令和４年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5 6

1 次の関数 $f(x)$ を考える．

$$f(x) = (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt \quad \left(0 \leqq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

(1) $f(x)$ は区間 $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ において最小値を持つことを示せ．

(2) $f(x)$ の区間 $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ における最小値を求めよ．

2 数列 $\{a_n\}$ を次のように定める．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = {a_n}^2 + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) 正の整数 n が 3 の倍数のとき，a_n は 5 の倍数となることを示せ．

(2) k，n を正の整数とする．a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件を k，n を用いて表せ．

(3) a_{2022} と $(a_{8091})^2$ の最大公約数を求めよ．

3　O を原点とする座標平面上で考える．座標平面上の 2 点 $\mathrm{S}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{T}(x_2,\ y_2)$ に対し，点 S が点 T から十分離れているとは，

$$|x_1 - x_2| \geqq 1 \quad \text{または} \quad |y_1 - y_2| \geqq 1$$

が成り立つことと定義する．

不等式

$$0 \leqq x \leqq 3, \quad 0 \leqq y \leqq 3$$

が表す正方形の領域を D とし，その 2 つの頂点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 3)$ を考える．さらに，次の条件 (i)，(ii) をともに満たす点 P をとる．

(i) 点 P は領域 D の点であり，かつ，放物線 $y = x^2$ 上にある．

(ii) 点 P は，3 点 O，A，B のいずれからも十分離れている．

点 P の x 座標を a とする．

(1) a のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 次の条件 (iii)，(iv) をともに満たす点 Q が存在しうる範囲の面積 $f(a)$ を求めよ．

(iii) 点 Q は領域 D の点である．

(iv) 点 Q は，4 点 O，A，B，P のいずれからも十分離れている．

(3) a は (1) で求めた範囲を動くとする．(2) の $f(a)$ を最小にする a の範囲を求めよ．

4 座標平面上の曲線

$$C : y = x^3 - x$$

を考える．

(1) 座標平面上のすべての点 P が次の条件 (i) を満たすことを示せ．

(i) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わるものが存在する．

(2) 次の条件 (ii) を満たす点 P のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．

(ii) 点 P を通る直線 ℓ で，曲線 C と相異なる 3 点で交わり，かつ，直線 ℓ と曲線 C で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるものが存在する．

$\boxed{5}$ 座標空間内の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 AB を z 軸のまわりに 1 回転させて得られる曲面を S とする．S 上の点 P と xy 平面上の点 Q が $\mathrm{PQ}=2$ を満たしながら動くとき，線分 PQ の中点 M が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

$\boxed{6}$ O を原点とする座標平面上で考える．0 以上の整数 k に対して，ベクトル $\vec{v}_k$ を

$$\vec{v}_k=\left(\cos\frac{2k\pi}{3},\ \sin\frac{2k\pi}{3}\right)$$

と定める．投げたとき表と裏がどちらも $\frac{1}{2}$ の確率で出るコインを N 回投げて，座標平面上に点 $\mathrm{X}_0,\ \mathrm{X}_1,\ \mathrm{X}_2, \cdots, \mathrm{X}_N$ を以下の規則 (i)，(ii) に従って定める．

(i) X_0 は O にある．

(ii) n を 1 以上 N 以下の整数とする．X_{n-1} が定まったとし，X_n を次のように定める．

- n 回目のコイン投げで表が出た場合，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OX}_{n-1}}+\vec{v}_k$$

  により X_n を定める．ただし，k は 1 回目から n 回目までのコイン投げで裏が出た回数とする．

- n 回目のコイン投げで裏が出た場合，X_n を X_{n-1} と定める．

(1) $N=8$ とする．X_8 が O にある確率を求めよ．

(2) $N=200$ とする．X_{200} が O にあり，かつ，合計 200 回のコイン投げで表がちょうど r 回出る確率を p_r とおく．ただし $0\leqq r\leqq 200$ である．p_r を求めよ．また p_r が最大となる r の値を求めよ．

解答例

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -(\sin x)\log(\cos x) + \cos x \cdot \frac{-\sin x}{\cos x} + \sin x + (\cos x)\log(\cos x) \\ &= (\cos x - \sin x)\log(\cos x) = \cos x(1 - \tan x)\log(\cos x) \end{aligned}$$

したがって，$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，$f(x)$ は区間 $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において最小値 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ をとる．

(2) (1) の結果から，最小値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)\log\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) - \cos\frac{\pi}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)\log(\cos t)\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)\log(\cos t)\,dt \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos t)\log(\cos t)\,dt &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin t)'\log(\cos t)\,dt \\ &= \Big[\,(\sin t)\log(\cos t)\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin t \cdot \frac{-\sin t}{\cos t}\,dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos t} - \cos t\right)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} + \left[\,\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \sin t\,\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} + \log(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

よって，求める最小値は

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}} + \log(\sqrt{2}+1) - \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \mathbf{\log(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}(\log\sqrt{2}+1)} \end{aligned}$$

補足 $u = \sin t$ とおくと，$\dfrac{du}{dt} = \cos t$ より

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\cos t}\,dt &= \int \frac{\cos t}{\cos^2 t}\,dt = \int \frac{du}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)du \\ &= \frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| + C = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C\end{aligned}$$

上式と同様に次式が利用できる．

$$\begin{aligned}\int (\cos t)\log(\cos t)\,dt &= \frac{1}{2}\int \log(1-u^2)\,du \\ &= \frac{1}{2}u\log(1-u^2) - \frac{1}{2}\int u\cdot\frac{-2u}{1-u^2} \\ &= \frac{1}{2}u\log(1-u^2) + \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} - 2\right)du \\ &= \frac{1}{2}u\log(1-u^2) + \frac{1}{2}\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right| - u + C \\ &= (\sin t)\log|\cos t| + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin t}{1-\sin t} - \sin t + C\end{aligned}$$

したがって

$$\int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt = (\sin x)\log|\cos x| + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \sin x$$

これから，$f(x)$ は $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}f(x) &= (\cos x)\log(\cos x) - \cos x + \int_0^x (\cos t)\log(\cos t)\,dt \\ &= (\cos x)\log(\cos x) - \cos x \\ &\qquad + (\sin x)\log(\cos x) + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \sin x \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} + (\sin x + \cos x)\{\log(\cos x) - 1\}\end{aligned}$$

よって，最小値は　$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \log(\sqrt{2}+1) - \sqrt{2}(\log\sqrt{2}+1)$　■

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = {a_n}^2 + 1$ より

$$a_2 = {a_1}^2 + 1 = 1^2 + 1 = 2,$$
$$a_3 = {a_2}^2 + 1 = 2^2 + 1 = 5$$

$b = a^2 + 1$，$c = b^2 + 1$，$d = c^2 + 1$ とおくと，$a \equiv 0 \pmod 5$ のとき

$$\begin{aligned} b &= a^2 + 1 \equiv 0^2 + 1 \equiv 1 && \pmod 5 \\ c &= b^2 + 1 \equiv 1^2 + 1 \equiv 2 && \pmod 5 \\ d &= c^2 + 1 \equiv 2^2 + 1 \equiv 0 && \pmod 5 \end{aligned}$$

上式より，$a_3 \equiv 0 \pmod 5$ であるから，$a_6 \equiv 0 \pmod 5$
したがって，順次，a_3，a_6，a_9，$\cdots$ は5の倍数となる．
よって，正の整数 n が3の倍数のとき，a_n は5の倍数となる．

(2) $a_1 = 1$，$a_{n+1} = {a_n}^2 + 1$ より　$a_n \geqq 1$
さらに，$a_{n+1} - a_n = a_n(a_n - 1) + 1 > 0$ より　$a_n < a_{n+1}$
$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{k-1} < a_k$ より，a_1，a_2，$a_3, \cdots,\ a_{k-1}$ を a_k で割った余りは，それぞれ，a_1，a_2，$a_3, \cdots,\ a_{k-1}$ である．
$l = 1, 2, 3, \cdots, k$ について，次が成立することを示す．

$$(*) \quad a_{k+l} \equiv a_l \pmod{a_k}$$

が成立することを示す．

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= {a_k}^2 + 1 \equiv 0^2 + 1 = a_1 && \pmod{a_k} \\ a_{k+2} &= {a_{k+1}}^2 + 1 \equiv {a_1}^2 + 1 = a_2 && \pmod{a_k} \\ a_{k+3} &= {a_{k+2}}^2 + 1 \equiv {a_2}^2 + 1 = a_3 && \pmod{a_k} \\ &\ \ \vdots \\ a_{2k-1} &= {a_{k+(k-2)}}^2 + 1 \equiv {a_{k-2}}^2 + 1 = a_{k-1} && \pmod{a_k} \\ a_{2k} &= {a_{k+(k-1)}}^2 + 1 \equiv {a_{k-1}}^2 + 1 = a_k \equiv 0 && \pmod{a_k} \end{aligned}$$

これから，$(*)$ が成立し，特に $a_{k+l} \equiv 0 \pmod{a_k}$ となるのは，$l = k$ のときに限る．したがって，a_k の倍数は

$$a_k,\ a_{2k},\ a_{3k}, \cdots$$

よって，a_n が a_k の倍数となるための必要十分条件は　**n が k の倍数**

補足 k の値について実験を行い，結論を予想する．整数 $p,\ q$ について，p が q の倍数 (q が p の約数) であることを，$q\,|\,p$ と書く．

$b=a^2+1$，$c=b^2+1$，$d=c^2+1$，$e=d^2+1$ とおく．

(i) $k=1$ のとき，$a_1=1$ であるから，正の整数 n について　$a_1\,|\,a_n$

(ii) $k=2$ のとき，$a_2=2$．$a\equiv 0 \pmod 2$ とすると

$$\begin{aligned} b&=a^2+1\equiv 0^2+1\equiv 1 &\pmod 2\\ c&=b^2+1\equiv 1^2+1\equiv 0 &\pmod 2 \end{aligned}$$

したがって，順次，$a_2,\ a_4,\ a_6,\cdots$ は a_2 の倍数である．
よって，n が 2 の倍数のとき　$a_2\,|\,a_n$

(iii) $k=3$ のとき，(1) の結論から，n が 3 の倍数のとき　$a_3\,|\,a_n$

(iv) $k=4$ のとき，$a_4={a_3}^2+1=5^2+1=26$．$a\equiv 0 \pmod{26}$ とすると

$$\begin{aligned} b&=a^2+1\equiv 0^2+1\equiv 1 &\pmod{26}\\ c&=b^2+1\equiv 1^2+1\equiv 2 &\pmod{26}\\ d&=c^2+1\equiv 2^2+1\equiv 5 &\pmod{26}\\ e&=d^2+1\equiv 5^2+1\equiv 0 &\pmod{26} \end{aligned}$$

したがって，順次，$a_4,\ a_8,\ a_{12},\cdots$ は a_4 の倍数である．
よって，n が 4 の倍数のとき　$a_4\,|\,a_n$

(i)〜(iv) から，「$k\,|\,n \iff a_k\,|\,a_n$」が予想される．

(3) (2) の結論から，a_{4k} は a_k の倍数．$k=2022$ とおくと，$8091=4k+3$ より

$$
\begin{aligned}
a_{4k+1} &= {a_{4k}}^2+1 \equiv 0^2+1=1 && \pmod{a_k}\\
a_{4k+2} &= {a_{4k+1}}^2+1 \equiv 1^2+1=2 && \pmod{a_k}\\
a_{4k+3} &= {a_{4k+2}}^2+1 \equiv 2^2+1=5 && \pmod{a_k}\\
{a_{4k+3}}^2 &\equiv 5^2=25 && \pmod{a_k}
\end{aligned}
$$

ユークリッドの互除法により

(∗∗)　${a_{4k+3}}^2$ と a_k の最大公約数は，a_k と 25 の最大公約数．

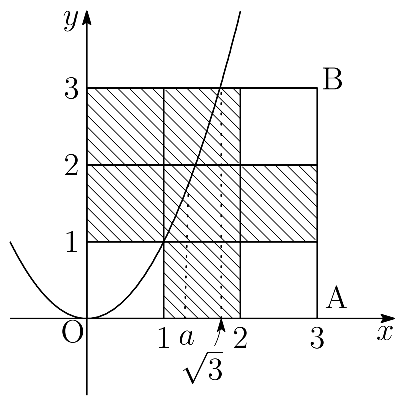
$b=a^2+1$，$c=b^2+1$，$d=c^2+1$ とおくと，$a\equiv 1 \pmod{25}$ のとき

$$
\begin{aligned}
b &= a^2+1 \equiv 0^2+1 \equiv 1 && \pmod{25}\\
c &= b^2+1 \equiv 1^2+1 \equiv 2 && \pmod{25}\\
d &= c^2+1 \equiv 2^2+1 \equiv 5 && \pmod{25}\\
e &= d^2+1 \equiv 5^2+1 \equiv 1 && \pmod{25}
\end{aligned}
$$

$a_1=1$ より，k が 3 の倍数のとき　$a_k\equiv 5 \pmod{25}$
これから a_k は 5 で割り切れるが，25 で割り切れない．
(∗∗) より，求める最大公約数は　**5**

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) D で (ii) を満たす点 P の表す領域は図の斜線部分である．放物線上の点 $(a,\ a^2+1)$ がこの領域にあるから

$$\mathbf{1 \leqq a \leqq \sqrt{3}}$$



(2) (1) の結果に注意して，$a^2+1 \leqq 3$ および $3 \leqq a^2+1$，すなわち，$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ および $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ で場合分けを行う．

(i) $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$ のとき

$1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 3$ における点 Q の領域の面積は　$(3-2)\cdot 1 = 1$

$0 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2$ における点 Q の領域の領域は　$(3-2)\cdot 1 = 1$

$0 \leqq x \leqq 1,\ 2 \leqq y \leqq 3$ における点 Q の領域の領域は

$$1-\{1-(a-1)\}\{(a^2+1)-2\} = a^3-2a^2-a+3$$

したがって　$f(a) = 1+1+(a^3-2a^2-a+3) = a^3-2a^2-a+5$

(ii) $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$ のとき

$1 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 1$ における点 Q の領域の面積は　1

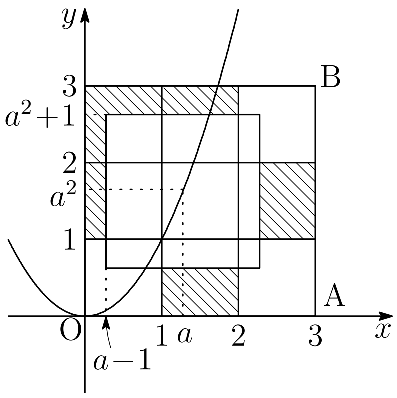
$0 \leqq x \leqq 3,\ 1 \leqq y \leqq 2$ における点 Q の領域の面積は

$$3\cdot 1 - 2\{2-(a^2-1)\} = 2a^2-3$$

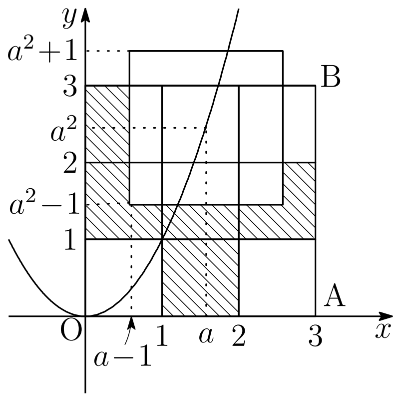
$0 \leqq x \leqq 1,\ 2 \leqq y \leqq 3$ における点 Q の領域の面積は　$1(a-1) = a-1$

したがって　$f(a) = 1+(2a^2-3)+(a-1) = 2a^2+a-3$

i) $1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$



ii) $\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}$



よって　$\boldsymbol{f(a) = \begin{cases} a^3-2a^2-a+5 & (1 \leqq a \leqq \sqrt{2}) \\ 2a^2+a-3 & (\sqrt{2} \leqq a \leqq \sqrt{3}) \end{cases}}$

(3) $f(a)$ は $1 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ で連続であり

$$f'(a) = \begin{cases} 3a^2-4a-1 = 3\left(a-\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{3} & (1 < a < \sqrt{2}) \\ 4a+1 & (\sqrt{2} < a < \sqrt{3}) \end{cases}$$

$1 < a < \sqrt{2}$ で $f'(a) < 5-4\sqrt{2} < 0$，$\sqrt{2} < a < \sqrt{3}$ で $f'(a) > 0$．

よって，$f(a)$ を最小にする a の値は　　$\boldsymbol{a = \sqrt{2}}$　■

4 (1) 点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通り，傾き m の直線を ℓ とすると，その方程式は

$$y-b=m(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y=mx-ma+b$$

$C: y=x^3-x$ と $\ell: y=mx-ma+b$ の方程式から，y を消去すると

$$x^3-x=mx-ma+b \quad \text{ゆえに} \quad x^3-(m+1)x+ma-b=0 \qquad (*)$$

$f(x)=x^3-(m+1)x+ma-b$ とおくと，ℓ と C が異なる 3 点で交わるとき，3 次関数 $f(x)$ は極値をもち，極値を与える x の値は 2 次方程式 $f'(x)=0$ の異なる 2 つの実数解であるから

$$3x^2-(m+1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\pm\sqrt{\frac{m+1}{3}} \quad (m>-1)$$

ここで，$k=\sqrt{\dfrac{m+1}{3}}\cdots$ ① とおくと $(k>0)$

$$f(x)=x^3-3k^2x+(3k^2-1)a-b$$

極大値 $f(-k)$，極小値 $f(k)$ は

$$f(-k)=2k^3+(3k^2-1)a-b, \quad f(k)=-2k^3+(3k^2-1)a-b$$

上の 2 式から，十分大きい k の値に対して

$$\begin{aligned} f(-k)f(k) &= \{(3k^2-1)a-b\}^2-4k^6 \\ &= k^6\left\{\left(\frac{3a}{k}-\frac{a+b}{k^3}\right)^2-4\right\}<0 \end{aligned}$$

① より，ℓ の傾き m が十分に大きいとき，条件 (i) を満たす．

(2) 3 次方程式 $f(x)=0$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とすると $(\alpha<\beta<\gamma)$，点 P が条件 (ii) を満たすとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\beta^\gamma\{-f(x)\}\,dx \quad \text{ゆえに} \quad \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx=0 \qquad (**)$$

このとき，$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ であるから

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}(x-\gamma) \\ &= -(x-\alpha)^2(\gamma-x)+(\beta-\alpha)(x-\alpha)(\gamma-x) \end{aligned}$$

したがって[1]

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\gamma f(x)\,dx &= -\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)^2(\gamma-x)\,dx + (\beta-\alpha)\int_\alpha^\gamma (x-\alpha)(\gamma-x)\,dx \\ &= -\frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^4 + (\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{6}(\gamma-\alpha)^3 \\ &= \frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3\{-(\gamma-\alpha)+2(\beta-\alpha)\} \\ &= \frac{1}{12}(\gamma-\alpha)^3(-\alpha+2\beta-\gamma)\end{aligned}$$

$(**)$ より　$-\alpha+2\beta-\gamma=0 \quad \cdots ②$

また，3 次方程式 $(*)$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-m-1, \quad \alpha\beta\gamma=-ma+b$$

上の 3 式と ② から $(\alpha<\beta<\gamma)$

$$-\alpha=\gamma>0, \quad \beta=0, \quad m=\gamma^2-1, \quad -ma+b=0$$

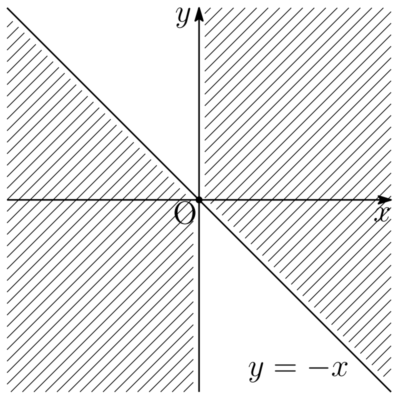
これから，直線 ℓ の方程式は　$y=(\gamma^2-1)x \quad (\gamma>0)$

(i) $x=0$ のとき　$y=0$

(ii) $x>0$ のとき，直線 $y=-x$ の上側で境界線を含まない．

(iii) $x<0$ のとき，直線 $y=-x$ の下側で境界線を含まない．

以上の結果から，点 P の表す領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．ただし，原点を含む．



■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/Tdai/Tdai_ri_2020.pdf (p.8 を参照)

5 P が線分 AB 上にあるとき，$\mathrm{P}(2-2t,\ 0,\ 2t)$ とする $\left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$.

P から xy 平面に垂線 PR を引くと　$\mathrm{R}(2-2t,\ 0,\ 0)$

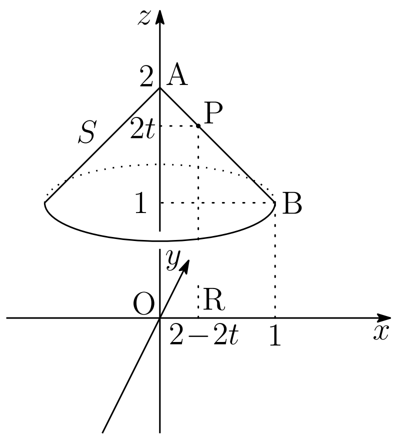
直角三角形 PQR において，$\mathrm{PQ}=2$，$\mathrm{PR}=2t$ であるから

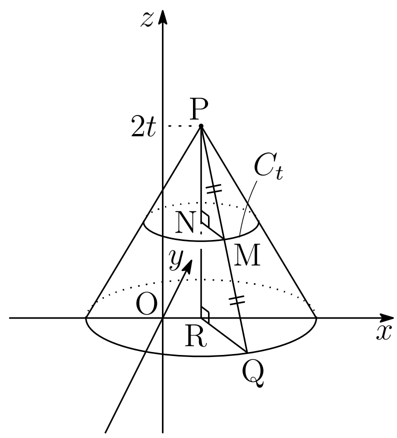
$$\mathrm{QR}=\sqrt{\mathrm{PQ}^2-\mathrm{PR}^2}=\sqrt{2^2-(2t)^2}=2\sqrt{1-t^2}$$

PR の中点を N とすると，中点連結定理により

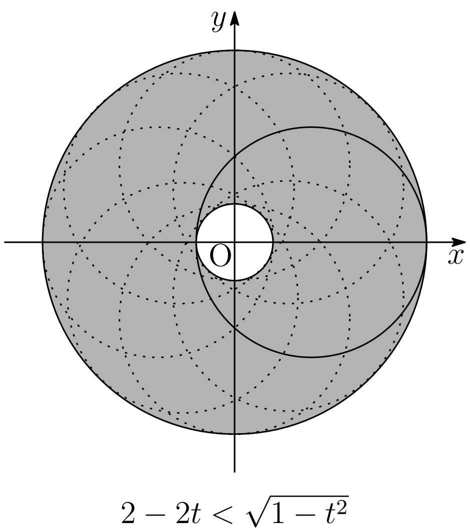
$$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\mathrm{QR}=\sqrt{1-t^2}$$

したがって，平面 $z=t$ における中心 $(2-2t,\ 0,\ 0)$，半径 $\sqrt{1-t^2}$ の円を C_t とすると，M は C_t 上にある．

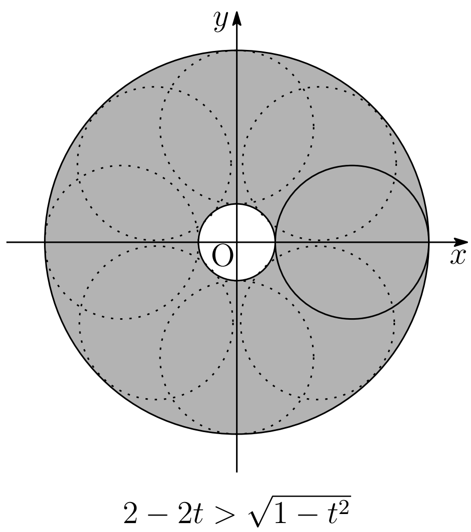




C_t の x 座標 $2-2t$ および半径 $\sqrt{1-t^2}$ の大小関係により，点 P が S 上にあるから，点 M が通過する範囲は，次の領域 (C_t の包絡線) を描く．



$2-2t<\sqrt{1-t^2}$



$2-2t>\sqrt{1-t^2}$

K の $z=t$ における断面積を $S(t)$ とすると $\left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$

$$\begin{aligned} S(t) &= \pi\left\{(2-2t)+\sqrt{1-t^2}\right\}^2 - \pi\left|(2-2t)-\sqrt{1-t^2}\right|^2 \\ &= 4\pi(2-2t)\sqrt{1-t^2} \\ &= 8\pi\sqrt{1-t^2} - 8\pi t\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

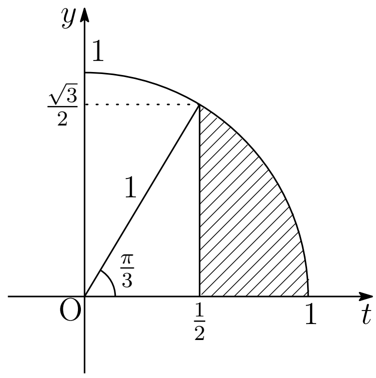
K の体積を V とすると

$$\frac{V}{8\pi} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{S(t)}{8\pi}\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt - \int_{\frac{1}{2}}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt \tag{$*$}$$

ここで

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt$$

は，右の図の斜線部分の面積と等しいから



$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1-t^2}\,dt &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \cdots ① \end{aligned}$$

また $\displaystyle \int_{\frac{1}{2}}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,dt = \left[-\frac{1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{\sqrt{3}}{8} \quad \cdots ②$

①，② を $(*)$ に代入すると

$$\frac{V}{8\pi} = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right) - \frac{\sqrt{3}}{8} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

よって $\displaystyle V = 8\pi\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boldsymbol{\pi\left(\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}\right)}$ ■

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $\vec{v}_k = \left(\cos\dfrac{2k\pi}{3},\ \sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ より

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_3 = \vec{v}_6 = \cdots, \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_4 = \vec{v}_7 = \cdots, \quad \vec{v}_2 = \vec{v}_5 = \vec{v}_8 = \cdots$$

$\vec{u}_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ を次のように定める．

$$\vec{u}_j = \begin{cases} \vec{v}_k & (j\text{ 回目で表が出て}, k\text{ は }j\text{ 回目までに裏が出た回数}) \\ \vec{0} & (j\text{ 回目で裏が出る}) \end{cases}$$

与えられた漸化式から

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}_n = \sum_{j=1}^{n} \vec{u}_j$$

$\vec{u}_j \in \left\{\vec{0},\ \vec{v}_0,\ \vec{v}_1,\ \vec{v}_2\right\}$ であり，上式の右辺の $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ の個数をそれぞれ a, b, c とすると，X_n が O にあるとき，$\vec{v}_0 = -(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$ により

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OX}}_n &= a\vec{v}_0 + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 = -a(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + b\vec{v}_1 + c\vec{v}_2 \\ &= (b-a)\vec{v}_1 + (c-a)\vec{v}_2 = \vec{0} \end{aligned}$$

$\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ は，1 次独立であるから

$$b - a = c - a = 0 \quad \text{すなわち} \quad a = b = c \qquad (*)$$

このとき，$a + b + c \leqq 8$ であるから　$a = b = c = 0,\ 1,\ 2$

(i) $a = b = c = 0$ のとき，8 回とも裏が出る確率であるから　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

(ii) $a = b = c = 1$ のとき，裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を α_k とすると $(k = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OX}}_8 &= \alpha_0\vec{v}_0 + \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 + \alpha_4\vec{v}_4 + \alpha_5\vec{v}_5 \\ &= (\alpha_0 + \alpha_3)\vec{v}_0 + (\alpha_1 + \alpha_4)\vec{v}_1 + (\alpha_2 + \alpha_5)\vec{v}_2 = \vec{0} \end{aligned}$$

$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 3$，$\alpha_0 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_5$ より

$$\alpha_0 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4 = \alpha_2 + \alpha_5 = 1$$

このときの確率は　$2^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

(iii) $a=b=c=2$ のとき，裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を β_k とすると $(k=0,1,2)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}_8}=\beta_0\vec{v}_0+\beta_1\vec{v}_1+\beta_2\vec{v}_2=\vec{0}$$

$\beta_0+\beta_1+\beta_2=6$，$\beta_0=\beta_1=\beta_2$ より

$$\beta_0=\beta_1=\beta_2=2$$

このときの確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^8$

(i)〜(iii) より，求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^8+2^3\left(\frac{1}{2}\right)^8+\left(\frac{1}{2}\right)^8=10\left(\frac{1}{2}\right)^8=\mathbf{\frac{5}{128}}$$

(2) $(*)$ より，X_n が O にあるとき，表の出た回数 $r=a+b+c$ について，$a=b=c$ であるから，r は 3 の倍数である．まず

$$p_r=0 \quad (r\not\equiv 0 \pmod 3)$$

$r\equiv 0 \pmod 3$，すなわち，$r=3s$ のとき $(s=0,1,2,\cdots,66)$，裏が k 回出た後に表が連続して出た回数を t_k とすると

$$\begin{aligned}t_0+t_3+t_6+\cdots+t_{198-3s}&=s\\t_1+t_4+t_7+\cdots+t_{199-3s}&=s\\t_2+t_5+t_8+\cdots+t_{200-3s}&=s\end{aligned}$$

上の 3 式を満たす t_k の組は，すべて

$${}_{67-s}\mathrm{H}_s={}_{(67-s)+s-1}\mathrm{C}_s={}_{66}\mathrm{C}_s$$

このとき $\quad p_{3s}=({}_{66}\mathrm{C}_s)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{200}=\dfrac{({}_{66}\mathrm{C}_s)^3}{2^{200}} \qquad (**)$

よって $\quad \boldsymbol{p_r}=\begin{cases}\mathbf{0} & (\boldsymbol{r}\not\equiv\mathbf{0})\\ \dfrac{\left({}_{\mathbf{66}}\mathbf{C}_{\frac{r}{3}}\right)^{\mathbf{3}}}{\mathbf{2^{200}}} & (\boldsymbol{r}\equiv\mathbf{0})\end{cases} \quad \mathbf{(mod\ 3)}$

p_r が最大となるのは，(**) より，${}_{66}\mathrm{C}_s$ が最大となるときである．

$$\frac{{}_{66}\mathrm{C}_{s+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_s} = \frac{66!}{(s+1)!(65-s)!} \cdot \frac{s!(66-s)!}{66!} = \frac{66-s}{s+1}$$

ゆえに　$\dfrac{{}_{66}\mathrm{C}_{s+1}}{{}_{66}\mathrm{C}_s} - 1 = \dfrac{65-2s}{s+1}$

したがって

$${}_{66}\mathrm{C}_0 < {}_{66}\mathrm{C}_1 < \cdots < {}_{66}\mathrm{C}_{32} < {}_{66}\mathrm{C}_{33} > {}_{66}\mathrm{C}_{34} > \cdots > {}_{66}\mathrm{C}_{66}$$

よって，$s = 33$，すなわち，$\boldsymbol{r = 99}$ のとき p_r は最大となる． ■