令和７年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B・C

問題 1 2 3 4 5 6

1 座標平面上の点 A$(0,\ 0)$，B$(0,\ 1)$，C$(1,\ 1)$，D$(1,\ 0)$ を考える．実数 $0 < t < 1$ に対して，線分 AB，BC，CD を $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t，R_t とし，線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$，$\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ S_t，T_t とする．さらに，線分 $\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点を U_t とする．また，点 A を U_0，点 D を U_1 とする．

(1) 点 U_t の座標を求めよ．

(2) t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と，線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ．

(3) a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする．t が $0 \leqq t \leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを，a の多項式の形で求めよ．

2 (1) $x > 0$ のとき，不等式 $\log x \leqq x - 1$ を示せ．

(2) 次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^2 \log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right) dx$$

3 平行四辺形 ABCD において，$\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$，$\mathrm{AB} = a$，$\mathrm{BC} = b$，$a \leqq b$ とする．次の条件を満たす長方形 EFGH を考え，その面積を S とする．

条件： 点 A，B，C，D はそれぞれ辺 EF，FG，GH，HE 上にある．

ただし，辺はその両端の点を含むものとする．

(1) $\angle\mathrm{BCG} = \theta$ とするとき，S を a，b，θ を用いて表せ．

(2) S のとりうる値の最大値を a, b を用いて表せ．

4 この問いでは，0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ．a を正の整数とし，$f_a(x) = x^2 + x - a$ とおく．

(1) n を正の整数とする．$f_a(n)$ が平方数ならば，$n \leqq a$ であることを示せ．

(2) $f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく．次の条件 (i)，(ii) が同値であることを示せ．

(i) $N_a = 1$ である．

(ii) $4a + 1$ は素数である．

5 n を 2 以上の整数とする．1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり，横一列におかれている．1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して，次の操作 (T_i) を考える．

(T_i) 左から i 番目の札の数字が，左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ，これら 2 枚の札の位置を入れかえる．そうでなければ，札の位置をかえない．

最初の状態において札の数字は左から，A_1，$A_2, \ldots,$ A_n であったとする．この状態から $(n-1)$ 回の操作 (T_1)，$(\mathrm{T}_2), \ldots, (\mathrm{T}_{n-1})$ を順に行った後，続けて $(n-1)$ 回の操作 $(\mathrm{T}_{n-1}), \ldots, (\mathrm{T}_2)$，$(\mathrm{T}_1)$ を順に行ったところ，札の数字は左から 1，$2, \ldots,$ n と小さい順に並んだ．以下の問いに答えよ．

(1) A_1 と A_2 の少なくとも一方は 2 以下であることを示せ．

(2) 最初の状態としてありうる札の数字の並び方 A_1，A_2，$\ldots$，A_n の総数を c_n とする．n が 4 以上の整数であるとき，c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ．

6 複素数平面上の点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする．

(1) 曲線 C 上の複素数 z に対し，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ．

(2) α，β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき，$\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる値の範囲を複素数平面上に図示せよ．

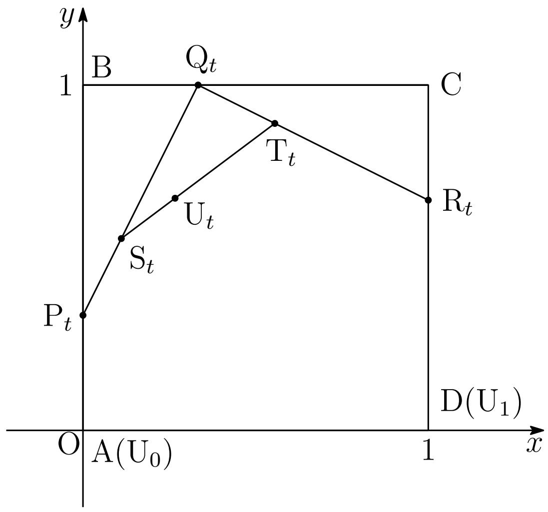
(3) γ を (2) で求めた範囲に属さない複素数とするとき，$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 条件から　$\mathrm{P}_t(0,\ t)$, $\mathrm{Q}_t(t,\ 1)$, $\mathrm{R}_t(1,\ 1-t)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OS}_t} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}_t}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}\\ &= (1-t)(0,\ t)+t(t,\ 1)=(t^2,\ 2t-t^2),\\ \overrightarrow{\mathrm{OT}_t} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OQ}_t}+t\overrightarrow{\mathrm{OR}_t}\\ &= (1-t)(t,\ 1)+t(1,\ 1-t)=(2t-t^2,\ 1-t^2),\\ \overrightarrow{\mathrm{OU}_t} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OS}_t}+t\overrightarrow{\mathrm{OT}_t}\\ &= (1-t)(t^2,\ 2t-t^2)+t(2t-t^2,\ 1-t^2)=(3t^2-2t^3,\ 3t-3t^2)\end{aligned}$$

よって　$\mathbf{U}_t\boldsymbol{(3t^2-2t^3,\ 3t-3t^2)}$



(2) (1) の結果から，点 U_t が描く曲線を媒介変数すると

$$x=3t^2-2t^3,\quad y=3t(1-t)\quad (0\leqq t\leqq 1)$$

このとき　$\dfrac{dx}{dt}=6t(1-t)$

x	$0\longrightarrow 1$
t	$0\longrightarrow 1$

求める面積を S とすると [1]

$$\begin{aligned}\int_0^1 y\,dx &= \int_0^1 3t(1-t)\cdot 6t(1-t)\,dt = 18\int_0^1 t^2(1-t)^2\,dt\\ &= 18\cdot\frac{2!2!}{5!}(1-0)^5=\boldsymbol{\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

補足 $\displaystyle\int_\alpha^\beta \boldsymbol{(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf (p.5 を参照)

(3) $\dfrac{dx}{dt} = 6t - 6t^2$, $\dfrac{dy}{dt} = 3 - 6t$ より，求める曲線の長さを s とすると

$$\begin{aligned} s &= \int_0^a \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^a \sqrt{(6t - 6t^2)^2 + (3 - 6t)^2}\, dt \\ &= 3\int_0^a \sqrt{(2t^2 - 2t)^2 + (2t - 1)^2}\, dt \\ &= 3\int_0^a \sqrt{(2t^2 - 2t)^2 + 2(2t^2 - 2t) + 1} \\ &= 3\int_0^a |2t^2 - 2t + 1|\, dt \end{aligned}$$

$2t^2 - 2t + 1 = 2\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2} > 0$ であるから

$$\begin{aligned} s &= 3\int_0^a (2t^2 - 2t + 1)\, dt \\ &= 3\Big[\, \frac{2}{3}t^3 - t^2 + t \,\Big]_0^a \\ &= \boldsymbol{2a^3 - 3a^2 + 3a} \end{aligned}$$

■

2 (1) $f(x)=x-1-\log x$ とすると　$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

$x>0$ のとき，$f(x)\geqq 0$ であるから

$$x-1-\log x\geqq 0 \quad \text{すなわち} \quad \log x\leqq x-1$$

(2) (1) の結果から

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\leqq\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}-1=\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{n}}-1) \qquad \text{(A)}$$

$x>0$ より，$x^{\frac{1}{n}}>0$ であるから，相加平均・相乗平均の大小関係により

$$\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\geqq\log\sqrt{1\cdot x^{\frac{1}{n}}}=\log x^{\frac{1}{2n}} \qquad \text{(B)}$$

(A)，(B) より

$$\log x^{\frac{1}{2n}}\leqq\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\leqq\frac{1}{2}(x^{\frac{1}{n}}-1)$$

$$\frac{1}{2}\log x\leqq n\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)\leqq\frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}}-1)$$

$$\frac{1}{2}\int_1^2\log x\,dx\leqq n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx\leqq\frac{n}{2}\int_1^2(x^{\frac{1}{n}}-1)\,dx \qquad (*)$$

ここで　$\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^2\log x=\frac{1}{2}\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^2=\log 2-\frac{1}{2}$ 　　(C)

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\int_1^2(x^{\frac{1}{n}}-1)\,dx&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left[\,\frac{x^{\frac{1}{n}+1}}{\frac{1}{n}+1}-x\,\right]_1^2\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left\{\frac{1}{\frac{1}{n}+1}(2^{\frac{1}{n}+1}-1)-1\right\}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left(2^{\frac{1}{n}+1}-2-\frac{1}{n}\right)\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{n}+1}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}-\frac{1}{2}\right)=\log 2-\frac{1}{2} \qquad \text{(D)}
\end{aligned}$$

$(*)$，(C)，(D) から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx=\boldsymbol{\log 2-\frac{1}{2}}$$

補足 $f(x)=2^x$ とすると　$f'(x)=2^x\log 2$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{h\to+0}\frac{2^h-2^0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=\log 2$$

別解 $x^{\frac{1}{n}}=t$ とすると　$x=t^n$，$\dfrac{dx}{dt}=nt^{n-1}$

x	$1\longrightarrow 2$
t	$1\longrightarrow 2^{\frac{1}{n}}$

$$\begin{aligned}n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx&=n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}\log\frac{1+t}{2}\cdot nt^{n-1}\,dt=n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}(t^n)'\log\frac{1+t}{2}\,dt\\&=n\Big[\,t^n\log\frac{1+t}{2}\,\Big]_1^{2^{\frac{1}{n}}}-n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}t^n\cdot\frac{1}{1+t}\,dt\\&=2n\log\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}-n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}\frac{t^n}{1+t}\,dt\end{aligned}\tag{X}$$

ここで，$g(x)=\log\dfrac{1+2^x}{2}$ とすると　$g'(x)=\dfrac{2^x\log 2}{1+2^x}$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}2n\log\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}&=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{\log\frac{1+2^{\frac{1}{n}}}{2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{h\to+0}2\cdot\frac{g(h)-g(0)}{h}\\&=2g'(0)=2\cdot\frac{\log 2}{2}=\log 2\end{aligned}\tag{Y}$$

また，$\displaystyle\frac{1}{2}\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}nt^n\,dt<n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}\frac{t^n}{1+t}\,dt<\frac{1}{1+2^{\frac{1}{n}}}\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}nt^n\,dt$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2},\quad \lim_{n\to\infty}\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}nt^n\,dt=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\Big[\,t^{n+1}\,\Big]_1^{2^{\frac{1}{n}}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}(2\cdot 2^{\frac{1}{n}}-1)=1$$

上の結果から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}n\int_1^{2^{\frac{1}{n}}}\frac{t^n}{1+t}\,dt=\frac{1}{2}\tag{Z}$$

さらに，(X)，(Y)，(Z) から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}n\int_1^2\log\left(\frac{1+x^{\frac{1}{n}}}{2}\right)dx=\mathbf{\log 2-\frac{1}{2}}$$

■

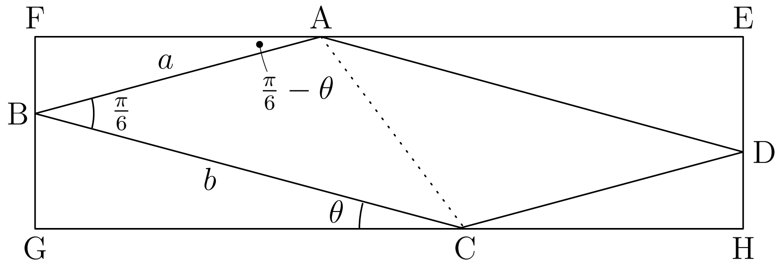
3 (1) $\angle\mathrm{BCG}+\angle\mathrm{BAF}=\angle\mathrm{ABC}$ であるから

$$\theta+\angle\mathrm{BAF}=\frac{\pi}{6} \quad \text{ゆえに} \quad \angle\mathrm{BAF}=\frac{\pi}{6}-\theta \quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{6}\right)$$

$\dfrac{S}{2}=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ABF}+\triangle\mathrm{CBG}$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}a\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)\cdot a\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)+\frac{1}{2}b\sin\theta\cdot b\cos\theta\\&=\frac{1}{4}ab+\frac{1}{4}a^2\sin\left(\frac{\pi}{3}-2\theta\right)+\frac{1}{4}b^2\sin 2\theta\\&=\frac{1}{4}ab+\frac{1}{4}a^2\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos 2\theta-\cos\frac{\pi}{3}\sin 2\theta\right)+\frac{1}{4}b^2\sin 2\theta\\&=\frac{1}{4}ab+\frac{\sqrt{3}a^2}{8}\cos 2\theta+\frac{2b^2-a^2}{8}\sin 2\theta\end{aligned}$$

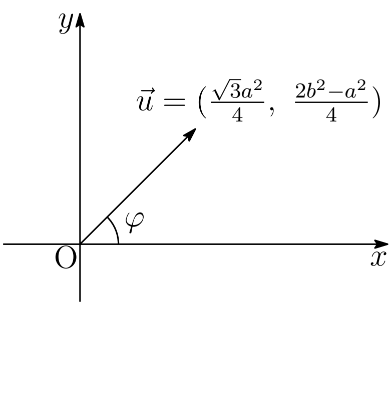
よって $\quad \boldsymbol{S=\dfrac{ab}{2}+\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4}\cos 2\theta+\dfrac{2b^2-a^2}{4}\sin 2\theta}$

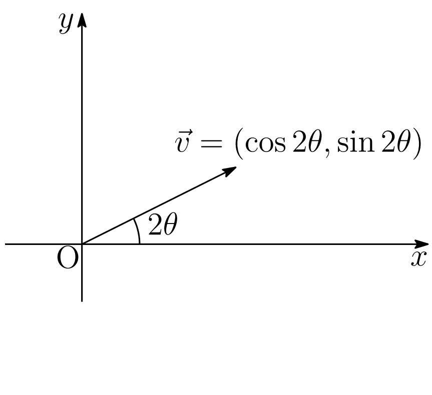


(2) $\vec{u}=\left(\dfrac{\sqrt{3}a^2}{4},\ \dfrac{2b^2-a^2}{4}\right)$，$\vec{v}=(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ とし $(a \leqq b)$，$\vec{u}$ の偏角を φ とすると $\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\tan\varphi=\frac{2b^2-a^2}{\sqrt{3}a^2},$$

$$S=\frac{ab}{2}+\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{ab}{2}+\frac{\sqrt{a^4-a^2b^2+b^4}}{2}\cos(2\theta-\varphi) \qquad (*)$$





$0 \leqq 2\theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ に注意して，次の場合分けを行う．

(i) $0 < \tan\varphi = \dfrac{2b^2 - a^2}{\sqrt{3}a^2} \leqq \sqrt{3}$，すなわち，$a \leqq b \leqq \sqrt{2}a$ のとき

(∗) より，$2\theta = \varphi$ のとき，最大値 $\dfrac{ab}{2} + \dfrac{\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{2}$ をとる．

(ii) $\sqrt{3} < \tan\varphi = \dfrac{2b^2 - a^2}{\sqrt{3}a^2}$，すなわち，$\sqrt{2}a < b$ のとき

(∗) より，$2\theta = \dfrac{\pi}{3}$ のとき，最大値は

$$\begin{aligned}\frac{ab}{2} + \vec{u}\cdot\vec{v} &= \frac{ab}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}a^2}{4},\ \frac{2b^2 - a^2}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{ab}{2} + \frac{\sqrt{3}b^2}{4}\end{aligned}$$

(i)，(ii) より

$$\boldsymbol{a \leqq b \leqq 2\sqrt{a}}\text{のとき，}\quad \text{最大値}\boldsymbol{\frac{ab}{2} + \frac{\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}{2}}$$

$$\boldsymbol{\sqrt{2}a < b}\text{ のとき，}\qquad \text{最大値}\boldsymbol{\frac{ab}{2} + \frac{\sqrt{3}b^2}{4}}$$

■

$\boxed{4}$ (1) $n-a>0$ のとき，$n^2+n-a>n^2$ より，$f_a(n)$ が平方数と仮定すると

$$f_a(n)=n^2+n-a \geqq (n+1)^2 \quad \text{ゆえに} \quad a \leqq -n-1$$

これは，a が正の整数であることに反する．

したがって，$f_a(n)$ が平方数ならば，$n-a \leqq 0$，すなわち，$n \leqq a$

(2) $f_a(n)$ が平方数 k^2 であるとき (k は 0 以上の正の整数)

$$n^2+n-a=k^2 \quad \text{ゆえに} \quad (2n+2k+1)(2n-2k+1)=4a+1$$

$4a+1 \equiv 1 \pmod 4$ であるから

$$2n+2k+1 \equiv 2n-2k+1 \equiv \pm 1 \pmod 4$$

このとき，$4a+1$ が合成数

$$4a+1=(4p \pm 1)(4q \pm 1) \quad (p,\ q \text{ は整数},\ p \geqq q>1)$$

であると仮定すると (複号同順)

$$\begin{cases} 2n+2k+1=4p \pm 1 \\ 2n-2k+1=4q \pm 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2n+2k+1=(4p \pm 1)(4q \pm 1) \\ 2n-2k+1=1 \end{cases}$$

について，それぞれ

$$\begin{cases} n=p+q \pm \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ k=p-q \end{cases}, \quad \begin{cases} n=4pq \pm (p+q) \\ k=4pq \pm (p+q) \end{cases}$$

であるから，$N_a>1$ となり，$N_a=1$ に反する．

したがって，$N_a=1$ ならば，$4a+1$ は素数である．

また，$4a+1$ が素数であるとき

$$\begin{cases} 2n+2k+1=4a+1 \\ 2n-2k+1=1 \end{cases} \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} n=a \\ k=a \end{cases}$$

したがって，$4a+1$ が素数ならば，$N_a=1$ である．

よって，(i)，(ii) は同値である． ■

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $M(x,y)=\max(x,y)$，$m(x,y)=\min(x,y)$ とする．
最初の操作 (T_1) 直後の並びは

$$m(A_1,A_2),\ M(A_1,A_2),\ A_3,\ \cdots,\ A_n$$

最後の操作 (T_1) 直前の並びを

$$m(A_1,A_2),\ X,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n$$

とすると $(X\in\{1,\ 2\})$，最後の操作 (T_1) 後の並びは

$$m(m(A_1,A_2),X),\ M(m(A_1,A_2),X),\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n$$

となるから

$$m(m(A_1,A_2),X)=1,\quad M(m(A_1,A_2),X)=2$$

$A_1>2,\ A_2>2$ と仮定すると，$m(A_1,A_2)>2$ となり，上の第 2 式を満たさない．したがって，A_1 と A_2 の少なくとも一方は 2 以下である

(2) (1) で示した操作 (T_1) 直後の $n-1$ 個の並び

$$(*)\quad M(A_1,A_2),\ A_3,\ \cdots,\ A_n$$

について，次の (i)〜(iv) の場合に分けて考える．

(i) $A_1=1$ のとき，$(*)$ が規定の操作の繰り返しにより，
$2,\ 3,\ \cdots,\ n$ となる c_{n-1} 通り．

(ii) $A_2=1$ のとき，$(*)$ が規定の操作の繰り返しにより，
$2,\ 3,\ \cdots,\ n$ となる c_{n-1} 通り．

(iii) $A_1=2,\ A_2\neq 1$ のとき，(ii) の場合から $A_1=2,\ A_2=1$ の場合を除く，すなわち，$n-2$ 個の並び $A_3,\ A_4,\ \cdots,\ A_n$ の場合の数を引いた

$$c_{n-1}-c_{n-2}\ (\text{通り})$$

(iv) $A_2=2,\ A_1\neq 1$ のとき，(i) の場合から $A_1=1,\ A_2=2$ の場合を除く，すなわち，$n-2$ 個の並び $A_3,\ A_4,\ \cdots,\ A_n$ の場合の数を引いた

$$c_{n-1}-c_{n-2}\ (\text{通り})$$

(i)〜(iv) より $\quad c_n=2c_{n-1}+2(c_{n-1}-c_{n-2})=\boldsymbol{4c_{n-1}-2c_{n-2}}$ ■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) C 上の複素数 z は

$$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{2} \qquad (-\pi < \theta < \pi)$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{1}{z} &= \frac{2}{1+\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{2(1+\cos\theta - i\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = \frac{2(1+\cos\theta - i\sin\theta)}{2(1+\cos\theta)} \\ &= 1 - \frac{i\sin\theta}{1+\cos\theta} = 1 - \frac{2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 1 - i\tan\frac{\theta}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

よって，$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 である．

(2) (1) の結果から，実数 s，t を用いて

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + si, \quad \frac{1}{\beta} = 1 + ti \qquad (s \neq t)$$

とおくと

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} &= (1+si)^2 + (1+ti)^2 \\ &= 2 - (s^2+t^2) + 2(s+t)i\end{aligned}$$

$\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = x + yi$ とすると　$x = 2 - (s^2+t^2)$，　$y = 2(s+t)$

$$s^2 + t^2 = 2 - x, \quad s + t = \frac{y}{2} \tag{$*$}$$

実数 s，t $(s \neq t)$ を解とする 2 次方程式

$$\lambda^2 - (s+t)\lambda + st = 0$$

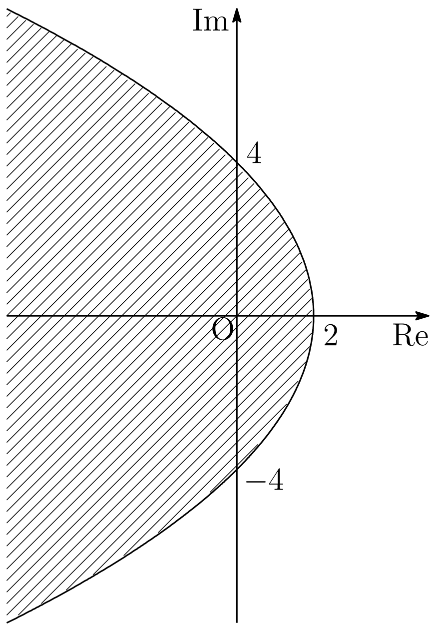
の係数について，$D = (s+t)^2 - 4st > 0$ であるから

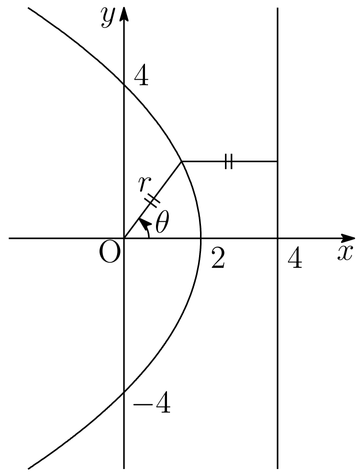
$$2(s^2+t^2) - (s+t)^2 > 0$$

$(*)$ を上式に代入すると

$$2(2-x) - \left(\frac{y}{2}\right)^2 > 0 \quad \text{ゆえに} \quad x < -\frac{y^2}{8} + 2$$

求める領域は，左下の図の斜線部分で境界線を含まない．





(3) 放物線 $y^2=-8(x-2)$ の焦点 $(0,\ 0)$，準線 $x=4$ により，
O を極とする極方程式は，右上の図より

$$r+r\cos\theta=4 \quad \text{すなわち} \quad r=\frac{4}{1+\cos\theta} \qquad (-\pi<\theta<\pi)$$

(2) に属さない複素数 γ は　$\gamma=k(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(k \geqq r>0)$

$$(**) \quad \frac{1}{\gamma}=\frac{1}{k}(\cos\theta-i\sin\theta) \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right)=\frac{1}{k}\cos\theta$$

(i) $\cos\theta \geqq 0$ のとき　$0 \leqq \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\gamma}\right) \leqq \dfrac{1}{r}\cos\theta=\dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)\cos\theta \leqq \dfrac{1}{2}$

(ii) $\cos\theta<0$ のとき　$\dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)\cos\theta=\dfrac{1}{r}\cos\theta \leqq \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\gamma}\right)<0$

$$\frac{1}{4}(1+\cos\theta)\cos\theta=\frac{1}{4}\left(\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{16} \text{ より} \quad -\frac{1}{16} \leqq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{\gamma}\right)<0$$

(i)，(ii) より　　$k=r$，$\theta=0$ のとき **最大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$，

$k=r$，$\theta=\pm\dfrac{2}{3}\pi$ のとき **最小値** $\boldsymbol{-\dfrac{1}{16}}$

補足 (3) の $(**)$ より $\quad \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{r}{k} \cdot \dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)$

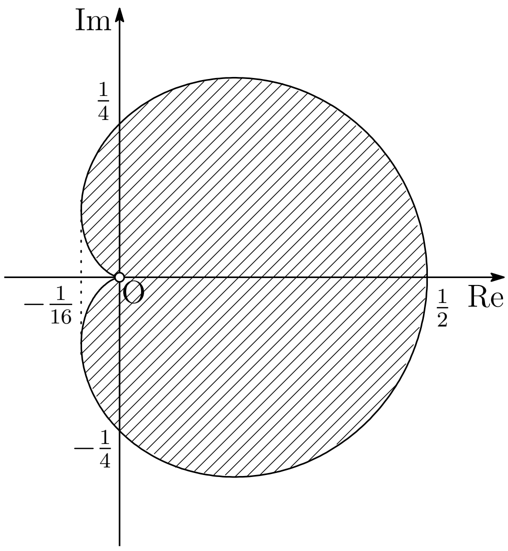
$r(\theta) = \dfrac{1}{4}(1+\cos\theta)$，$\lambda = \dfrac{r}{k}$ とおくと

$$\frac{1}{\gamma} = \lambda r(\theta)(\cos\theta - i\sin\theta) \qquad (-\pi < \theta < \pi,\ 0 < \lambda \leqq 1)$$

$r(-\theta) = r(\theta)$ であるから，$\dfrac{1}{\gamma}$ を，次のように表記できる．

$$\frac{1}{\gamma} = \lambda r(\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad (-\pi < \theta < \pi,\ 0 < \lambda \leqq 1)$$

極方程式 $r(\theta)$ の表す図形はカージオイド (cardioid) であり，λ の値の範囲から，$\dfrac{1}{\gamma}$ はカージオイドとその内部を表す．ただし，原点 O を除く．



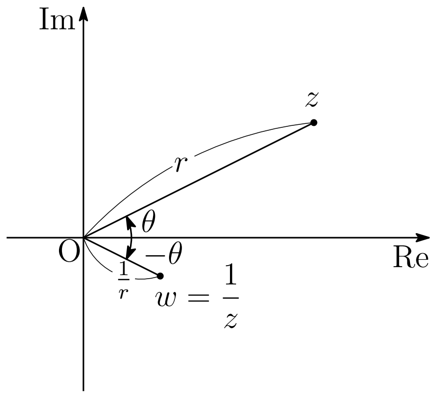
■

反転

複素数平面上の点 z を $w=\dfrac{1}{z}$ に移す変換を**反転**という．
$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のとき

$$w=\frac{1}{z}=\frac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$$

となり，下の図のような位置関係になる．

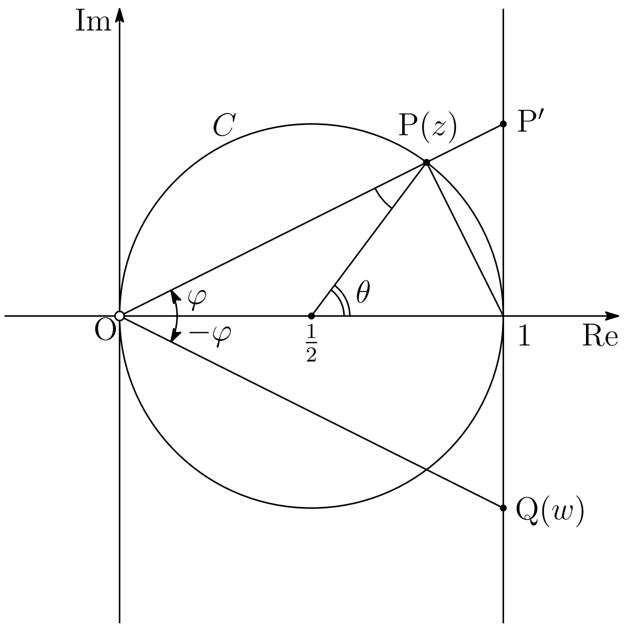


下の図において

$$\mathrm{OP}=\cos\varphi,\quad \mathrm{OP}'=\frac{1}{\cos\varphi},\quad \varphi=\frac{\theta}{2}$$

したがって，C 上の点 $\mathrm{P}(z)$ を反転させた像 $\mathrm{Q}(w)$ は [2]

$$w=\frac{1}{z}=1+i\tan(-\varphi)=1+i\tan\left(-\frac{\theta}{2}\right)$$



[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2017.pdf $\boxed{3}$

一般に，中心 $\alpha \neq 0$，半径 r の円 $|z-\alpha| = r$ を反転すると

$$\left|\frac{1}{w} - \alpha\right| = r \quad \text{ゆえに} \quad |1-\alpha w| = r|w|$$

上の第 2 式から

$$\begin{aligned} (1-\alpha w)(1-\overline{\alpha}\,\overline{w}) &= r^2|w|^2 \\ (|\alpha|^2 - r^2)|w|^2 - (\alpha w + \overline{\alpha}\,\overline{w}) + 1 &= 0 \end{aligned} \qquad (*)$$

(i) $|\alpha|^2 - r^2 \neq 0$ のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned} |w|^2 - \frac{\alpha w + \overline{\alpha}\,\overline{w}}{|\alpha|^2 - r^2} &= -\frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} \\ |w|^2 - \frac{\alpha w + \overline{\alpha}\,\overline{w}}{|\alpha|^2 - r^2} + \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2} &= -\frac{1}{|\alpha|^2 - r^2} + \frac{|\alpha|^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2} \\ \left(w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right)\left(\overline{w} - \frac{\alpha}{|\alpha|^2 - r^2}\right) &= \frac{r^2}{(|\alpha|^2 - r^2)^2} \\ \left|w - \frac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}\right| &= \frac{r}{||\alpha|^2 - r^2|} \end{aligned}$$

(ii) $|\alpha|^2 - r^2 = 0$ のとき，$(*)$ より　$\alpha w + \overline{\alpha}\,\overline{w} = 1$

$$\frac{w}{\overline{\alpha}} + \frac{\overline{w}}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|^2} \quad \text{ゆえに} \quad \left|w - \frac{1}{\alpha}\right|^2 = |w|^2$$

したがって，w は原点 O と $\dfrac{1}{\alpha}$ を結ぶ線分の垂直二等分線である．

反転公式

中心 $\alpha(\neq 0)$，半径 r の円を反転した像は

(i) $|\alpha| \neq r$ のとき，中心 $\dfrac{\overline{\alpha}}{|\alpha|^2 - r^2}$，半径 $\dfrac{r}{||\alpha|^2 - r^2|}$ の円

(ii) $|\alpha| = r$ のとき，原点 O と点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を結ぶ線分の垂直二等分線

上の (ii) から，次が成立する．

> 原点 O と点 α を結ぶ線分の垂直二等分線上の点を反転した像は，点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を中心とする半径 $\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|$ の円 (ただし，原点を除く)