdot}5^5{\cdot}6^6{\cdot}7^7}{g_7(\frac{9}{5})} = 7^7 \times \frac{5^{32}}{2^{14}{\cdot}7^6{\cdot}11^4{\cdot}13^7} \quad \left(\log_{10}\frac{5^{32}}{2^{14}{\cdot}7^6{\cdot}11^4{\cdot}13^7} = 1.1205\right) \end{aligned}$$

P は F_7 の最小点であるから　　$F_6(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) \geq F_7(\mathrm{P}) > 7^7$

6 $n \geq 8$ のとき

これまでと同様に，P を F_n の極値点とすると

$\lambda_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2^{n-3}}{(n-2)!}$ とすると　　$\lambda_0 \leq \dfrac{49}{90}$　$(n \geq 8)$

$$\begin{aligned}
f_n(\lambda_0) = \prod_{k=2}^{n}(k\lambda_0 - 1) &= \prod_{k=2}^{n}\left\{\frac{k-2}{2} + \frac{k\cdot 2^{n-3}}{(n-2)!}\right\} \\
&= \frac{2^{n-2}}{(n-2)!}\prod_{k=3}^{n}\left\{\frac{k-2}{2} + \frac{k\cdot 2^{n-3}}{(n-2)!}\right\} \\
&> \frac{2^{n-2}}{(n-2)!}\prod_{k=3}^{n}\frac{k-2}{2} = 1
\end{aligned}$$

$\mu_0 = \dfrac{1}{\lambda_0}$ とすると　$\dfrac{1}{2} < \lambda < \lambda_0 \leq \dfrac{49}{90}$，$\dfrac{90}{49} \leq \mu_0 < \mu < 2$

$$2 - \mu_0 = \frac{2^{n-1}}{(n-2)! + 2^{n-2}}$$

$$\begin{aligned}
g_n(\mu) < g_n(\mu_0) &= \prod_{k=2}^{n}(k-\mu_0)^k = (2-\mu_0)^2\prod_{k=3}^{n}(k-\mu_0)^k \\
&= \left\{\frac{2^{n-1}}{(n-2)! + 2^{n-2}}\right\}^2 \times \prod_{k=3}^{n}(k-\mu_0)^k \\
&\leq \left\{\frac{2^{n-1}}{(n-2)! + 2^{n-2}}\right\}^2 \times \prod_{k=3}^{n}\left(k - \frac{90}{49}\right)^k \\
&= \left\{\frac{2^{n-1}}{(n-2)! + 2^{n-2}}\right\}^2 \times \prod_{k=2}^{n-1}\left(k - \frac{41}{49}\right)^{k+1} \\
&= \left\{\frac{2^{n-1}}{(n-2)! + 2^{n-2}}\right\}^2 \times \prod_{k=2}^{n-1}\left(\frac{49k-41}{49k}\right)^{k+1} \times \prod_{k=2}^{n-1}k^{k+1} \\
&\leq \left\{\frac{2^{n-1}}{(n-2)! + 2^{n-2}}\right\}^2 \times \prod_{k=2}^{7}\left(\frac{49k-41}{49k}\right)^{k+1} \times \prod_{k=2}^{n-1}k^{k+1} \\
&< \left\{\frac{2^{n-1}}{(n-2)! + 2^{n-2}}\right\}^2 \times \frac{1}{2^{10}} \times \prod_{k=2}^{n-1}k^{k+1} \\
&< \frac{4^{n-6}}{\{(n-2)!\}^2} \times \prod_{k=2}^{n-1}k^{k+1}
\end{aligned}$$

したがって

$$
\begin{aligned}
F_n(\mathrm{P}) &= \frac{n^n}{g_n(\mu)} \prod_{k=2}^{n-1} k^k \\
&> n^n \times \frac{\{(n-2)!\}^2}{4^{n-6}} \times \prod_{k=2}^{n-1} \frac{k^k}{k^{k+1}} \\
&= n^n \times \frac{\{(n-2)!\}^2}{4^{n-6}} \times \frac{1}{(n-1)!} \\
&= n^n \times \frac{(n-2)!}{(n-1)\cdot 4^{n-6}}
\end{aligned}
$$

数列 $\{T_n\}$ を

$$T_n = \frac{(n-2)!}{(n-1)\cdot 4^{n-6}} \quad (n \geq 8)$$

とおくと，$T_8 = \dfrac{45}{7}$

$$\frac{T_{n+1}}{T_n} = \frac{(n-1)!}{n\cdot 4^{n-5}} \div \frac{(n-2)!}{(n-1)\cdot 4^{n-6}} = \frac{(n-1)^2}{4n} = \frac{n-2}{4} + \frac{1}{4n} > 1 \quad (n \geq 8)$$

ゆえに $\qquad T_n \geq \dfrac{45}{7} \quad (n \geq 8)$

$F_n(\mathrm{P}) > n^n \times T_n$ であるから $\qquad F_n(\mathrm{P}) > n^n$

P は最小点であるから $\qquad F_n(x_2, x_3, \ldots, x_n) \geq F(\mathrm{P}) > n^n$

以上のことから，問題の不等式は成立する．

7　初等的な解法

相加平均と相乗平均の関係式

$a_k > 0,\ p_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, n)$，$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ に対して

$$p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n \geqq {a_1}^{p_1} {a_2}^{p_2} \cdots {a_n}^{p_n}$$

が成り立つ (等号が成り立つのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$ のとき).
証明 http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2002.pdf の P9 を参照.

$x_k > 0\ (k = 1, 2, \ldots, n)$ について，上の関係式を用いると

$$\frac{x_k + x_{k+1}}{k+1} = \frac{k}{k+1}\left(\frac{x_k}{k}\right) + \frac{1}{k+1}x_{k+1} \geqq \left(\frac{x_k}{k}\right)^{\frac{k}{k+1}} {x_{k+1}}^{\frac{1}{k+1}} \tag{7.1}$$

ゆえに　$$(x_k + x_{k+1})^{k+1} \geqq \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}{x_k}^k x_{k+1}$$

$$\prod_{k=1}^{n-1}(x_k + x_{k+1})^{k+1} \geqq \prod_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}{x_k}^k x_{k+1} = \frac{x_n}{x_1}\cdot n^n \prod_{k=1}^{n-1}{x_k}^{k+1}$$

したがって

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{x_{k+1}}{x_k}\right)^{k+1} \geqq \frac{x_n}{x_1}\cdot n^n \tag{7.2}$$

(7.2) において，等号が成り立つのは，(7.1) より

$$\frac{x_k}{k} = x_{k+1} \quad \text{すなわち} \quad x_k = \frac{x_1}{(k-1)!} \quad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{7.3}$$

$a_{k+1} = \dfrac{x_{k+1}}{x_k}$ とおくと

$$a_k > 0\ (k = 2, 3, \ldots, n), \qquad a_2 a_3 \cdots a_n = \frac{x_n}{x_1} \tag{7.4}$$

(7.2) より

$$\prod_{k=2}^{n}(1 + a_k)^k \geqq \frac{x_n}{x_1}\cdot n^n \tag{7.5}$$

$x_n = x_1$ とすると，$n \geqq 3$ のとき (7.3) により，(7.5) の等号は成立しない.
このとき，(7.4)，(7.5) より

$$a_2 a_3 \cdots a_n = 1 \text{ のとき} \qquad \prod_{k=2}^{n}(1 + a_k)^k > n^n$$