令和６年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5 6

1 座標空間内の点 $\mathrm{A}(0, -1,\ 1)$ をとる．xy 平面上の点 P が次の条件 (i)，(ii)，(iii) をすべて満たすとする．

(i) P は原点 O と異なる．

(ii) $\angle \mathrm{AOP} \geqq \dfrac{2}{3}\pi$

(iii) $\angle \mathrm{OAP} \leqq \dfrac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ．

2 次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = \int_0^1 \frac{|t - x|}{1 + t^2}\,dt \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(1) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$ をみたす実数 α で，$f'(\tan\alpha) = 0$ となるものを求めよ．

(2) (1) で求めた α に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ．必要ならば，$0.69 < \log 2 < 0.7$ であることを用いてよい．

3 座標平面上を次の規則 (i)，(ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える．

(i) 最初に，P は点 $(2,\ 1)$ にいる．

(ii) ある時点で P が点 $(a,\ b)$ にいるとき，その 1 秒後には P は

- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で x 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{3}$ で y 軸に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y = x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点
- 確率 $\dfrac{1}{6}$ で直線 $y = -x$ に関して $(a,\ b)$ と対称な点

にいる．

以下の問いに答えよ．ただし，(1) については，結論のみを書けばよい．

(1) P がとりうる点の座標をすべて求めよ．

(2) n を正の整数とする．最初から n 秒後に P が点 $(2,\ 1)$ にいる確率と，最初から n 秒後に P が点 $(-2, -1)$ にいる確率は等しいことを示せ．

(3) n を正の整数とする．最初から n 秒後に P が点 $(2,\ 1)$ にいる確率を求めよ．

4 $f(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + 4\sqrt{2}$ とおく．$0 < t < 4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t,\ f(t))$ を通り，この点において放物線 $y = f(x)$ と共通の接線を持ち，x 軸上に中心をもつ円を C_t とする．

(1) 円 C_t の中心の座標を $(c(t),\ 0)$，半径を $r(t)$ とおく．$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ．

(2) 実数 a は $0 < a < f(3)$ を満たすとする．円 C_t が点 $(3,\ a)$ を通るような実数 t は $0 < t < 4$ の範囲にいくつあるか．

5 座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ をとり，D を線分 AC の中点とする．三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ．

6 2 以上の整数で，1 とそれ自身以外に正の約数をもたない数を素数という．以下の問いに答えよ．

(1) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 20x$ とする．$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ．

(2) a，b を整数の定数とし，$g(x) = x^3 + ax^2 + bx$ とする．$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ．

解答例

$\boxed{1}$ P$(x,\ y,\ 0)$ とおく．条件 (i) より　$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AO}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \begin{pmatrix} x \\ y+1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

条件 (ii) から

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|} = \cos\angle\mathrm{AOP} \leqq \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2},$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|} = \cos\angle\mathrm{OAP} \geqq \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって

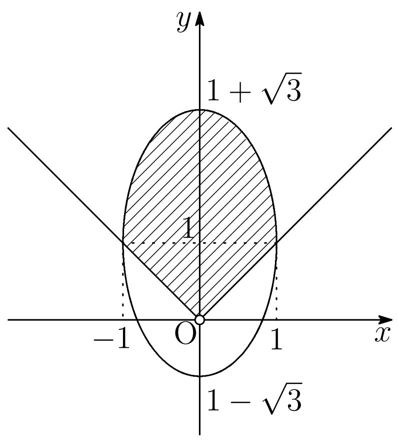
$$\frac{-y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \leqq -\frac{1}{2},\quad \frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}} \geqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

上式から，$y \geqq 0$ に注意して，整理すると

$$y \geqq |x|,\quad x^2 + \frac{(y-1)^2}{3} \leqq 1$$

条件 (i) より　$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$

P の取り得る範囲は，下の図の斜線部分で境界線を含む．ただし，O は除く．



別解 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおく．直交変換

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=X\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{Y}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{Z}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$$

を行うと

$$x=X,\quad y=\frac{Y-Z}{\sqrt{2}},\quad z=\frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$$

これから

$$X=x,\quad Y=\frac{y+z}{\sqrt{2}},\quad Z=\frac{-y+z}{\sqrt{2}} \tag{$*$}$$

A の XYZ-系における点を A$'$ とすると　$\mathrm{A}'(0,\ 0,\ \sqrt{2})$
$\mathrm{P}'(X,\ Y,\ Z)$ とすると，条件 (ii) より

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}'}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}'}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}'}||\overrightarrow{\mathrm{OP}'}|}=\cos\angle\mathrm{A}'\mathrm{OP}'\leqq\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2},$$
$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{O}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{P}'}}{|\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{O}}||\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{P}'}|}=\cos\angle\mathrm{OA}'\mathrm{P}'\geqq\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}'}=(0,\ 0,\ \sqrt{2})$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}'}=(X,\ Y,\ Z)$，$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{O}}=(0,\ 0,-\sqrt{2})$，
$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{P}'}=(X,\ Y,\ Z-\sqrt{2})$ であるから

$$\frac{\sqrt{2}Z}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}\leqq-\frac{1}{2},\quad \frac{-\sqrt{2}(Z-\sqrt{2})}{\sqrt{2}\sqrt{X^2+Y^2+(Z-\sqrt{2})^2}}\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$Z\leqq 0$ に注意して

$$\frac{Z^2}{X^2+Y^2+Z^2}\geqq\frac{1}{4},\quad \frac{(Z-\sqrt{2})^2}{X^2+Y^2+(Z-\sqrt{2})^2}\geqq\frac{3}{4}$$

整理すると

$$X^2+Y^2-3Z^2\leqq 0,\quad 3X^2+3Y^2-(Z-\sqrt{2})^2\leqq 0 \tag{$**$}$$

$(*)$ に $z=0$ を代入すると　$X=x,\ Y=\dfrac{y}{\sqrt{2}},\ Z=-\dfrac{y}{\sqrt{2}}$

これらを $(**)$ に代入すると

$$x^2+\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2-3\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2 \leqq 0,\quad 3x^2+3\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(-\frac{y}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\right)^2 \leqq 0$$

整理すると

$$x^2-y^2 \leqq 0,\quad x^2+\frac{(y-1)^2}{3} \leqq 1$$

$Z \leqq 0$ より，$y \geqq 0$ であるから，上の第 1 式は

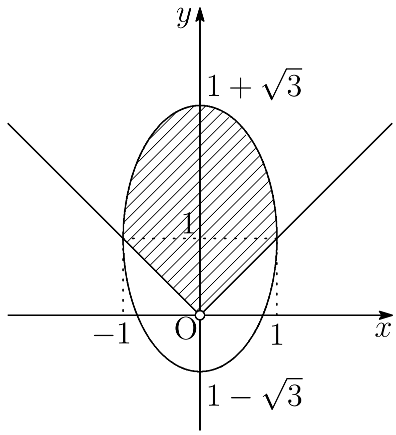
$$|x|^2 \leqq |y|^2 \quad \text{ゆえに} \quad y \geqq |x|$$

したがって，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の満たす不等式は

$$(x,\ y) \neq (0,\ 0),\quad y \geqq |x|,\quad x^2+\frac{(y-1)^2}{3} \leqq 1$$

条件 (i) より　$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$

P の取り得る範囲は，下の図の斜線部分で境界線を含む．ただし，O は除く．



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $x=\tan\theta$ とすると $(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4})$

$$f(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}\,dt=\int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}\,dt+\int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}\,dt$$
$$=x\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,dt+\int_x^1 \frac{t}{1+t^2}\,dt-x\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \qquad (*)$$

これを微分すると

$$f'(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt-\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$t=\tan\varphi$ とすると $\quad \dfrac{dt}{d\varphi}=\dfrac{1}{\cos^2\varphi}$

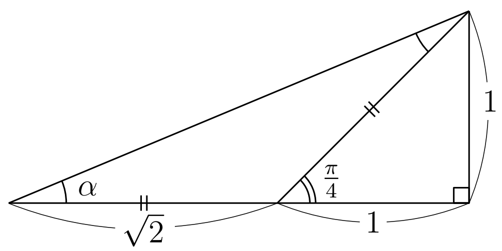
$$f'(\tan\theta)=\int_0^\theta \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}-\int_\theta^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi}$$
$$=\int_0^\theta d\varphi-\int_\theta^{\frac{\pi}{4}} d\varphi=2\theta-\frac{\pi}{4}$$

$f'(\tan\alpha)=0$ とすると

$$2\alpha-\frac{\pi}{4}=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\alpha=\frac{\pi}{8}}$$

(2) (1) の結果から

$$\tan\alpha=\tan\frac{\pi}{8}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\boldsymbol{\sqrt{2}-1}$$



(3) $(*)$ より，$x=\tan\theta$ とすると

$$f(x)=x\Big[\ \varphi\ \Big]_0^{\theta}-\frac{1}{2}\Big[\ \log(1+t^2)\ \Big]_0^{x}+\frac{1}{2}\Big[\ \log(1+t^2)\ \Big]_x^{1}-x\Big[\ \varphi\ \Big]_{\theta}^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=x\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)+\log\frac{\sqrt{2}}{1+x^2} \qquad (**)$$

(2) の結果から，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

$(**)$ より

$$f(0)=\frac{1}{2}\log 2$$
$$f(\sqrt{2}-1)=\log\frac{\sqrt{2}}{1+(\sqrt{2}-1)^2}=\log\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$
$$f(1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2$$

$\log 2<0.7$ より

$$f(1)-f(0)=\frac{\pi}{4}-\log 2=\frac{\pi-4\log 2}{4}>\frac{\pi-4\times 0.7}{4}>0$$

よって　最大値 $\boldsymbol{f(1)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2}$,

最小値 $\boldsymbol{f(\sqrt{2}-1)=\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$ ■

$\boxed{3}$ (1) **(2, 1), (1, 2), (−1, 2), (−2, 1),**
(−2, −1), (−1, −2), (1, −2), (2, −1)

(2) P が n 秒後に点 $(a,\ b)$ にいる確率を $P_n(a,\ b)$ とすると，規則 (ii) より，確率漸化式

$$P_{n+1}(j,\ k)=\frac{1}{3}P_n(j,-k)+\frac{1}{3}P_n(-j,\ k)+\frac{1}{6}P_n(k,\ j)+\frac{1}{6}P_n(-k,-j) \tag{A}$$

が成立する $(j,k=\pm1,\pm2,\ j\neq k)$．
(A) において，$j,\ k$ をそれぞれ $-j,-k$ に置き換えると

$$P_{n+1}(-j,-k)=\frac{1}{3}P_n(-j,\ k)+\frac{1}{3}P_n(j,-k)+\frac{1}{6}P_n(-k,-j)+\frac{1}{6}P_n(k,j) \tag{B}$$

(A)，(B) の右辺がそれぞれ等しいから，自然数 n について

$$P_n(j,\ k)=P_n(-j,-k)\qquad (j,k=\pm1,\pm2,\ j\neq k) \tag{C}$$

が成立する．したがって，$P_n(2,\ 1)=P_n(-2,-1)$ が成立する．

(3) (C) より，$P_n(-j,\ k)=P_n(j,-k)$, $P_n(-k,-j)=P_n(k,\ j)$ であるから，これらを (A) に代入すると

$$P_{n+1}(j,\ k)=\frac{2}{3}P_n(j,-k)+\frac{1}{3}P_n(k,\ j) \tag{D1}$$

(D1) は (C) に注意しながら，次にように書き直すことができる．

$$P_{n+1}(k,\ j)=\frac{2}{3}P_n(k,-j)+\frac{1}{3}P_n(j,\ k) \tag{D2}$$
$$P_{n+1}(j,-k)=\frac{2}{3}P_n(j,\ k)+\frac{1}{3}P_n(k,-j) \tag{D3}$$
$$P_{n+1}(k,-j)=\frac{2}{3}P_n(k,j)+\frac{1}{3}P_n(j,-k) \tag{D4}$$

(D1)，(D4) より

$$P_{n+1}(j,\ k)+P_{n+1}(k,-j)=P_n(k,\ j)+P_n(j,-k) \tag{E1}$$
$$P_{n+1}(j,\ k)-P_{n+1}(k,-j)=-\frac{1}{3}\{P_n(k,\ j)-P_n(j,-k)\} \tag{E2}$$

(D2)，(D3) より

$$P_{n+1}(k,\ j)+P_{n+1}(j,-k)=P_n(j,\ k)+P_n(k,-j) \tag{E3}$$
$$P_{n+1}(k,\ j)-P_{n+1}(j,-k)=-\frac{1}{3}\{P_n(j,\ k)-P_n(k,-j)\} \tag{E4}$$

ここで

$$a_n=P_n(j,\ k)+P_n(k,-j),\quad b_n=P_n(j,\ k)-P_n(k,-j),$$
$$c_n=P_n(k,\ j)+P_n(j,-k),\quad d_n=P_n(k,\ j)-P_n(j,-k)$$

とおくと，(E1)〜(E4) より

$$a_{n+1}=c_n,\quad b_{n+1}=-\frac{1}{3}d_n,\quad c_{n+1}=a_n,\quad d_{n+1}=-\frac{1}{3}b_n$$

これから

$$a_{n+1}+c_{n+1}=a_n+c_n,\qquad b_{n+1}+d_{n+1}=-\frac{1}{3}(b_n+d_n),$$
$$a_{n+1}-c_{n+1}=-(a_n-c_n),\qquad b_{n+1}-d_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n-d_n)$$

上の 4 つの漸化式から

$$a_n+c_n=a_1+c_1,\qquad b_n+d_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}(b_1+d_1),$$
$$a_n-c_n=(-1)^{n-1}(a_1-c_1),\qquad b_n-d_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(b_1-d_1)$$

$j=2,\ k=1$ とすると

$$P_1(-2,\ 1)=P_1(2,-1)=\frac{1}{3},\quad P_1(1,\ 2)=P_1(-1,\ 2)=\frac{1}{6},$$
$$P_1(2,\ 1)=P_1(-1,\ 2)=P_1(-2,-1)=P_1(1,-2)=0$$

このとき，$a_1=b_1=0,\ c_1=\frac{1}{2},\ d_1=-\frac{1}{6}$ であるから

$$a_n=\frac{1}{4}\{1+(-1)^n\},\quad b_n=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n\{1+(-1)^n\}$$

したがって，自然数 n について

$$P_n(2,\ 1)=\frac{1}{2}(a_n+b_n)=\boldsymbol{\frac{1}{8}\{1+(-1)^n\}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

注意 $P_0(2,\ 1)=1$，$P_0(-2,-1)=0$ より，$n=0$ のとき (C) は成立しないから，$n\geqq 1$ で $P_n(2,\ 1)$ を求める．

別解 最初から n 秒後に P が

点 $(2,\ 1)$ または点 $(-2, -1)$ にいる確率を　p_n
点 $(1,\ 2)$ または点 $(-1, -2)$ にいる確率を　q_n
点 $(-1,\ 2)$ または点 $(1, -2)$ にいる確率を　r_n
点 $(-2,\ 1)$ または点 $(2, -1)$ にいる確率を　s_n

とおくと，条件 (ii) から，次の確率漸化式が成立する．

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= \frac{2}{3}r_n + \frac{1}{3}s_n, \quad q_{n+1} = \frac{1}{3}r_n + \frac{2}{3}s_n, \\ r_{n+1} &= \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, \quad s_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{3}q_n \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} (p_{n+1}+q_{n+1})+(r_{n+1}+s_{n+1}) &= (p_n+q_n)+(r_n+s_n) \\ (p_{n+1}+q_{n+1})-(r_{n+1}+s_{n+1}) &= -\{(p_n+q_n)-(r_n+s_n)\} \\ (p_{n+1}-q_{n+1})+(r_{n+1}-s_{n+1}) &= -\frac{1}{3}\{(p_n-q_n)+(r_n-s_n)\} \\ (p_{n+1}-q_{n+1})-(r_{n+1}-s_{n+1}) &= \frac{1}{3}\{(p_n-q_n)-(r_n-s_n)\} \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned} (p_n+q_n)+(r_n+s_n) &= (p_0+q_0)+(r_0+s_0) \\ (p_n+q_n)-(r_n+s_n) &= (-1)^n\{(p_0+q_0)-(r_0+s_0)\} \\ (p_n-q_n)+(r_n-s_n) &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n(p_0-q_0)+(r_0-s_0) \\ (p_n-q_n)-(r_n-s_n) &= \left(\frac{1}{3}\right)^n\{(p_0-q_0)-(r_0-s_0)\} \end{aligned}$$

$p_0=1,\ q_0=r_0=s_0=0$ であるから

$$\begin{aligned} 2(p_n+q_n) &= 1+(-1)^n \\ 2(p_n-q_n) &= \{1+(-1)^n\}\left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

よって，求める確率は (n は自然数)

$$\frac{1}{2}p_n = \boldsymbol{\frac{1}{8}\{1+(-1)^n\}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

■

4 (1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における法線の方程式は

$$x-t+f'(t)\{y-f(t)\}=0$$

この直線が点 $(c(t),\ 0)$ を通るから

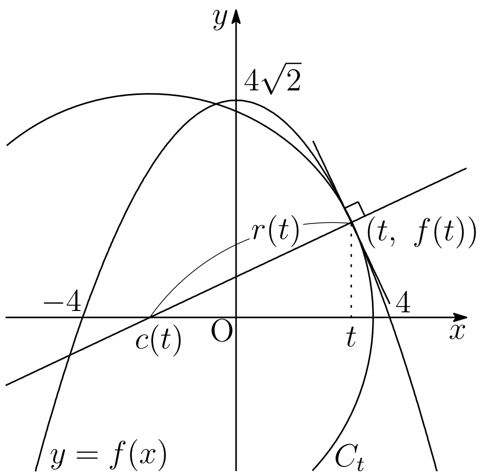
$$c(t)-t-f'(t)f(t)=0 \quad \text{ゆえに} \quad c(t)=t+f'(t)f(t)$$

2 点 $(c(t),\ 0)$, $(t,\ f(t))$ 間の距離 $r(t)$ は，上の結果から

$$\begin{aligned} r(t)^2 &= (t-c(t))^2+f(t)^2 \\ &= \{f'(t)f(t)\}^2+f(t)^2=\{f'(t)^2+1\}f(t)^2 \end{aligned}$$

$f(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x^2-16)$ より，$f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$ であるから

$$\begin{aligned} c(t) &= t+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)\left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}(t^2-16)\right\}=\boldsymbol{\frac{t^3}{4}-3t}, \\ r(t)^2 &= \left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+1\right\}\left\{-\frac{\sqrt{2}}{4}(t^2-16)\right\}^2 \\ &= \frac{1}{16}(t^2+2)(t^2-16)^2 \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2} \end{aligned}$$



(2) $f(3) = \dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ より，$0 < a < f(3)$ を満たすから

$$0 < a^2 < \frac{49}{8}$$

(1) の結果から，円 C_t の方程式は

$$C_t : \left(x - \frac{t^3}{4} + 3t\right)^2 + y^2 = \frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2$$

点 $(3,\ a)$ は C_t 上にあるから

$$\left(3 - \frac{t^3}{4} + 3t\right)^2 + a^2 = \frac{1}{16}(t^2+2)(t+4)^2(t-4)^2$$

a^2 について解くと　　$a^2 = -\dfrac{3}{8}t^4 + \dfrac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23$

$g(t) = -\dfrac{3}{8}t^4 + \dfrac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23$ とおくと $(0 < t < 4)$

$$\begin{aligned} g'(t) &= -\frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 6t - 18 \\ &= -\frac{3}{2}(t^3 - 3t^2 - 4t + 12) = -\frac{3}{2}(t+2)(t-2)(t-3) \end{aligned}$$

$g(t)$ の増減表は，次のようになる．

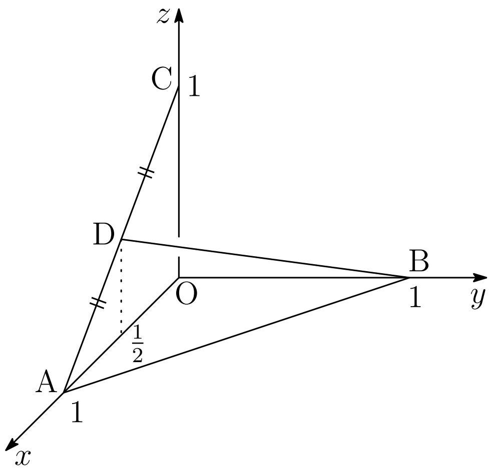
t	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(t)$	(23)	$\searrow$	5	$\nearrow$	$\frac{49}{8}$	$\searrow$	(-1)

$g(t) = a^2$ の実数解 t の個数は

$$\begin{cases} 0 < a^2 < 5 \text{ のとき} & 1\text{個} \\ a^2 = 5 \text{ のとき} & 2\text{個} \\ 5 < a^2 < \dfrac{49}{8} \text{ のとき} & 3\text{個} \end{cases}$$

したがって　$$\begin{cases} \boldsymbol{0 < a < \sqrt{5}} \text{ のとき} & \textbf{1個} \\ \boldsymbol{a = \sqrt{5}} \text{ のとき} & \textbf{2個} \\ \boldsymbol{\sqrt{5} < a < \dfrac{7}{4}\sqrt{2}} \text{ のとき} & \textbf{3個} \end{cases}$$ ■

5 3直線AB，BD，ACの方程式は



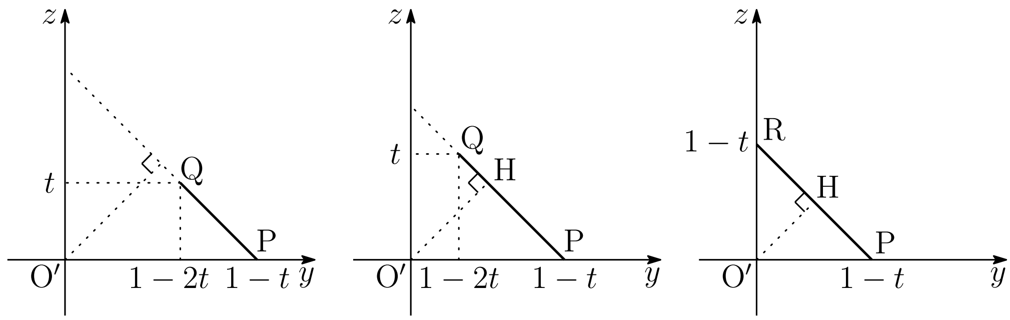
$$\text{直線AB} : x+y=1,\ z=0,$$
$$\text{直線BD} : x=\frac{y-1}{-2}=z,$$
$$\text{直線AC} : z+x=1,\ y=0$$

3直線AB，BD，ACと平面 $x=t$ との交点をそれぞれP，Q，Rとすると

$$\mathrm{P}(t,\ 1-t,\ 0)\quad (0 \leqq t \leqq 1),$$
$$\mathrm{Q}(t,\ 1-2t,\ t)\quad (0 \leqq t \leqq \tfrac{1}{2}),$$
$$\mathrm{R}(t,\ 0,\ 1-t)\quad (\tfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1)$$

△ABDの平面 $x=t$ による断面は次のようになる．

(i) $0 \leqq t \leqq \frac{1}{3}$　(ii) $\frac{1}{3} \leqq t \leqq \frac{1}{2}$　(iii) $\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$



直線PQと x 軸との距離をO′Hとすると，図(i)〜図(iii)より

$$\mathrm{O'H}=\frac{\mathrm{O'P}}{\sqrt{2}},\quad \mathrm{O'P}=1-t,\quad \mathrm{O'Q}=\sqrt{(1-2t)^2+t^2}$$

求める回転体の体積を V とすると

$$\begin{aligned}\frac{V}{\pi}&=\int_0^{\frac{1}{3}}(\mathrm{O'P}^2-\mathrm{O'Q}^2)\,dt+\int_{\frac{1}{3}}^{1}(\mathrm{O'P}^2-\mathrm{O'H}^2)\,dt\\&=\int_0^{\frac{1}{3}}(2t-4t^2)\,dt+\int_{\frac{1}{3}}^{1}\frac{1}{2}(t-1)^2\,dt\\&=\Big[\,t^2-\frac{4}{3}t^3\,\Big]_0^{\frac{1}{3}}+\Big[\,\frac{1}{6}(t-1)^3\,\Big]_{\frac{1}{3}}^{1}=\frac{1}{9}\end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{V=\dfrac{\pi}{9}}$ ■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(x) = x(x^2 + 10x + 20)$ より，$f(n)$ が素数となるのは，次の場合である．

- $n = p$ のとき (p は素数)

$$p^2 + 10p + 20 = 1 \quad \text{ゆえに} \quad p(p + 10) = -19$$

  これを満たす素数 p は存在しない．

- $n = -q$ のとき (q は素数)

$$q^2 - 10q + 20 = -1 \quad \text{ゆえに} \quad (q - 3)(q - 7) = 0$$

  これを解いて　$q = 3,\ 7$　すなわち　$n = -3, -7$

- $n = 1$ のとき，$f(1) = 1(1^2 + 10 \cdot 1 + 20) = 31$
  $f(1)$ は素数であるから，$n = 1$ は条件を満たす．
- $n = -1$ のとき，$f(-1) = -1 \cdot \{(-1)^2 + 10 \cdot (-1) + 20\} = -11$
  $f(-1)$ は素数でないから，$n = -1$ は条件を満たさない．

以上の結果から　　$\boldsymbol{n = -3, -7,\ 1}$

(2) $g(x)=x(x^2+ax+b)$ より ($a,\ b$ は整数)，$h(x)=x^2+ax+b$ とおくと，$g(n)$ が素数となるのは，(i)〜(iv) の場合である．

(i) $n=p$ のとき (p は素数)，$h(p)=1$

(ii) $n=-q$ のとき (q は素数)，$h(-q)=-1$

(iii) $n=1$ のとき，$h(1)$ は素数

(iv) $n=-1$ のとき，$-h(-1)$ は素数

［A］(i)，(ii) を満たす素数 $p,\ q$ がともに存在すると仮定すると

$$p^2+ap+b=1,\quad q^2-aq+b=-1$$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$p^2-q^2+a(p+q)=2 \quad \text{ゆえに} \quad (p+q)(p-q+a)=2$$

$p+q \geqq 4$，$p-q+a$ は整数であるから，上の第 2 式を満たす素数 $p,\ q$ は存在しない．よって，(i) と (ii) は同時に成立しない．

［B］(i) を満たす素数 $p_1,\ p_2$ が存在すると仮定すると

$$h(x)-1=(x-p_1)(x-p_2)$$

$x=-1$ を上式に代入すると

$$h(-1)-1=(-1-p_1)(-1-p_2)>0 \quad \text{ゆえに} \quad -h(-1)<-1$$

このとき，(iv) は成立しない

［C］(ii) を満たす素数 $q_1,\ q_2$ が存在すると仮定すると

$$h(x)+1=(x+q_1)(x+q_2)$$

$x=-1$ を上式に代入すると

$$h(-1)+1=(-1-q_1)(-1-q_2)>0 \quad \text{ゆえに} \quad -h(-1)<1$$

このとき，(iv) は成立しない

［A］～［C］から，$g(n)$ が素数となる整数 n の個数は 3 個以下である．

■