# 令和３年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
## 理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ $a,\ b$ を実数とする．座標平面上の放物線

$$C : y = x^2 + ax + b$$

は放物線 $y = -x^2$ と 2 つの共有点を持ち，一方の共有点の $x$ 座標は $-1 < x < 0$ を満たし，他方の共有点の $x$ 座標は $0 < x < 1$ を満たす．

(1) 点 $(a,\ b)$ のとりうる範囲を座標平面上に図示せよ．

(2) 放物線 $C$ の通りうる範囲を座標平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 複素数 $a,\ b,\ c$ に対して整式 $f(z) = az^2 + bz + c$ を考える．$i$ を虚数単位とする．

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とする．$f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta,\ f(i) = \gamma$ が成り立つとき，$a,\ b,\ c$ をそれぞれ $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ で表せ．

(2) $f(0),\ f(1),\ f(i)$ がいずれも 1 以上 2 以下の実数であるとき，$f(2)$ のとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$$

に対して，$y = f(x)$ のグラフを $C$ とする．点 $\mathrm{A}(1,\ f(1))$ における $C$ の接線を

$$\ell : y = g(x)$$

とする．

(1) $C$ と $\ell$ の共有点で A と異なるものがただ 1 つ存在することを示し，その点の $x$ 座標を求めよ．

(2) (1) で求めた共有点の $x$ 座標を $\alpha$ とする．定積分

$$\int_{\alpha}^{1} \{f(x) - g(x)\}^2\, dx$$

を計算せよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) 正の奇数 $K$, $L$ と正の整数 $A$, $B$ が $KA = LB$ を満たしているとする．$K$ を $4$ で割った余りが $L$ を $4$ で割った余りと等しいならば，$A$ を $4$ で割った余りは $B$ を $4$ で割った余りと等しいことを示せ．

(2) 正の整数 $a$, $b$ が $a > b$ を満たしているとする．このとき，$A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$, $B = {}_{a}\mathrm{C}_{b}$ に対して $KA = LB$ となるような正の奇数 $K$, $L$ が存在することを示せ．

(3) $a$, $b$ は (2) の通りとし，さらに $a - b$ が $2$ で割り切れるとする．${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を $4$ で割った余りは ${}_{a}\mathrm{C}_{b}$ を $4$ で割った余りと等しいことを示せ．

(4) ${}_{2021}\mathrm{C}_{37}$ を $4$ で割った余りを求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\alpha$ を正の実数とする．$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における $\theta$ の関数 $f(\theta)$ を，座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-\alpha, -3)$，$\mathrm{P}(\theta + \sin\theta,\ \cos\theta)$ 間の距離 AP の 2 乗として定める．

(1) $0 < \theta < \pi$ の範囲に $f'(\theta) = 0$ となる $\theta$ がただ 1 つ存在することを示せ．

(2) 以下が成り立つような $\alpha$ の範囲を求めよ．

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における $\theta$ の関数 $f(\theta)$ は，区間 $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のある点において最大になる．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 定数 $b$, $c$, $p$, $q$, $r$ に対し，

$$x^4 + bx + c = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

が $x$ についての恒等式であるとする．

(1) $p \neq 0$ であるとき，$q$, $r$ を $p$, $b$ で表せ．

(2) $p \neq 0$ とする．$b$, $c$ が定数 $a$ を用いて

$$b = (a^2 + 1)(a + 2), \quad c = -\left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

と表されているとき，有理数を係数とする $t$ についての整式 $f(t)$ と $g(t)$ で

$$\{p^2 - (a^2 + 1)\}\{p^4 + f(a)p^2 + g(a)\} = 0$$

を満たすものを 1 組求めよ．

(3) $a$ を整数とする．$x$ の 4 次式

$$x^4 + (a^2 + 1)(a + 2)x - \left(a + \frac{3}{4}\right)(a^2 + 1)$$

が有理数を係数とする 2 次式の積に因数分解できるような $a$ をすべて求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $C : y = x^2 + ax + b$ と $y = -x^2$ の 2 式から $y$ を消去して整理すると

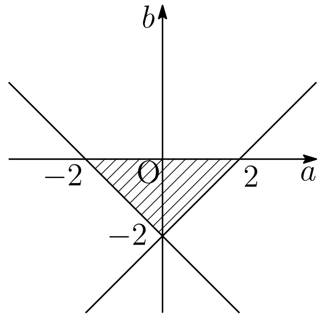
$$2x^2 + ax + b = 0$$

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ とおく．$C$ と $y = -x^2$ の共有点の $x$ 座標が $-1 < x < 0$，$0 < x < 1$ であるとき，次を満たせばよい．

$$\begin{cases} f(-1) = -a + b + 2 > 0 \\ f(0) = b < 0 \\ f(1) = a + b + 2 > 0 \end{cases}$$

それぞれ整理すると

$$\begin{cases} b > a - 2 \\ b < 0 \\ b > -a - 2 \end{cases}$$




よって，求める領域は，右の図の斜線部分で境界線を含まない．

(2) $C$ の方程式から，$b = -xa + y - x^2$ であるから

$$g(a) = -xa + y - x^2$$

とおくと，$b = g(a)$ は，傾き $-x$，切片 $y - x^2$ の直線である．
これが (1) で求めた領域を通る条件，切片に注目して求めればよい．

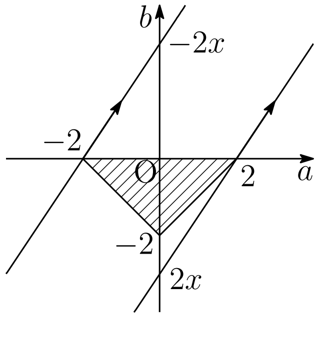
(i) $x \leqq -1$ のとき

$$2x < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + 2x < y < x^2 - 2x \ \ (x \leqq -1)$$

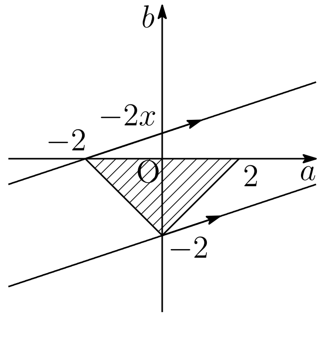
(ii) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき

$$-2 < y - x^2 < -2x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 2 < y < x^2 - 2x \ \ (-1 \leqq x \leqq 0)$$

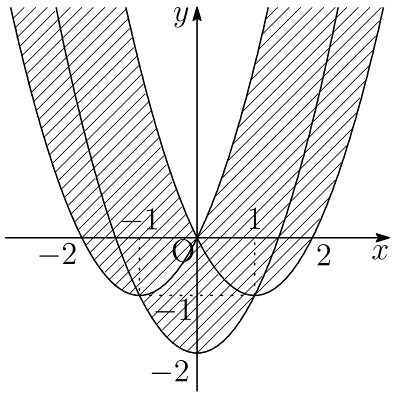
(i) $x \leqq -1$ のとき




(ii) $-1 \leqq x \leqq 0$ のとき



$C: y = x^2 + ax + b$ と放物線 $y = -x^2$ が $-1 < x < 0$ と $0 < x < 1$ の区間でそれぞれ共有点をもつから，$x$ と $-x$ の対称性に注意すると，$x \leqq 0$ で $C$ の通りうる範囲と $0 \leqq x$ で $C$ の通りうる範囲は $y$ 軸について対称である．よって，求める領域は，下の図の斜線部分で境界線を含まない．




**2** (1) $f(z) = az^2 + bz + c$ について，$f(0) = \alpha$, $f(1) = \beta$, $f(i) = \gamma$ であるから

$$\boldsymbol{c = \alpha}, \quad a + b + c = \beta, \quad -a + bi + c = \gamma$$

上の第 1 式を第 2 式，第 3 式に代入して整理すると

$$\begin{cases} a + b = \beta - \alpha & \cdots ① \\ -a + bi = \gamma - \alpha & \cdots ② \end{cases}$$

① + ② より　$(1 + i)b = \beta + \gamma - 2\alpha$

$$b = \frac{\beta + \gamma - 2\alpha}{1 + i} = \boldsymbol{\frac{1}{2}(\beta + \gamma - 2\alpha)(1 - i)}$$

① $\times\, i -$ ② より　$(1 + i)a = (\beta - \alpha)i + \alpha - \gamma$

$$a = \frac{(\beta - \alpha)i + \alpha - \gamma}{1 + i} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\{(\beta - \gamma) + (\beta + \gamma - 2\alpha)i\}}$$

(2) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(2) &= 4a + 2b + c \\ &= 2(\beta - \gamma) + 2(\beta + \gamma - 2\alpha)i + (\beta + \gamma - 2\alpha)(1 - i) + \alpha \\ &= -\alpha + 3\beta - \gamma + (-2\alpha + \beta + \gamma)i \end{aligned}$$

$f(2)=x+yi$ とすると，$1 \leqq \alpha,\beta,\gamma \leqq 2$ に注意して

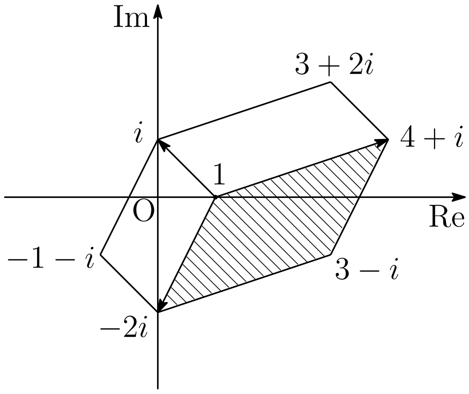
$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\alpha+3\beta-\gamma \\ -2\alpha+\beta+\gamma \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (\alpha-1)\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} + (\beta-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + (\gamma-1)\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$\gamma=1$ のとき，$f(2)=x+yi$ のとりうる範囲は，左下の図のように点 1 を始点として，$-1-2i$，$3+i$ の張る平行四辺形の内部で境界線を含む．
よって，求める領域は，この平行四辺形を $-1+i$ だけ平行移動したときに描く軌跡の領域であるから，右下の図のように複素数平面上の 6 点

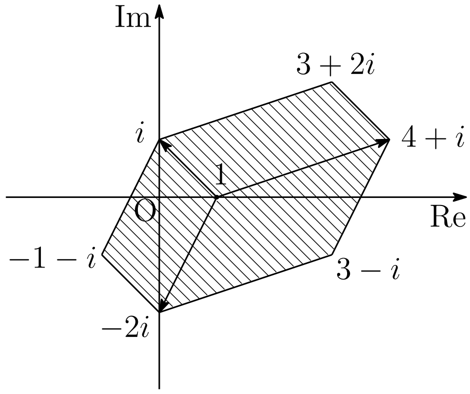
$$-2i,\ \ 3-i,\ \ 4+i,\ \ 3+2i,\ \ i,\ \ -1-i$$

を頂点とする六角形の内部で境界線を含む．

$1 \leqq \alpha,\beta \leqq 2,\ \gamma=1$




$1 \leqq \alpha,\beta,\gamma \leqq 2$




**3** (1) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$ より　$f'(x)=\dfrac{3-x^2}{(x^2+3)^2}$　　$f(1)=\dfrac{1}{4}$，$f'(1)=\dfrac{1}{8}$

$\ell$ は点 $\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$ を通り，傾き $\dfrac{1}{8}$ の直線であるから

$$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{8}(x-1)\quad \text{ゆえに}\quad \ell: y=\frac{1}{8}(x+1)$$

$C: y=f(x)$ と $\ell: y=\dfrac{1}{8}(x+1)$ の共有点の $x$ 座標は

$$\frac{x}{x^2+3}=\frac{1}{8}(x+1)\quad \text{整理すると}\quad x^3+x^2-5x+3=0$$

ゆえに　$(x-1)^2(x+3)=0$　これを解いて　$\boldsymbol{x=-3}$

(2) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3}$，$g(x)=\dfrac{1}{8}(x+1)$ であるから

$$\begin{aligned}\{f(x)-g(x)\}^2 &= \left\{\frac{x}{x^2+3}-\frac{1}{8}(x+1)\right\}^2\\ &= \left(\frac{x}{x^2+3}\right)^2-\frac{x(x+1)}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\\ &= \frac{(x^2+3)-3}{(x^2+3)^2}-\frac{(x^2+3)+x-3}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\\ &= -\frac{3}{(x^2+3)^2}+\frac{7}{4(x^2+3)}-\frac{1}{4}-\frac{x}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\end{aligned}$$

ここで，次の 2 つの定積分を

$$\begin{aligned}I &= \int_{-3}^{1}\left\{-\frac{3}{(x^2+3)^2}+\frac{7}{4(x^2+3)}\right\}dx,\\ J &= \int_{-3}^{1}\left\{-\frac{1}{4}-\frac{x}{4(x^2+3)}+\frac{1}{64}(x+1)^2\right\}dx\end{aligned}$$

とおくと

$$\int_{-3}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx = I+J$$

$x=\sqrt{3}\tan\theta$ とおくと　$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{\cos^2\theta}$

| $x$ | $-3 \longrightarrow 1$ |
|---|---|
| $\theta$ | $-\frac{\pi}{3} \longrightarrow \frac{\pi}{6}$ |

$$\begin{aligned}I &= \sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left(-\frac{1}{3}\cos^2\theta+\frac{7}{12}\right)d\theta\\ &= \sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\left(\frac{5}{12}-\frac{1}{6}\cos 2\theta\right)d\theta\\ &= \sqrt{3}\left[\frac{5}{12}\theta-\frac{1}{12}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{5\pi}{24}\sqrt{3}-\frac{1}{4},\\ J &= \left[-\frac{1}{4}x-\frac{1}{8}\log(x^2+3)+\frac{1}{192}(x+1)^3\right]_{-3}^{1}\\ &= -\frac{11}{12}+\frac{1}{8}\log 3\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle\int_{-3}^{1}\{f(x)-g(x)\}^2\,dx = \left(\frac{5\pi}{24}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{11}{12}+\frac{1}{8}\log 3\right)$

$$= \boldsymbol{\frac{5\pi}{24}\sqrt{3}+\frac{1}{8}\log 3-\frac{7}{6}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $KA = LB$ より

$$KA - KB = LB - KB \quad \text{ゆえに} \quad K(A-B) = (L-K)B$$

$K,\ L$ をそれぞれ 4 で割った余りが等しいから　$L - K \equiv 0 \pmod 4$

$$K(A-B) \equiv 0 \pmod 4$$

$K$ は正の奇数であるから　$A - B \equiv 0$　すなわち　$A \equiv B \pmod 4$

よって，$A$ を 4 で割った余りは，$B$ を 4 で割った余りと等しい．

(2) $A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} = \displaystyle\prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j}$，$B = {}_a\mathrm{C}_b = \displaystyle\prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k}$ より

$$\begin{aligned}
A &= \prod_{j=0}^{4b} \frac{4a+1-j}{4b+1-j} \\
&= \prod_{k=0}^{b} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+1)}{4b+1-(4k+1)} \\
&\qquad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+2)}{4b+1-(4k+2)} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-(4k+3)}{4b+1-(4k+3)} \\
&= (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a+1-4k}{4b+1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{a-k}{b-k} \\
&\qquad \times \prod_{k=0}^{b-1} \frac{4a-1-4k}{4b-1-4k} \prod_{k=0}^{b-1} \frac{2a-1-2k}{2b-1-2k} \\
&= (4a+1-4b)B \prod_{k=0}^{b-1} \frac{(4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k)}{(4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k)}
\end{aligned}$$

これから，正の奇数 $K,\ L$ を

$$K = \prod_{k=0}^{b-1} (4b+1-4k)(4b-1-4k)(2b-1-2k)$$

$$L = (4a+1-4b) \prod_{k=0}^{b-1} (4a+1-4k)(4a-1-4k)(2a-1-2k)$$

とおくと，次式を満たす正の奇数 $K,\ L$ が存在する．

$$A = \frac{LB}{K} \quad \text{すなわち} \quad KA = LB$$

(3) 2 つの奇数 $K,\ L$ の因数は，法 4 について ($a-b$ は 2 で割り切れる)

$$\begin{aligned}
&4a+1-4b \equiv 1 && (\mathrm{mod}\ 4)\\
&4b+1-4k \equiv 4a+1-4k && (\mathrm{mod}\ 4)\\
&4b-1-4k \equiv 4a-1-4k && (\mathrm{mod}\ 4)\\
&2b-1-2k = 2a-1-2k-2(a-b) \equiv 2a-1-2k && (\mathrm{mod}\ 4)
\end{aligned}$$

したがって，2 つの奇数 $K,\ L$ について　$K \equiv L \pmod 4$
これと $A = {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$，$B = {}_a\mathrm{C}_b$ を (1) の結論に適用すると

$$(*)\quad {}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1} \equiv {}_a\mathrm{C}_b \qquad (\mathrm{mod}\ 4)$$

よって，${}_{4a+1}\mathrm{C}_{4b+1}$ を 4 で割った余りは，${}_a\mathrm{C}_b$ を 4 で割った余りと等しい．

(4) $(*)$ の左辺は $a=505,\ b=9$ を代入したもので $a-b$ は 2 で割り切れるから

$${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv {}_{505}\mathrm{C}_9 \qquad (\mathrm{mod}\ 4)$$

さらに，上式の右辺は，$(*)$ の左辺に $a=126,\ b=2$ を代入したもので $a-b$ は 2 で割り切れるから

$${}_{505}\mathrm{C}_9 \equiv {}_{126}\mathrm{C}_2 \qquad (\mathrm{mod}\ 4)$$

このとき　${}_{126}\mathrm{C}_2 = \dfrac{126\cdot125}{2\cdot1} = 63\cdot125 \equiv 3\cdot1 \equiv 3 \pmod 4$

したがって　${}_{2021}\mathrm{C}_{37} \equiv 3 \pmod 4$　よって　求める余りは　**3**

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\mathrm{A}(-\alpha, -3)$，$\mathrm{P}(\theta+\sin\theta,\ \cos\theta)$，$f(\theta)=\mathrm{AP}^2$ より

$$f(\theta)=(\theta+\sin\theta+\alpha)^2+(\cos\theta+3)^2$$

これを順次微分し，第 3 次導関数まで求めると

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2(\theta+\sin\theta+\alpha)(1+\cos\theta)+2(\cos\theta+3)\cdot(-\sin\theta) \\ &= 2(\theta-2\sin\theta+\alpha+\theta\cos\theta+\alpha\cos\theta), \\ f''(\theta) &= 2(1-\cos\theta-\theta\sin\theta-\alpha\sin\theta), \\ f'''(\theta) &= -2(\theta+\alpha)\cos\theta \end{aligned}$$

$\alpha>0$ であるから，$f''(\theta)$ の増減表は次のようになる．

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'''(\theta)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f''(\theta)$ | $0$ | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ | $4$ |

上の増減表から，次を満たす $\varphi$ が唯一存在する

$$f''(\varphi)=0,\quad 0<\varphi<\pi$$

これから，$f'(\varphi)$ の増減表は次のようになる．

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\varphi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(\theta)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(\theta)$ | $4\alpha$ | $\searrow$ | 極小 | $\nearrow$ | $0$ |

$f'(0)=4\alpha>0$ であるから，上の増減表より

$$f'(\psi)=0,\quad 0<\psi<\pi$$

を満たす $\psi$ がただ一つ存在し，題意は証明された．

(2) (1) の結果から，$f(\theta)$ の増減表は

| $\theta$ | $0$ | $\cdots$ | $\psi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(\theta)$ | | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | |

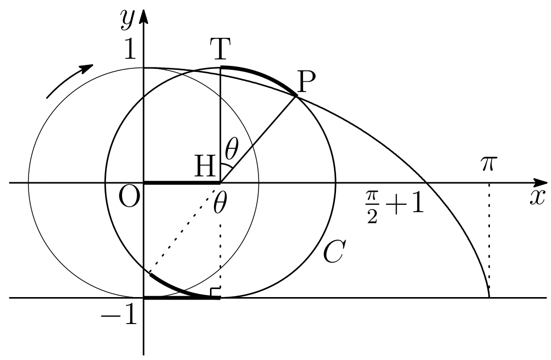
$\theta=\psi$ で最大であるから $(0<\psi<\frac{\pi}{2})$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0 \quad \text{すなわち} \quad 2\left(\frac{\pi}{2}-2+\alpha\right)>0$$

$\alpha>0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{0<\alpha<2-\dfrac{\pi}{2}}$

**補足** Pの描く図形はサイクロイドである．半径1の円$C$が下の図のように直線$y=-1$上を滑ることなく転がるとき，$C$上の定点Pが描く軌跡である．$\theta=0$のとき，$C$の中心Hは原点O，Pは$(0,\ 1)$にあるから，HPの偏角は$\dfrac{\pi}{2}-\theta$である．点Tを$(\theta,\ 1)$とすると，$\overset{\frown}{\mathrm{TP}}=\mathrm{OH}$であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}+\overrightarrow{\mathrm{HP}}=\begin{pmatrix}\theta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\\\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta+\sin\theta\\\cos\theta\end{pmatrix}$$




$x(\theta)=\theta+\sin\theta$，$y(\theta)=\cos\theta$，$\vec{v}=(x'(\theta),\ y'(\theta))$とおくと

$$f(\theta)=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=(x(\theta)+\alpha)^2+(y(\theta)+3)^2$$

これを$\theta$について微分すると

$$\begin{aligned}f'(\theta)&=2(x(\theta)+\alpha)x'(\theta)+2(y(\theta)+3)y'(\theta)\\&=2\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

$f'(\theta)=0$のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{v}=0$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\vec{v}$

このとき，点Pにおける接ベクトル$\vec{v}$と$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$は垂直である．

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $(*)\quad x^4+bx+c=(x^2+px+q)(x^2-px+r)$

$(*)$ の右辺を展開すると

$$x^4+bx+c=x^4+(-p^2+q+r)x^2-p(q-r)x+qr$$

$(*)$ は $x$ に関する恒等式であるから，同じ次数の項の係数を比較して

$$\begin{cases} -p^2+q+r=0 & \cdots ① \\ -p(q-r)=b & \cdots ② \\ qr=c & \cdots ③ \end{cases}$$

$p\neq 0$ のとき，①，② より

$$q+r=p^2,\quad q-r=-\frac{b}{p}$$

上の 2 式から $\quad\boldsymbol{q=\frac{1}{2}\left(p^2-\frac{b}{p}\right),\quad r=\frac{1}{2}\left(p^2+\frac{b}{p}\right)}$

(2) (1) の結果を ③ に代入すると

$$c=\frac{1}{4}\left(p^4-\frac{b^2}{p^2}\right)\quad ゆえに\quad p^6-4cp^2-b^2=0$$

上の第 2 式に $b=(a^2+1)(a+2)$，$c=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$ を代入すると

$$\begin{aligned} p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2&=0 \\ p^6+\{(a+2)^2-(a^2+1)\}(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2&=0 \\ p^6-(a^2+1)^2p^2+(a^2+1)(a+2)^2\{p^2-(a^2+1)\}&=0 \\ p^2\{p^2+(a^2+1)\}\{p^2-(a^2+1)\}& \\ +(a^2+1)(a+2)^2\{p^2-(a^2+1)\}&=0 \\ \{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}&=0 \end{aligned}$$

よって $\quad\boldsymbol{f(t)=t^2+1,\quad g(t)=(t^2+1)(t+2)^2}$

別解 (A) $p^6+(4a+3)(a^2+1)p^2-(a^2+1)^2(a+2)^2$ が

$$\text{(B)}\quad \{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+f(a)p^2+g(a)\}$$

であるから，$p$ に関する定数項と 2 次の項の係数を比較して

$$\begin{cases} -(a^2+1)g(a)=-(a^2+1)^2(a+2)^2 \\ g(a)-(a^2+1)f(a)=(4a+3)(a^2+1) \end{cases}$$

第 1 式から　　$g(a)=(a^2+1)(a+2)^2$

これを第 2 式に代入すると

$$\begin{aligned} (a^2+1)(a+2)^2-(a^2+1)f(a)&=(4a+3)(a^2+1) \\ (a+2)^2-f(a)&=4a+3 \\ f(a)&=a^2+1 \end{aligned}$$

逆に，$f(a)=a^2+1$，$g(a)=(a^2+1)(a+2)^2$ を (B) に代入して展開すると，(A) を得る．よって，$\boldsymbol{f(t)=t^2+1}$，$\boldsymbol{g(t)=(t^2+1)(t+2)^2}$

(3) $b=(a^2+1)(a+2)$，$c=-\left(a+\dfrac{3}{4}\right)(a^2+1)$

(i) $p=0$ のとき，①〜③ により

$$q+r=0,\quad (a^2+1)(a+2)=0,\quad qr=-\left(a+\frac{3}{4}\right)(a^2+1)$$

上の第 2 式から　$a=-2$　これを第 3 式に代入して　$qr=\dfrac{25}{4}$

$q,\ r$ は 2 次方程式 $x^2+\dfrac{25}{4}=0$ の解で，実数解を持たず，不適．

(ii) $p\neq 0$ のとき，(2) の結果から

$$(**)\quad \{p^2-(a^2+1)\}\{p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2\}=0$$

を満たす $p$ である．$(**)$ において

$$p^4+(a^2+1)p^2+(a^2+1)(a+2)^2>0$$

であるから，$p^2-(a^2+1)=0$　ゆえに　$p^2=a^2+1$

$(*)$ より，$p$ は有理数で，$p=\dfrac{k}{l}$ とすると ($k,\ l$ は互いに素)

$$\frac{k^2}{l^2}=a^2+1$$

右辺は整数であるから，$l=1$ となり，$p$ は整数.

$$p^2-a^2=1\quad (p+a)(p-a)=1$$

したがって　$\begin{cases} p+a=1 \\ p-a=1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} p+a=-1 \\ p-a=-1 \end{cases}$

これを解いて　$(p,\ a)=(1,\ 0),\ (-1,\ 0)$

よって，求める $a$ の値は　$\boldsymbol{a=0}$