令和５年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5 6

1 (1) 正の整数 k に対し，

$$A_k = \int_{\sqrt{k\pi}}^{\sqrt{(k+1)\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく．次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) 正の整数 n に対し，

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{2n\pi}} |\sin(x^2)|\,dx$$

とおく．極限 $\lim_{n\to\infty} B_n$ を求めよ．

2 黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個が入っている袋から玉を 1 個ずつ取り出し，取り出した玉を順に横一列に 12 個すべて並べる．ただし，袋から個々の玉が取り出される確率は等しいものとする．

(1) どの赤玉も隣り合わない確率 p を求めよ．

(2) どの赤玉も隣り合わないとき，どの黒玉も隣り合わない条件付き確率 q を求めよ．

3 a を実数とし，座標平面上の点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 1 の円の周を C とする．

(1) C が，不等式 $y > x^2$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ．

(2) a は (1) で求めた範囲にあるとする．C のうち $x \geqq 0$ かつ $y < a$ を満たす部分を S とする．S 上の点 P に対し，点 P での C の接線が放物線 $y = x^2$ によって切り取られてできる線分の長さを L_P とする．$L_Q = L_R$ となる S 上の相異なる 2 点 Q，R が存在するような a の範囲を求めよ．

4 座標空間内の 4 点 O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，B(1, 1, 1)，C(1, 2, 3) を考える．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$ を満たす点 P の座標を求めよ．

(2) 点 P から直線 AB に垂線を下ろし，その垂線と直線 AB の交点を H とする．$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

(3) 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ により定め，Q を中心とする半径 r の球面 S を考える．S が三角形 OHB と共有点をもつような r の範囲を求めよ．ただし，三角形 OHB は 3 点 O，H，B を含む平面内にあり，周とその内部からなるものとする．

5 整式 $f(x) = (x-1)^2(x-2)$ を考える．

(1) $g(x)$ を実数を係数とする整式とし，$g(x)$ を $f(x)$ で割った余りを $r(x)$ とおく．$g(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りと $r(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りが等しいことを示せ．

(2) a, b を実数とし，$h(x) = x^2 + ax + b$ とおく．$h(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_1(x)$ とおき，$h_1(x)^7$ を $f(x)$ で割った余りを $h_2(x)$ とおく．$h_2(x)$ が $h(x)$ に等しくなるような a, b の組をすべて求めよ．

6 O を原点とする座標空間において，不等式 $|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$，$|z| \leqq 1$ の表す立方体を考える．その立方体の表面のうち，$z < 1$ を満たす部分を S とする．

以下，座標空間内の 2 点 A，B が一致するとき，線分 AB は点 A を表すものとし，その長さを 0 と定める．

(1) 座標空間内の点 P が次の条件 (i)，(ii) をともに満たすとき，点 P が動きうる範囲 V の体積を求めよ．

(i) $\mathrm{OP} \leqq \sqrt{3}$

(ii) 線分 OP と S は，共有点を持たないか，点 P のみを共有点にもつ．

(2) 座標空間内の点 N と点 P が次の条件 (iii)，(iv)，(v) をすべて満たすとき，点 P が動きうる範囲 W の体積を求めよ．必要ならば，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を満たす実数 $\alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい．

(iii) $\mathrm{ON} + \mathrm{NP} \leqq \sqrt{3}$

(iv) 線分 ON と S は共有点を持たない．

(v) 線分 NP と S は，共有点をもたないか，点 P のみを共有点に持つ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $x=\sqrt{t}$ とおくと $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$

x	$\sqrt{k\pi} \longrightarrow \sqrt{(k+1)\pi}$
t	$k\pi \longrightarrow (k+1)\pi$

$$A_k=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}|\sin t|\cdot\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$k\pi \leqq t \leqq (k+1)\pi$ において

$$\frac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \frac{|\sin t|}{2\sqrt{t}} \leqq \frac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}$$

したがって

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\,dt \leqq A_k \leqq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{2\sqrt{k\pi}}\,dt$$

$t=k\pi+u$ とおくと $\dfrac{dt}{du}=1$

$$\int_0^{\pi}\frac{|\sin(k\pi+u)|}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\,du \leqq A_k \leqq \int_0^{\pi}\frac{|\sin(k\pi+u)|}{2\sqrt{k\pi}}\,du$$

$$\frac{1}{2\sqrt{(k+1)\pi}}\int_0^{\pi}|\sin u|\,du \leqq A_k \leqq \frac{1}{2\sqrt{k\pi}}\int_0^{\pi}|\sin u|\,du$$

$\displaystyle\int_0^{\pi}|\sin u|\,du=\int_0^{\pi}\sin u\,du=\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi}=2$ であるから

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq A_k \leqq \frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

(2) $B_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} A_k$ であるから，(1) の結果より

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq B_n \leqq \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}}$$

したがって

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} \leqq \lim_{n\to\infty} B_n \leqq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}} \qquad (*)$$

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{(k+1)\pi}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{k\pi}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx,$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \Big[\,2\sqrt{x}\,\Big]_1^2 = 2(\sqrt{2}-1)$$

これらを (∗) に代入すると，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} = \boldsymbol{\frac{2(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{\pi}}}$$

■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 黒玉 3 個，赤玉 4 個，白玉 5 個の 12 個の玉の並べ方の総数を N とすると

$$N = \frac{12!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

黒玉 3 個と，白玉 5 個の 8 個を並べ，その 8 個の玉の両側と間の 9 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を A とすると

$$A = \frac{8!}{3!5!} \times \frac{9!}{4!5!} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \quad (\text{通り})$$

よって，求める確率 p は

$$p = \frac{A}{N} = \frac{8!9!}{3!4!5!5!} \Big/ \frac{12!}{3!4!5!} = \frac{8!}{5!}\cdot\frac{9!}{12!} = \frac{8\cdot7\cdot6}{12\cdot11\cdot10} = \mathbf{\frac{14}{55}}$$

(2) 黒玉 3 個のうち 2 個をひとまとめにして，$\boxed{\text{黒黒}}$，黒玉 1 個，白玉 5 個を並べ，その 7 個の両側と間の 8 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を B とすると

$$B = \frac{7!}{1!1!5!} \times \frac{8!}{4!4!} = \frac{7!8!}{4!4!5!}$$

この中には，$\boxed{\text{黒黒}}$黒，または，黒$\boxed{\text{黒黒}}$のように，連続して並ぶ黒玉 3 個が重複する場合がある．黒玉 3 個をひとまとめにして，$\boxed{\text{黒黒黒}}$，白玉 5 個を並べ，その 6 個の両側と間の 7 カ所に赤玉 4 個を並べる場合の総数を C とすると

$$C = \frac{6!}{1!5!} \times \frac{7!}{4!3!} = \frac{6!7!}{3!4!5!} \quad (\text{通り})$$

どの赤玉も隣り合わないとき，隣り合う黒玉が存在する条件付き確率は

$$\begin{aligned}\frac{B-C}{A} &= \left(\frac{7!8!}{4!4!5!} - \frac{6!7!}{3!4!5!}\right)\cdot\frac{3!4!5!5!}{8!9!} \\ &= \left(\frac{7!8!}{4!} - \frac{6!7!}{3!}\right)\cdot\frac{3!5!}{8!9!} \\ &= (8\cdot7-4)\frac{6!7!}{4!}\cdot\frac{3!5!}{8!9!} \\ &= 52\cdot\frac{6!}{8!}\cdot\frac{7!}{9!}\cdot\frac{5!}{4!}\cdot3! = \frac{65}{168}\end{aligned}$$

求める確率は，この余事象の確率であるから　$1 - \dfrac{65}{168} = \mathbf{\dfrac{103}{168}}$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) C 上の点 $(0,\ a-1)$ が $y > x^2$ を含まれるから，$a-1>0$ は必要条件．
放物線 $y=x^2$ 上の点 $(u,\ u^2)$ と点 $(0,\ a)$ の距離を d とすると

$$d^2 = u^2 + (u^2-a)^2 = \left(u^2 - \frac{a-1}{2}\right)^2 + \frac{a-1}{4}$$

d^2 は $u = \pm\sqrt{\dfrac{a-1}{2}}$ のとき，最小値 $\dfrac{a-1}{4}$ をとる．
条件をみたすとき，$d>1$，すなわち，$d^2>1$ であるから

$$\frac{a-1}{4} > 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a > \frac{5}{4}}$$

(2) $\mathrm{A}(0,\ a)$ とし，S 上の点 P における接線の偏角を θ とすると $(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2})$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right) = (\sin\theta, -\cos\theta),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AP}} = (\sin\theta,\ a-\cos\theta)$$

$C: x^2 + (y-a)^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(\sin\theta,\ a-\cos\theta)$ における接線の方程式は

$$x\sin\theta - (y-a)\cos\theta = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = x\tan\theta - \frac{1}{\cos\theta} + a$$

この直線と放物線 $y=x^2$ の方程式から y を消去し，整理すると

$$x^2 - x\tan\theta + \frac{1}{\cos\theta} - a = 0$$

この方程式の解を $\alpha,\ \beta$ とすると，解と係数の関係から

$$\alpha+\beta = \tan\theta, \quad \alpha\beta = \frac{1}{\cos\theta} - a$$

2 点 $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ を結ぶ線分の長さを L とすると

$$\begin{aligned} L^2 &= (\beta-\alpha)^2 + (\beta^2-\alpha^2)^2 = (\beta-\alpha)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\} \\ &= \{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\}\{1+(\alpha+\beta)^2\} \\ &= \left(\tan^2\theta - \frac{4}{\cos\theta} + 4a\right)(1+\tan^2\theta) \\ &= \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 - \frac{4}{\cos\theta} + 4a\right)\frac{1}{\cos^2\theta} \end{aligned}$$

$t=\dfrac{1}{\cos\theta}$，$f(t)=L^2$ とおくと

$$f(t)=t^4-4t^3+(4a-1)t^2 \qquad (t \geqq 1)$$

$f(t)$ の第 1 次導関数と第 2 次導関数を求めると

$$\begin{aligned} f'(t) &= 4t^3-12t^2+2(4a-1)t \\ f''(t) &= 12t^2-24t+2(4a-1) \end{aligned}$$

$t \geqq 1$ に注意して，$f''(t)=0$ を解くと　　$t=1+\sqrt{\dfrac{7-4a}{6}}$

$f'(t)$ を $f''(t)$ で割って，$k=\sqrt{\dfrac{7-4a}{6}}$ とおくと

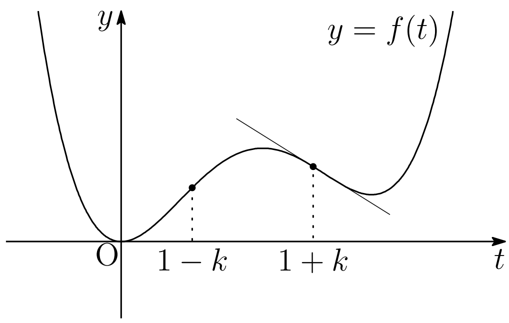
$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{3}(t-1)f''(t)+\frac{4}{3}(4a-7)t+\frac{2}{3}(4a-1) \\ &= \frac{1}{3}(t-1)f''(t)-8k^2t-4k^2+4 \end{aligned}$$

$f'(1+k)<0$ を満たせばよい．$f''(1+k)=0$ より

$$-8k^2(1+k)-4k^2+4<0 \quad \text{ゆえに} \quad (k+1)^2(2k-1)>0$$

これを解いて　$k>\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$\sqrt{\dfrac{7-4a}{6}}>\dfrac{1}{2}$　すなわち　$a<\dfrac{11}{8}$

これと (1) の結果により　　$\boldsymbol{\dfrac{5}{4}<a<\dfrac{11}{8}}$



参考　3 次関数 $y=f(x)$ の変曲点の x 座標を c とする．$f'(c)$ の符号と $f(x)$ の x^3 の係数の符号が異なることは $f(x)$ が極値をもつための必要十分条件．■

$\boxed{4}$ (1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 0,\ 0)$ および $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1,\ 1,\ 1)$ と垂直なベクトルの 1 つを

$$\vec{v}=(0,-1,\ 1)$$

とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{v}$ であるから (k は定数)，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$ より

$$k\{0\cdot1+(-1)\cdot2+1\cdot3\}=1 \quad \text{ゆえに} \quad k=1$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{v}=(0,-1,\ 1)$　よって　$\mathbf{P(0,-1,\ 1)}$

(2) H は直線 AB 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=$ に注意して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}) \qquad (*)\\&=\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\\&=(2-t,\ t,\ t)\cdot(-1,\ 1,\ 1)=3t-2=0\end{aligned}$$

これを解いて　$t=\dfrac{2}{3}$　よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$

(3) 空間の点 X を平面 OAB に垂線を下ろした点を $f(X)$ とすると

$$f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\vec{0},\quad f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad f(\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

f は線形変換であるから，f による Q の像を R とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=f(\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\frac{3}{4}f(\overrightarrow{\mathrm{OA}})+f(\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

$(*)$ により，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であるから，R から線分 OH に垂線 RT を引くと

$$\mathrm{RT}=\frac{3}{4}\mathrm{AH}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{AB}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\frac{1}{2}|(-1,\ 1,\ 1)|=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(\dfrac{3}{2},\ 0,\ 0\right)$ より　$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\dfrac{3}{2}$

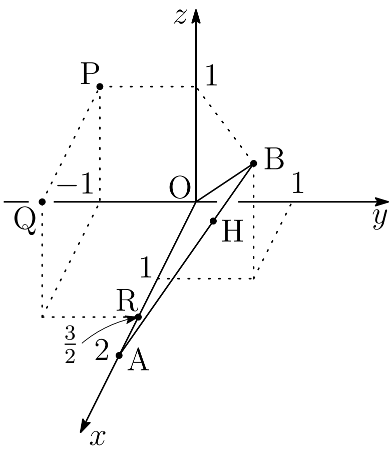
$$\overrightarrow{\mathrm{RB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1,\ 1,\ 1)-\left(\frac{3}{2},\ 0,\ 0\right),=\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ 1\right)$$

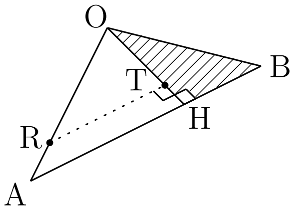
$$|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|=\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}=\frac{3}{2}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|(0,-1,\ 1)|=\sqrt{2}$ であるから，求める r の値の範囲は

$$\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\leqq r\leqq\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$

よって　　$\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{11}}{2}\leqq r\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}}$





5 (1) $g(x)-r(x)$ は $f(x)$ を因数に持たない．

$$g(x)^7-r(x)^7=\{g(x)-r(x)\}\sum_{k=1}^{7}g(x)^{7-k}r(x)^{k-1}$$

したがって，題意は成立する．

別解 $g(x)\equiv r(x) \pmod{f(x)}$ のとき　$g(x)^7\equiv r(x)^7 \pmod{f(x)}$
したがって，題意は成立する．

(2) $h(x)^7\equiv h_1(x),\ h_1(x)^7\equiv h(x) \pmod{f(x)}$ より

$$h(x)^{49}\equiv h_1(x)^7\equiv h(x)\quad\text{ゆえに}\quad h(x)\{h(x)^{48}-1\}\equiv 0 \pmod{f(x)}$$

$A=h(x)$ とすると

$$\begin{aligned}A(A^{48}-1)&=A(A^{24}+1)(A^{12}+1)(A^6+1)(A^3+1)(A^3-1)\\&=A(A+1)(A-1)(A^{24}+1)(A^{12}+1)(A^2+A+1)(A^2-A+1)\end{aligned}$$

次の因数

$$A^{24}+1>0,\quad A^{12}+1>0,\quad A^2\pm A+1=\left(A\pm\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

は $x-1,\ x-2$ を因数に持たない (複号同順)．
したがって，$h(x)\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}$ は $(x-1)^2(x-2)$ を因数にもつ．
$h(x),\ h(x)+1,\ h(x)-1$ のいずれかが $(x-1)(x-2)$ を因数にもつとき，x^2-3x+C (C は定数) は $x-1$ を因数に持たないので不適．
$h(x),\ h(x)+1,\ h(x)-1$ 中で $x-1,\ x-2$ を因数にもつものを次の 6 つの場合について調べる．

	$h(x)$	$h(x)+1$	$h(x)-1$	
①	$x-1$	$x-2$		$h(1)=0,\ h(2)=-1$
②	$x-1$		$x-2$	$h(1)=0,\ h(2)=1$
③	$x-2$	$x-1$		$h(2)=0,\ h(1)=-1$
④		$x-1$	$x-2$	$h(1)=-1,\ h(2)=1$
⑤	$x-2$		$x-1$	$h(2)=0,\ h(1)=1$
⑥		$x-2$	$x-1$	$h(2)=-1,\ h(1)=1$

$h(x)=x^2+ax+b$ であるから，①〜⑥ は次のようになる．

		$h(x)$	$h(x)+1$	$h(x)-1$
①	$a=-4,\ b=3$	$(x-1)(x-3)$	$(x-2)^2$	x^2-4x+2
②	$a=-2,\ b=1$	$(x-1)^2$	x^2-2x+2	$x(x-2)$
③	$a=-2,\ b=0$	$x(x-2)$	$(x-1)^2$	x^2-2x-1
④	$a=-1,\ b=-1$	x^2-x-1	$x(x-1)$	$(x+1)(x-2)$
⑤	$a=-4,\ b=4$	$(x-2)^2$	x^2-4x+5	$(x-1)(x-3)$
⑥	$a=-5,\ b=-5$	x^2-5x+5	$(x-2)(x-3)$	$(x-1)(x-4)$

$h(x)\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}$ が $f(x)=(x-1)^2(x+2)$ で割り切れるものは，② と ③ の場合であるから

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=(\mathbf{-2},\ \mathbf{1}),\ (\mathbf{-2},\ \mathbf{0})$$

別解 $h(x)^{49}-h(x)$ は $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を因数にもつから

$$h(1)\{h(1)^{48}-1\}=0,\quad h'(1)\{49h(1)^{48}-1\}=0,\quad h(2)\{h(2)^{48}-1\}=0$$

上の第 1 式から $h(1)=0,\ \pm1$ であるから，第 2 式より　$h'(1)=0$

$h(x)=x^2+ax+b$ より，$h'(x)=2x+a$

$$h'(1)=2+a=0 \quad \text{ゆえに} \quad a=-2$$

$h(x)=x^2-2x+b$ であるから，$h(x),\ h(x)+1,\ h(x)-1$ が $x-1$ を因数にもつのは

$$b=0,\ 1\ 2$$

(i) $b=0$ のとき

$$h(x)=x(x-2),\quad h(x)+1=(x-1)^2,\quad h(x)-1=x^2-2x-1$$

(ii) $b=1$ のとき

$$h(x)=(x-1)^2,\quad h(x)+1=x^2-2x+2,\quad h(x)-1=x(x-2)$$

(iii) $b=2$ のとき

$$h(x)=x^2-2x+2,\quad h(x)+1=x^2-2x+3,\quad h(x)-1=(x-1)^2$$

$h(x)\{h(x)+1\}\{h(x)-1\}$ が $f(x)=(x-1)^2(x-2)$ を因数に持つのは，(i) と (ii) の場合であるから

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})=(\mathbf{-2},\ \mathbf{0}),\ (\mathbf{-2},\ \mathbf{1})$$

■

6 (1) Pが $z \leqq 1$ にあるとき，線分OPの通過領域は　2^3

Pが $z \geqq 1$ にあるとき，線分OPの通過領域は　$\dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 - 2^3\right\}$

求める体積を V_1 とすると　$V_1 = 2^3 + \dfrac{1}{6}\left\{\dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{3})^3 - 2^3\right\} = \boldsymbol{\dfrac{20}{3} + \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}}$

(2) $\mathrm{G}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{H}(-1, -1,\ 1)$ とし，$x^2 + y^2 + z^2 \leqq 3,\ z \geqq 1$ の平面OGHによる断面積を S とすると，$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ より

$$S = \frac{1}{2}(\sqrt{3})^2(2\alpha - \sin 2\alpha) = 3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha) = 3\alpha - \sqrt{2}$$

右下の図の斜線部分を y 軸の周りに回転させた立体の体積を V_2 とすると

$$V_2 = \pi\int_{-1}^{1}\{t^2 - (\sqrt{2})^2\}\,dy = \pi\int_{-1}^{1}(1 - y^2)\,dy = \frac{4}{3}\pi$$

図の斜線部分の重心の y 軸からの距離を d とすると，パップス・ギュルダンの定理により

$$d = \frac{V_2}{2\pi S} = \frac{2}{3S}$$

斜線部分を $t = \sqrt{2}$ の周りに $\dfrac{3}{4}\pi$ だけ回転させた立体の体積を V_3 とすると

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{3}{4}\pi(d - \sqrt{2})S = \frac{3}{4}\pi\left(\frac{2}{3S} - \sqrt{2}\right)S = \frac{\pi}{4}(2 - 3\sqrt{2}S) \\ &= \frac{\pi}{4}\{2 - 3\sqrt{2}(3\alpha - \sqrt{2})\} = \frac{\pi}{4}(8 - 9\sqrt{2}\alpha) \end{aligned}$$

よって，求める体積は　$V_1 + 4V_3 = \boldsymbol{\dfrac{20}{3} + \pi\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} + 8 - 9\sqrt{2}\alpha\right)}$ ■