令和３年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5 6

1 $a,\ b$ を実数とする．座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の x 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の x 座標は $0 < x < 1$ を満たす．

(1) 点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．

(2) 放物線 C の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ．

2 複素数 $a,\ b,\ c$ に対して整式 $f(z) = az^2 + bz + c$ を考える．i を虚数単位とする．

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とする．$f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta,\ f(i) = \gamma$ が成り立つとき，$a,\ b,\ c$ をそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ で表せ．

(2) $f(0),\ f(1),\ f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

3 関数

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

に対して，$y = f(x)$ のグラフを C とする．点 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$ における C の接線を

$$\ell : y = g(x)$$

とする．

(1) C と ℓ の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し，その点の x 座標を求めよ．

(2) (1) で求めた共有点の x 座標を α とする．定積分

$$\int_{\alpha}^{1} \{f(x) - g(x)\}^2\, dx$$

を計算せよ．

4 以下の問いに答えよ．

(1) 正の奇数 $K,\ L$ と正の整数 $A,\ B$ が $KA = LB$ を満たしているとする．K を 4 で割った余りが L を 4 で割った余りと等しいならば，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

(2) 正の整数 $a,\ b$ が $a > b$ を満たしているとする．このとき，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 $K,\ L$ が存在することを示せ．

(3) $a,\ b$ は (2) の通りとし，さらに $a - b$ が 2 で割り切れるとする．${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を 4 で割った余りと等しいことを示せ．

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を 4 で割った余りを求めよ．

5 α を正の実数とする．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-\alpha, -3)$，$\mathrm{P}(\theta + \sin\theta,\ \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める．

(1) $0 < \theta < \pi$ の範囲に $f'(\theta) = 0$ となる θ がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) 以下が成り立つような α の範囲を求めよ．

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における θ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる．

6 定数 $b,\ c,\ p,\ q,\ r$ に対し，

$$x^4 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

が x についての恒等式であるとする．

(1) $p \neq 0$ であるとき，$q,\ r$ を $p,\ b$ で表せ．

(2) $p \neq 0$ とする．$b,\ c$ が定数 a を用いて

$$b = (a^2 + 1)(a + 2), \quad c = -\left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

と表されているとき，有理数を係数とする t についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2 - (a^2 + 1)\}\{p^4 + f(a)p^2 + g(a)\} = 0$$

を満たすものを 1 組求めよ．

(3) a を整数とする．x の 4 次式

$$x^4 + (a^2 + 1)(a + 2)x - \left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような a をすべて求めよ．

解答例

1 (1) $C : y = x^2 + ax + b$ と $y = -x^2$ の 2 式から y を消去して整理すると

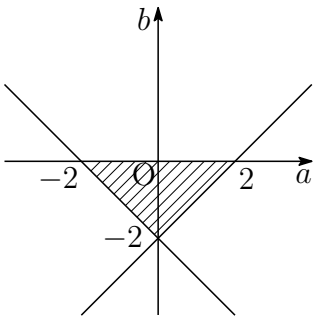
$$2x^2 + ax + b = 0$$

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ とおく．C と $y = -x^2$ の共有点の x 座標が $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$ であるとき，次を満たせばよい．

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 > 0 \\ f(0) = b < 0 \\ f(1) = a + b + 2 > 0 \end{cases}$$

それぞれ整理すると

$$\begin{cases} b > a - 2 \\ b < 0 \\ b > -a - 2 \end{cases}$$



よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界線を含まない．

(2) C の方程式から，$b = -xa + y - x^2$ であるから

$$g(a) = -xa + y - x^2$$

とおくと，$b = g(a)$ は，傾き $-x$，切片 $y - x^2$ の直線である．
これが (1) で求めた領域を通る条件，切片に注目して求めればよい．

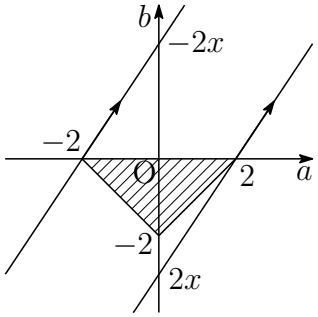
(i) $x \leqq -1$ のとき

$$2x < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 2x < y < x^2 - 2x \quad (x \leqq -1)$$

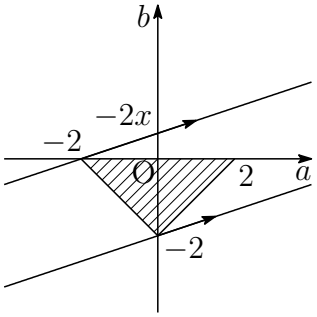
(ii) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき

$$-2 < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2 < y < x^2 - 2x \quad (-1 \leqq x \leqq 0)$$

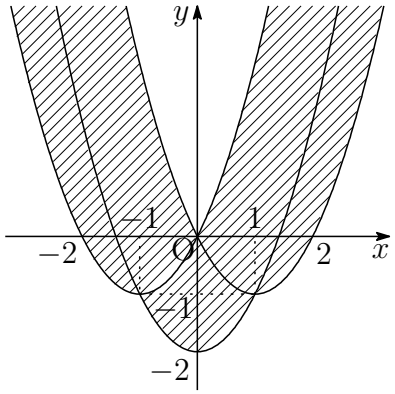
(i) $x \leqq -1$ のとき



(ii) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき



$C : y = x^2 + ax + b$ と放物線 $y = -x^2$ が $-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$ の区間でそれぞれ共有点をもつから，x と $-x$ の対称性に注意すると，$x \leqq 0$ で C の通りうる範囲と $0 \leqq x$ で C の通りうる範囲は y 軸について対称である．よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．



■

2 (1) $f(z) = az^2 + bz + c$ について，$f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta,\ f(i) = \gamma$ であるから

$$\boldsymbol{c = \alpha}, \quad a + b + c = \beta, \quad -a + bi + c = \gamma$$

上の第 1 式を第 2 式，第 3 式に代入して整理すると

$$\begin{cases} a + b = \beta - \alpha & \cdots ① \\ -a + bi = \gamma - \alpha & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より　$(1 + i)b = \beta + \gamma - 2\alpha$

$$b = \frac{\beta + \gamma - 2\alpha}{1 + i} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\beta + \gamma - 2\alpha)(1 - i)}$$

① $\times\, i$ − ② より　$(1 + i)a = (\beta - \alpha)i + \alpha - \gamma$

$$a = \frac{(\beta - \alpha)i + \alpha - \gamma}{1 + i} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\{(\beta - \gamma) + (\beta + \gamma - 2\alpha)i\}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(2) &= 4a + 2b + c \\ &= 2(\beta - \gamma) + 2(\beta + \gamma - 2\alpha)i + (\beta + \gamma - 2\alpha)(1 - i) + \alpha \\ &= -\alpha + 3\beta - \gamma + (-2\alpha + \beta + \gamma)i \end{aligned}$$

$f(2)=x+yi$ とすると，$1 \leqq \alpha, \beta, \gamma \leqq 2$ に注意して

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha+3\beta-\gamma \\ -2\alpha+\beta+\gamma \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

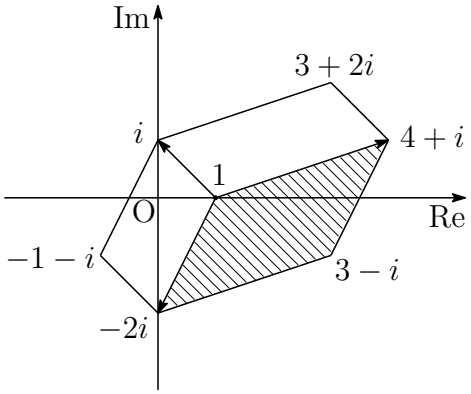
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\alpha-1)\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + (\beta-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (\gamma-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\gamma=1$ のとき，$f(2)=x+yi$ のとりうる範囲は，左下の図のように点 1 を始点として，$-1-2i$，$3+i$ の張る平行四辺形の内部で境界線を含む．
よって，求める領域は，この平行四辺形を $-1+i$ だけ平行移動したときに描く軌跡の領域であるから，右下の図のように複素数平面上の 6 点

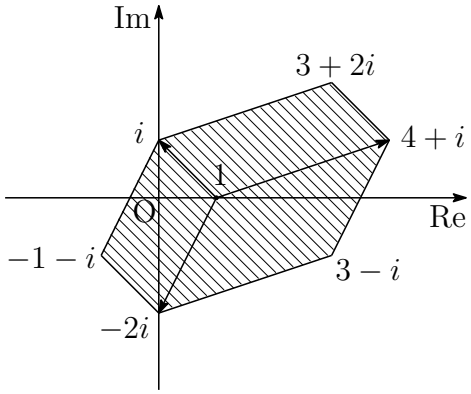
$$-2i,\quad 3-i,\quad 4+i,\quad 3+2i,\quad i,\quad -1-i$$

を頂点とする六角形の内部で境界線を含む．

$1 \leqq \alpha, \beta \leqq 2,\ \gamma=1$



$1 \leqq \alpha, \beta, \gamma \leqq 2$



■

3 (1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ より　$f'(x)=\dfrac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$　$f(1)=\dfrac{1}{4}$，$f'(1)=\dfrac{1}{8}$

ℓ は点 $\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{8}$ の直線であるから

$$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}(x-1) \quad \text{ゆえに} \quad \ell : y=\frac{1}{8}(x+1)$$

$C : y=f(x)$ と $\ell : y=\dfrac{1}{8}(x+1)$ の共有点の x 座標は

$$\frac{x}{x^2+3}=\frac{1}{8}(x+1) \quad \text{整理すると} \quad x^3+x^2-5x+3=0$$

ゆえに　$(x-1)^2(x+3)=0$　これを解いて　$\boldsymbol{x=-3}$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$, $g(x)=\dfrac{1}{8}(x+1)$ であるから

$$\begin{aligned}\{f(x)-g(x)\}^2&=\left\{\frac{x}{x^2+3}-\frac{1}{8}(x+1)\right\}^2\\&=\left(\frac{x}{x^2+3}\right)^2-\frac{x(x+1)}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\\&=\frac{(x^2+3)-3}{(x^2+3)^2}-\frac{(x^2+3)+x-3}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\\&=-\frac{3}{(x^2+3)^2}+\frac{7}{4(x^2+3)}-\frac{1}{4}-\frac{x}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\end{aligned}$$

ここで，次の 2 つの定積分を

$$I=\int_{-3}^{1}\left\{-\frac{3}{(x^2+3)^2}+\frac{7}{4(x^2+3)}\right\}dx,$$
$$J=\int_{-3}^{1}\left\{-\frac{1}{4}-\frac{x}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\right\}dx$$

とおくと

$$\int_{-3}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx=I+J$$

$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと $\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$

x	$-3 \longrightarrow 1$
θ	$-\frac{\pi}{3} \longrightarrow \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned}I&=\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left(-\frac{1}{3}\cos^2\theta+\frac{7}{12}\right)d\theta\\&=\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{6}\cos 2\theta\right)d\theta\\&=\sqrt{3}\left[\ \frac{5}{12}\theta-\frac{1}{12}\sin 2\theta\ \right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{5\pi}{24}\sqrt{3}-\frac{1}{4},\\J&=\left[-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\log(x^2+3)+\frac{1}{192}(x+1)^3\ \right]_{-3}^{1}\\&=-\frac{11}{12}+\frac{1}{8}\log 3\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\int_{-3}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx=\left(\frac{5\pi}{24}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{11}{12}+\frac{1}{8}\log 3\right)$

$$=\boldsymbol{\frac{5\pi}{24}\sqrt{3}+\frac{1}{8}\log 3-\frac{7}{6}}$$

■

4 (1) $KA = LB$ より

$$KA - KB = LB - KB \quad \text{ゆえに} \quad K(A-B) = (L-K)B$$

K, L をそれぞれ 4 で割った余りが等しいから $L - K \equiv 0 \pmod 4$

$$K(A-B) \equiv 0 \pmod 4$$

K は正の奇数であるから $A - B \equiv 0$ すなわち $A \equiv B \pmod 4$

よって，A を 4 で割った余りは，B を 4 で割った余りと等しい．

(2) $A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} = \displaystyle\prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j}$，$B = {}_a\mathrm{C}_b = \displaystyle\prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k}$ より

$$\begin{aligned}
A &= \prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j} \\
&= \prod_{k=0}^{b} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+1)}{4b+1-(4k+1)} \\
&\qquad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+2)}{4b+1-(4k+2)} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+3)}{4b+1-(4k+3)} \\
&= (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k} \\
&\qquad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-1-4k}{4b-1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{2a-1-2k}{2b-1-2k} \\
&= (4a+1-4b)B \prod_{k=0}^{b-1} \frac{(4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k)}{(4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k)}
\end{aligned}$$

これから，正の奇数 K, L を

$$K = \prod_{k=0}^{b-1} (4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k)$$

$$L = (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} (4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k)$$

とおくと，次式を満たす正の奇数 K, L が存在する．

$$A = \frac{LB}{K} \quad \text{すなわち} \quad KA = LB$$

(3) 2 つの奇数 $K,\ L$ の因数は，法 4 について ($a-b$ は 2 で割り切れる)

$$\begin{aligned}
&4a+1-4b \equiv 1 && \pmod 4\\
&4b+1-4k \equiv 4a+1-4k && \pmod 4\\
&4b-1-4k \equiv 4a-1-4k && \pmod 4\\
&2b-1-2k = 2a-1-2k-2(a-b) \equiv 2a-1-2k && \pmod 4
\end{aligned}$$

したがって，2 つの奇数 $K,\ L$ について　$K \equiv L \pmod 4$
これと $A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_a\mathrm{C}_b$ を (1) の結論に適用すると

$$(*)\quad {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} \equiv {}_a\mathrm{C}_b \qquad \pmod 4$$

よって，${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは，${}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しい.

(4) $(*)$ の左辺は $a=505,\ b=9$ を代入したもので $a-b$ は 2 で割り切れるから

$${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv {}_{505}\mathrm{C}_9 \qquad \pmod 4$$

さらに，上式の右辺は，$(*)$ の左辺に $a=126,\ b=2$ を代入したもので $a-b$ は 2 で割り切れるから

$${}_{505}\mathrm{C}_9 \equiv {}_{126}\mathrm{C}_2 \qquad \pmod 4$$

このとき　${}_{126}\mathrm{C}_2 = \dfrac{126\cdot125}{2\cdot1} = 63\cdot125 \equiv 3\cdot1 \equiv 3 \pmod 4$
したがって　${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv 3 \pmod 4$　よって　求める余りは　**3**

別解 (1) K を 4 で割った余りと L を 4 で割った余りが等しいので，$K \equiv L \pmod 4$ である．これと $KA = LB$ より，

$$KA = LB \equiv KB \pmod 4$$

となる．よって $K(A-B) \equiv 0 \pmod 4$，すなわち $K(A-B)$ は 4 の倍数である．K は奇数なので 4 と互いに素であり，$A-B$ は 4 の倍数である．したがって $A \equiv B \pmod 4$ となり，A を 4 で割った余りは B を 4 で割った余りと等しい． **証終**

(2)

$$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} = \frac{(4a+1)!}{(4b+1)!\,(4a-4b)!} = \frac{4a+1}{4b+1} \cdot {}_{4a}\mathrm{C}_{4b}$$

であり，

$${}_{4a}\mathrm{C}_{4b} = \prod_{j=0}^{4b-1} \frac{4a-j}{4b-j}$$

である．右辺の積を j を 4 で割った余りによって分けて考える．

- $j = 4i$（$i = 0, 1, \ldots, b-1$）のとき，因子は $\dfrac{4(a-i)}{4(b-i)} = \dfrac{a-i}{b-i}$ であり，これらの積は
$$\prod_{i=0}^{b-1} \frac{a-i}{b-i} = {}_a\mathrm{C}_b = B$$
- j が奇数のとき，$4a-j$，$4b-j$ はともに正の奇数である．
- $j = 4i+2$（$i = 0, 1, \ldots, b-1$）のとき，因子は
$$\frac{2(2a-2i-1)}{2(2b-2i-1)} = \frac{2a-2i-1}{2b-2i-1}$$
であり，$2a-2i-1$，$2b-2i-1$ はともに正の奇数である．

そこで

$$L = (4a+1) \prod_{\substack{0 \leqq j \leqq 4b-1 \\ j\text{: 奇数}}} (4a-j) \prod_{i=0}^{b-1} (2a-2i-1),$$

$$K = (4b+1) \prod_{\substack{0 \leqq j \leqq 4b-1 \\ j\text{: 奇数}}} (4b-j) \prod_{i=0}^{b-1} (2b-2i-1)$$

とおくと，K，L は正の奇数の積であるから正の奇数である．さらに

$$A = \frac{L}{K} B$$

すなわち $KA = LB$ が成り立つ．よって条件をみたす正の奇数 K，L が存在する． **証終**

(3) (2) で定めた K，L について，対応する因子どうしを 4 を法として比較する．

- $4a+1 \equiv 1 \equiv 4b+1 \pmod 4$.
- j が奇数のとき，$4a-j \equiv -j \equiv 4b-j \pmod 4$.
- $i = 0, 1, \ldots, b-1$ に対し，

$$(2a-2i-1)-(2b-2i-1) = 2(a-b)$$

であり，$a-b$ は 2 で割り切れるから，$2(a-b)$ は 4 で割り切れる．
よって　$2a-2i-1 \equiv 2b-2i-1 \pmod 4$.

対応する因子がすべて 4 を法として合同であるから，それらの積について $L \equiv K \pmod 4$ が成り立つ．したがって (1) より，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは $B = {}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しい．　**証終**

(4) $2021 = 4 \cdot 505 + 1$，$37 = 4 \cdot 9 + 1$ であり，$a = 505$，$b = 9$ は $a > b$ をみたし，$a - b = 496$ は 2 で割り切れる．よって (3) より

$$ {}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv {}_{505}\mathrm{C}_9 \pmod 4$$

である．さらに $505 = 4 \cdot 126 + 1$，$9 = 4 \cdot 2 + 1$ であり，$a = 126$，$b = 2$ は $a > b$ をみたし，$a - b = 124$ は 2 で割り切れる．よって再び (3) より

$$ {}_{505}\mathrm{C}_9 \equiv {}_{126}\mathrm{C}_2 \pmod 4$$

である．ここで

$$ {}_{126}\mathrm{C}_2 = \frac{126 \cdot 125}{2 \cdot 1} = 63 \cdot 125 \equiv 3 \cdot 1 \equiv 3 \pmod 4$$

であるから，求める余りは　**3**　■

5 (1) $\mathrm{A}(-\alpha, -3)$，$\mathrm{P}(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$，$f(\theta)=\mathrm{AP}^2$ より

$$f(\theta)=(\theta+\sin\theta+\alpha)^2+(\cos\theta+3)^2$$

これを順次微分し，第 3 次導関数まで求めると

$$\begin{aligned}
f'(\theta)&=2(\theta+\sin\theta+\alpha)(1+\cos\theta)+2(\cos\theta+3)\cdot(-\sin\theta)\\
&=2(\theta-2\sin\theta+\alpha+\theta\cos\theta+\alpha\cos\theta),\\
f''(\theta)&=2(1-\cos\theta-\theta\sin\theta-\alpha\sin\theta),\\
f'''(\theta)&=-2(\theta+\alpha)\cos\theta
\end{aligned}$$

$\alpha>0$ であるから，$f''(\theta)$ の増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f''(\theta)$	0	↘	極小	↗	4

上の増減表から，次を満たす φ が唯一存在する

$$f''(\varphi)=0,\quad 0<\varphi<\pi$$

これから，$f'(\varphi)$ の増減表は次のようになる．

θ	0	$\cdots$	φ	$\cdots$	π
$f''(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f'(\theta)$	4α	↘	極小	↗	0

$f'(0)=4\alpha>0$ であるから，上の増減表より

$$f'(\psi)=0,\quad 0<\psi<\pi$$

を満たす ψ がただ一つ存在し，題意は証明された．

(2) (1) の結果から，$f(\theta)$ の増減表は

θ	0	$\cdots$	ψ	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		↗	極大	↘	

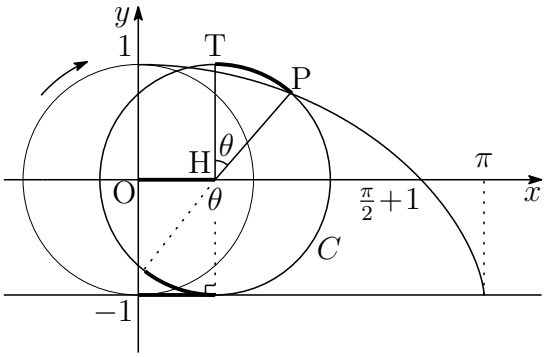
$\theta=\psi$ で最大であるから $\left(0<\psi<\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0 \quad \text{すなわち} \quad 2\left(\frac{\pi}{2}-2+\alpha\right)<0$$

$\alpha>0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{0<\alpha<2-\frac{\pi}{2}}$

補足 P の描く図形はサイクロイドである．半径 1 の円 C が下の図のように直線 $y=-1$ 上を滑ることなく転がるとき，C 上の定点 P が描く軌跡である．$\theta=0$ のとき，C の中心 H は原点 O，P は $(0,\ 1)$ にあるから，HP の偏角は $\dfrac{\pi}{2}-\theta$ である．点 T を $(\theta,\ 1)$ とすると，$\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\mathrm{OH}$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\begin{pmatrix}\theta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta+\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$



$x(\theta)=\theta+\sin\theta$，$y(\theta)=\cos\theta$，$\vec{v}=(x'(\theta),\ y'(\theta))$ とおくと

$$f(\theta)=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(x(\theta)+\alpha)^2+(y(\theta)+3)^2$$

これを θ について微分すると

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=2(x(\theta)+\alpha)x'(\theta)+2(y(\theta)+3)y'(\theta)\\&=2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

$f'(\theta)=0$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{v}=0$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{v}$

このとき，点 P における接ベクトル $\vec{v}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ は垂直である．　■

6 (1) (∗) $x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$

(∗) の右辺を展開すると

$$x^4+bx+c=x^4+(-p^2+q+r)x^2-p(q-r)x+qr$$

(∗) は x に関する恒等式であるから，同じ次数の項の係数を比較して

$$\begin{cases} -p^2+q+r=0 & \cdots ① \\ -p(q-r)=b & \cdots ② \\ qr=c & \cdots ③ \end{cases}$$

$p\neq 0$ のとき，①，② より

$$q+r=p^2,\quad q-r=-\frac{b}{p}$$

上の 2 式から $\quad \boldsymbol{q=\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right)},\quad \boldsymbol{r=\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)}$

(2) (1) の結果を ③ に代入すると

$$c=\frac{1}{4}\left(p^4-\frac{b^2}{p^2}\right)\quad \text{ゆえに}\quad p^6-4cp^2-b^2=0$$

上の第 2 式に $b=(a^2+1)(a+2)$，$c=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$ を代入すると

$$\begin{aligned} p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2&=0 \\ p^6+\{(a+2)^2-(a^2+1)\}(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2&=0 \\ p^6-(a^2+1)^2p^2+(a^2+1)(a+2)^2\{p^2-(a^2+1)\}&=0 \\ p^2\{p^2+(a^2+1)\}\{p^2-(a^2+1)\}& \\ +(a^2+1)(a+2)^2\{p^2-(a^2+1)\}&=0 \\ \{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}&=0 \end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{f(t)=t^2+1},\quad \boldsymbol{g(t)=(t^2+1)(t+2)^2}$

別解 (A) $p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2$ が

$$\text{(B)}\quad \{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}$$

であるから，p に関する定数項と 2 次の項の係数を比較して

$$\begin{cases} -(a^2+1)g(a)=-(a^2+1)^2(a+2)^2 \\ g(a)-(a^2+1)f(a)=(4a+3)(a^2+1) \end{cases}$$

第 1 式から　　$g(a)=(a^2+1)(a+2)^2$

これを第 2 式に代入すると

$$\begin{aligned} (a^2+1)(a+2)^2-(a^2+1)f(a)&=(4a+3)(a^2+1) \\ (a+2)^2-f(a)&=4a+3 \\ f(a)&=a^2+1 \end{aligned}$$

逆に，$f(a)=a^2+1$，$g(a)=(a^2+1)(a+2)^2$ を (B) に代入して展開すると，(A) を得る．よって，$\boldsymbol{f(t)=t^2+1}$，$\boldsymbol{g(t)=(t^2+1)(t+2)^2}$

(3) $b=(a^2+1)(a+2)$，$c=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$

(i) $p=0$ のとき，①〜③ により

$$q+r=0,\quad (a^2+1)(a+2)=0,\quad qr=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

上の第 2 式から　$a=-2$　これを第 3 式に代入して　$qr=\dfrac{25}{4}$

$q,\ r$ は 2 次方程式 $x^2+\dfrac{25}{4}=0$ の解で，実数解を持たず，不適.

(ii) $p\neq 0$ のとき，(2) の結果から

$$(**)\quad \{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}=0$$

を満たす p である．$(**)$ において

$$p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2>0$$

であるから，$p^2-(a^2+1)=0$　ゆえに　$p^2=a^2+1$

$(*)$ より，p は有理数で，$p=\dfrac{k}{l}$ とすると ($k,\ l$ は互いに素)

$$\frac{k^2}{l^2}=a^2+1$$

右辺は整数であるから，$l=1$ となり，p は整数.

$$p^2-a^2=1\quad (p+a)(p-a)=1$$

したがって　$\begin{cases} p+a=1 \\ p-a=1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} p+a=-1 \\ p-a=-1 \end{cases}$

これを解いて　$(p,\ a)=(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$

よって，求める a の値は　　$\boldsymbol{a=0}$ ■