令和２年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ a，b，c，p を実数とする．不等式

$$ax^2 + bx + c > 0$$
$$bx^2 + cx + a > 0$$
$$cx^2 + ax + b > 0$$

をすべて満たす実数 x の集合と，$x > p$ を満たす実数 x の集合が一致しているとする．

(1) a，b，c はすべて 0 以上であることを示せ．

(2) a，b，c のうち少なくとも 1 個は 0 であることを示せ．

(3) $p = 0$ であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 平面上の点 P，Q，R が同一直線上にないとき，それらを 3 頂点とする三角形の面積を $\triangle\mathrm{PQR}$ で表す．また，P，Q，R が同一直線上にあるときは，$\triangle\mathrm{PQR} = 0$ とする．A，B，C を平面上の 3 点とし，$\triangle\mathrm{ABC} = 1$ とする．この平面上の点 X が

$$2 \leqq \triangle\mathrm{ABX} + \triangle\mathrm{BCX} + \triangle\mathrm{CAX} \leqq 3$$

を満たしながら動くとき，X の動きうる範囲の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $-1 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，

$$x(t) = (1+t)\sqrt{1+t}$$
$$y(t) = 3(1+t)\sqrt{1-t}$$

とする．座標平面上の点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ を考える．

(1) $-1 < t \leqq 1$ における t の関数 $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ は単調に減少することを示せ．

(2) 原点と P の距離を $f(t)$ とする．$-1 \leqq t \leqq 1$ における t の関数 $f(t)$ の増減を調べ，最大値を求めよ．

(3) t が $-1 \leqq t \leqq 1$ を動くときの P の軌跡を C とし，C と x 軸で囲まれた領域を D とする．原点を中心として D を時計回りに 90° 回転させるとき，D が通過する領域の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n，k を，$1 \leqq k \leqq n$ を満たす整数とする．n 個の整数

$$2^m \quad (m = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$$

から異なる k 個を選んでそれらの積をとる．k 個の整数の選び方すべてに対しこのように積をとることにより得られる ${}_n\mathrm{C}_k$ 個の整数の和を $a_{n,k}$ とおく．例えば，

$$a_{4,3} = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 + 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^3 + 2^0 \cdot 2^2 \cdot 2^3 + 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 = 120$$

である．

(1) 2 以上の整数 n に対し，$a_{n,2}$ を求めよ．

(2) 1 以上の整数 n に対し，x についての整式

$$f_n(x) = 1 + a_{n,1}x + a_{n,2}x^2 + \cdots + a_{n,n}x^n$$

を考える．$\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}$ と $\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}$ を x についての整式として表せ．

(3) $\dfrac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}$ を n，k で表せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 座標空間において，xy 平面上の原点を中心とする半径 1 の円を考える．この円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 2)$ を頂点とする円錐 (内部を含む) を S とする．また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ を考える．

(1) 点 P が S の底面を動くとき，線分 AP が通過する部分を T とする．平面 $z = 1$ による S の切り口および，平面 $z = 1$ による T の切り口を同一平面上に図示せよ．

(2) 点 P が S を動くとき，線分 AP が通過する部分の体積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) A，α を実数とする．θ の方程式

$$A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha) = 0$$

を考える．$A > 1$ のとき，この方程式は $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲に少なくとも 4 個の解をもつことを示せ．

(2) 座標平面上の楕円

$$C : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

を考える．また，$0 < r < 1$ を満たす実数 r に対して，不等式

$$2x^2 + y^2 < r^2$$

が表す領域を D とする．D 内のすべての点 P が以下の条件を満たすような実数 r $(0 < r < 1)$ が存在することを示せ．また，そのような r の最大値を求めよ．

条件：C 上の点 Q で，Q における C の接線と直線 PQ が直交するようなものが少なくとも 4 個ある．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 一般に，$l<0$ とする関数 $f(x)=lx^2+mx+n$ は

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} lx^2\left(1+\frac{m}{lx}+\frac{n}{lx^2}\right)<0$$

であるから，不等式 $f(x)>0$ が $x>p$ を解にもつことはない．

連立不等式 $$(*)\begin{cases} ax^2+bx+c>0 \\ bx^2+cx+a>0 \\ cx^2+ax+b>0 \end{cases}$$

の解が，$x>p$ であるから，これらの x^2 の係数 $a,\ b,\ c$ が負になることはない．よって，$a,\ b,\ c$ はすべて 0 以上である．

(2) 一般に，$l'>0$ とする関数 $g(x)=l'x^2+m'x+n'$ は

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} l'x^2\left(1+\frac{m'}{l'x}+\frac{n'}{l'x^2}\right)>0$$

であるから，$x<q$ が不等式 $g(x)>0$ を満たすように q がとれる．
$(*)$ の x^2 の係数 $a,\ b,\ c$ がすべての正であるとき，$x>p$ 以外に $x<q'$ も連立不等式 $(*)$ の解となる q' がとれるから，条件に反する．これと (1) の結果から，$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 個は 0 である．

(3) (i) 0 である個数が 1 個で，例えば，$c=0,\ a>0,\ b>0$ とすると，$(*)$ は

$$\begin{cases} ax^2+bx>0 \\ bx^2+a>0 \\ ax+b>0 \end{cases}$$

上の第 1 式から，$x<-\dfrac{b}{a},\ 0<x$，第 2 式から，すべての実数，
第 3 式から，$x>-\dfrac{b}{a}$．これらを同時に満たす範囲は　$x>0$
$(a=0,\ b>0,\ c>0)$，$(b=0,\ c>0,\ a>0)$ の場合も同様に　$x>0$

(ii) 0 である個数が 2 個で，例えば，$a=b=0,\ c>0$ とすると，$(*)$ は

$$\begin{cases} c>0 \\ cx>0 \\ cx^2>0 \end{cases} \qquad \text{これを解いて}\quad x>0$$

(iii) 3 個とも 0 であるとすると，$(*)$ は，$0>0$ より，解なしとなる．
これは，$(*)$ の解 $x>p$ に反するので，不適．

(i)〜(iii) より　$p=0$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 与えれた条件は，次のように表される．

$$(*)\quad \triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=t \quad (2 \leqq t \leqq 3)$$

平面上の点 X が $\triangle$ABC の内部にあるとき，

$$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{CAX}=1$$

であるから，X は $\triangle$ABC の外部にある．直線 AB，BC，CA によって分けれた領域で，$\triangle$ABC の外部にある領域を右下の図のように D_k，E_k とする $(k=1,2,3)$．境界線は，隣接する両方の領域に含まれるものとする．

- X $\in D_1$ のとき　$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{BCX}+\triangle\mathrm{ABC}$
  上式および $\triangle\mathrm{ABC}=1$ を $(*)$ に代入すると

$$2\triangle\mathrm{BCX}+1=t \quad \text{ゆえに} \quad \triangle\mathrm{BCX}=\frac{t-1}{2}$$

  線分 AB の B の延長線上に F_t，線分 AC の C の延長線上に G_t をそれぞれ

$$\mathrm{AB}:\mathrm{BF}_t=\mathrm{AC}:\mathrm{CG}_t=1:\frac{t-1}{2}$$

  となるようにとると，X は線分 $\mathrm{F}_t\mathrm{G}_t$ 上にある．

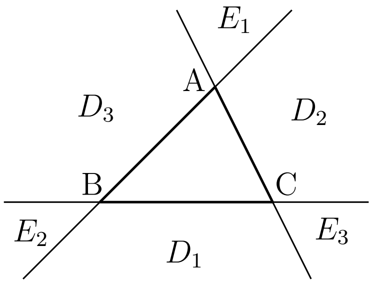
- X $\in E_1$ のとき　$\triangle\mathrm{ABX}+\triangle\mathrm{CAX}=\triangle\mathrm{BCX}-\triangle\mathrm{ABC}$
  上式および $\triangle\mathrm{ABC}=1$ を $(*)$ に代入すると

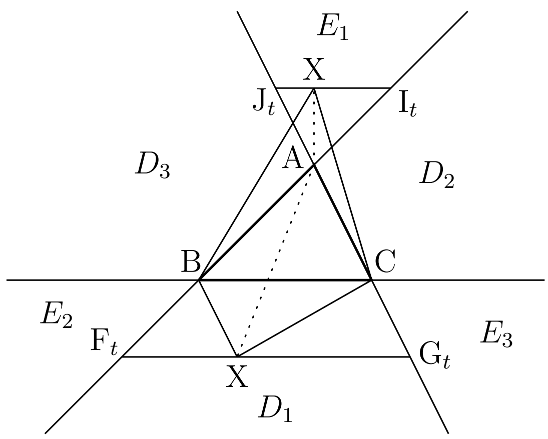
$$2\triangle\mathrm{BCX}-1=t \quad \text{ゆえに} \quad \triangle\mathrm{BCX}=\frac{t+1}{2}$$

  線分 AB の A の延長線上に I_t，線分 AC の A の延長線上に J_t をそれぞれ

$$\mathrm{BA}:\mathrm{AI}_t=\mathrm{CA}:\mathrm{AJ}_t=1:\frac{t+1}{2}-1=1:\frac{t-1}{2}$$

  となるようにとると，X は線分 $\mathrm{I}_t\mathrm{J}_t$ 上にある．

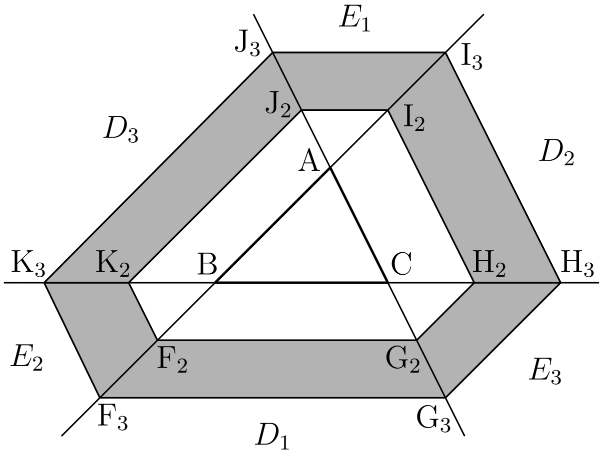




同様に，線分 BC の C の延長線上に H_t，線分 BC の B の延長上に K_t をそれぞれ

$$\mathrm{BC}:\mathrm{CH}_t=\mathrm{CB}:\mathrm{BK}_t=1:\frac{t-1}{2}$$

をとると，$2\leqq t\leqq 3$ であるから，点 X は六角形 $\mathrm{F_2G_2H_2I_2J_2K_2}$ の外部と六角形 $\mathrm{F_2G_2H_2I_2J_2K_2}$ の内部で囲まれた部分を動く.



D_k，E_k で点 X の動きうる範囲の面積をそれぞれ $S(D_k)$，$D(E_k)$ とおくと $(k=1,2,3)$

$$\frac{\mathrm{AF}_3}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AG}_3}{\mathrm{AC}}=2,\qquad \frac{\mathrm{AF}_2}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AG}_2}{\mathrm{AC}}=\frac{3}{2},$$
$$\frac{\mathrm{AI}_3}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AJ}_3}{\mathrm{AC}}=1,\qquad \frac{\mathrm{AI}_2}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AJ}_2}{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}$$

ゆえに　$S(D_1)=2^2-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{7}{4}$，$S(E_1)=1^2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

同様の計算により

$$S(D_1)=S(D_2)=S(D_3),\quad S(E_1)=S(E_2)=S(E_3)$$

よって　　$S=3\{S(D_1)+S(E_1)\}=3\left(\dfrac{7}{4}+\dfrac{3}{4}\right)=\boldsymbol{\dfrac{15}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $x(t)=(1+t)\sqrt{1+t}$，$y(t)=3(1+t)\sqrt{1-t}$ より $(-1 \leqq t \leqq 1)$

$$\frac{y(t)}{x(t)}=\frac{3\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}}=3\sqrt{\frac{2}{1+t}-1}$$

$-1<t \leqq 1$ において，$\dfrac{2}{1+t}-1$ は単調減少であるから，$\dfrac{y(x)}{x(t)}$ は $-1<t \leqq 1$ において単調に減少する．

(2) 原点 O と点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の距離 $f(t)$ より

$$\begin{aligned} f(t)^2 &= x(t)^2+y(t)^2 \\ &= (1+t)^3+9(1+t)^2(1-t) \\ &= 2(1+t)^2(5-4t) \quad \cdots ① \end{aligned}$$

ゆえに　$$\frac{1}{2}f(t)^2=(1+t)^2(5-4t)$$

この両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned} f(t)f'(t) &= 2(1+t)(5-4t)+(1+t)^2(-4) \\ &= 6(1+t)(1-2t) \end{aligned}$$

① および $f(t)>0$ であるから $(-1<t<1)$

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{6}}{2}$	$\searrow$	$2\sqrt{2}$

よって　最大値 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{6}}{2}}$

補足 3 正数 $2(1+t)$, $2(1+t)$, $5-4t$ の相加平均・相乗平均の大小関係により

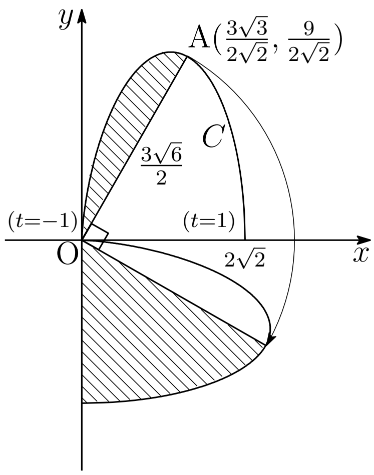
$$\frac{2(1+t)+2(1+t)+5-4t}{3} \geqq \sqrt[3]{\{2(1+t)\}^2(5-4t)}$$

したがって　$2(1+t)^2(5-4t) \leqq \dfrac{27}{2}$　ゆえに　$f(t) \leqq \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

上式において，等号が成立するとき

$$2(1+t)=5-4t \quad \text{すなわち} \quad t=\frac{1}{2}$$

(3) C と x 軸で囲まれた領域の面積を S_1 とすると，右の図の斜線部分の面積は S_1 に等しい．



$$
\begin{aligned}
S_1 &= \int_{x(-1)}^{x(1)} y\,dx = \int_{-1}^{1} y(t)x'(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} 3(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1+t}\,dt \\
&= \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt \\
&= 9\int_{0}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt = 9\cdot\frac{\pi\cdot 1^2}{4} = \frac{9\pi}{4}
\end{aligned}
$$

$f(t)$ が最大となる C 上の点を A とすると　$\mathrm{OA} = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

OA を半径とする $\dfrac{1}{4}$ 円の面積を S_2 とすると　$S_2 = \dfrac{1}{4}\pi\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \dfrac{27\pi}{8}$

求める面積は　$S_1 + S_2 = \dfrac{9\pi}{4} + \dfrac{27\pi}{8} = \boldsymbol{\dfrac{45\pi}{8}}$

発展 積分公式

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が利用できる[1]．これに $m = n = \dfrac{1}{2}$，$\alpha = -1$，$\beta = 1$ を代入すると

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\left(\frac{1}{2}!\right)^2}{2!}\cdot 2^2$$

左辺は，中心を原点とする半径 1 の円の x 軸の上側にある半円の面積であるから

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(\frac{1}{2}!\right)^2 \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{2}! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

さらに，$\dfrac{3}{2}! = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}! = \dfrac{3\sqrt{\pi}}{4}$，$\dfrac{5}{2}! = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}! = \dfrac{15\sqrt{\pi}}{8}$，$\cdots$ となる．本題では

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)^{\frac{3}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt \\
&= \frac{9}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}!\cdot\frac{1}{2}!}{3!}\cdot 2^3 = \frac{9}{2}\cdot\frac{\frac{3\sqrt{\pi}}{4}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{6}\cdot 8 = \frac{9\pi}{4}
\end{aligned}
$$

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) 等式 $(x_0+x_1+\cdots+x_{n-1})^2=\sum_{k=0}^{n-1}{x_k}^2+2\sum_{0\leqq i<j\leqq n-1}x_ix_j$

において，$x_m=2^m$ とすると $(m=0,1,\ldots,n-1)$

$$(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})^2=\sum_{k=0}^{n-1}(2^k)^2+2\sum_{0\leqq i<j\leqq n-1}2^i\cdot 2^j$$

$$\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2=\frac{4^n-1}{4-1}+2a_{n,2}$$

$$4^n-2\cdot 2^n+1=\frac{1}{3}\cdot 4^n-\frac{1}{3}+2a_{n,2}$$

ゆえに　$a_{n,2}=\frac{1}{3}\cdot 4^n-2^n+\frac{2}{3}$　　よって　$\boldsymbol{a_{n,2}=\frac{1}{3}(2^n-1)(2^n-2)}$

(2) $f_n(x)=1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n}x^n$ の定義により，次式が成立する．

$$f_n(x)=1+\sum_{k=1}^{n}a_{n,k}x^k=\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}x)\quad\cdots(*)$$

したがって

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=\prod_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}x)=(1+2^nx)\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}x)\\&=(1+2^nx)f_n(x),\\f_{n+1}(x)&=\prod_{k=1}^{n+1}(1+2^{k-1}x)=(1+x)\prod_{k=2}^{n+1}(1+2^{k-1}x)\\&=(1+x)\prod_{k=1}^{n}(1+2^{k-1}\cdot 2x)=(1+x)f_n(2x)\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx,\quad\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x}$

(3) (2) で示した

$$(**)\begin{cases} f_{n+1}(x) = (1+2^n x)f_n(x) \\ f_{n+1}(x) = (1+x)f_n(2x) \end{cases}$$

の第 1 式から　$f_{n+1}(2x) = (1+2^{n+1}x)f_n(2x)$

これと $(**)$ の第 2 式の辺々の差をとると

$$f_{n+1}(2x) - f_{n+1}(x) = (2^{n+1}-1)xf_n(2x) \tag{A}$$

$(*)$ より

$$\begin{aligned} f_{n+1}(2x) - f_{n+1}(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1,k}(2x)^k - \left\{1 + \sum_{k=1}^{n+1} a_{n+1,k}x^k\right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}(2^k-1)a_{n+1,k}x^k \\ &= a_{n+1,1}x + \sum_{k=2}^{n+1}(2^k-1)a_{n+1,k}x^k \\ &= (2^{n+1}-1)x + \sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}x^{k+1} \qquad \text{(B)} \\ (2^{n+1}-1)xf_n(2x) &= (2^{n+1}-1)x\left\{1 + \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}(2x)^k\right\} \\ &= (2^{n+1}-1)x + (2^{n+1}-1)\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{n,k}x^{k+1} \qquad \text{(C)} \end{aligned}$$

(B)，(C) を (A) に代入して，整理すると

$$\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}x^{k+1} = (2^{n+1}-1)\sum_{k=1}^{n} 2^k a_{n,k}x^{k+1}$$

上式の同じ次数の項の係数は等しいから

$$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1} = (2^{n+1}-1)2^k a_{n,k}$$

よって　$$\boldsymbol{\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{(2^{n+1}-1)2^k}{2^{k+1}-1}}$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) S の表す領域は

$$(*)\quad x^2+y^2 \leqq \left(\frac{2-z}{2}\right)^2,\ 0 \leqq z \leqq 2$$

S の $z=1$ による切り口を S' とすると　$S' : x^2+y^2 \leqq \dfrac{1}{4},\quad z=1$

次に，S の底面にある点 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ 0)$ をとると　$X^2+Y^2 \leqq 1 \quad \cdots ①$

AP の中点を $\mathrm{M}(x,\ y,\ 1)$ とすると

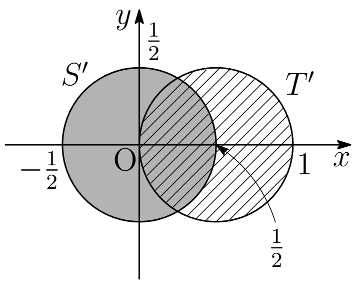
$$\frac{1+X}{2}=x,\quad \frac{Y}{2}=y,\quad \text{ゆえに}\quad X=2x-1,\ Y=2y$$

これらを ① に代入すると

$$(2x-1)^2+(2y)^2 \leqq 1$$

平面 $z=1$ による T の切り口を T' とすると

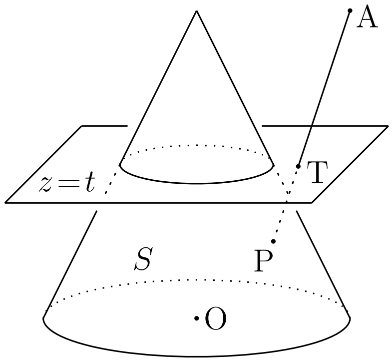
$$T' : \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2 \leqq \frac{1}{4},\quad z=1$$



(2) S の平面 $z=a$ 上の点 $\mathrm{P}(X,\ Y,\ Z)$ は，$(*)$ より，次式を満たす．

$$X^2+Y^2 \leqq \left(\frac{2-a}{2}\right)^2,\quad Z=a \quad \cdots ②$$

線分 AP と平面 $z=t$ $(a \leqq t \leqq 2)$ との共有点を $\mathrm{T}(x,\ y,\ t)$ とすると，$\mathrm{P}(X,\ Y,\ a)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 2)$ の z 座標に注意すると，点 P は線分 TA を $t-a:2-a$ に外分するから

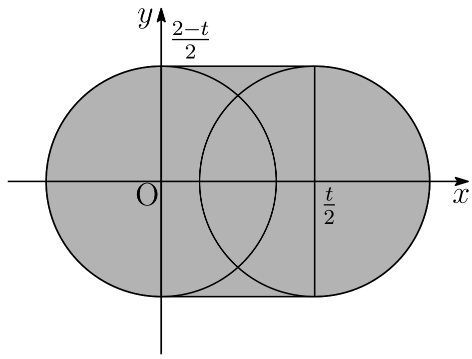


$$X=\frac{-(2-a)x+(t-a)}{t-2},$$
$$Y=\frac{-(2-a)y}{t-2}$$

上の 2 式を ② に代入すると

$$\left\{\frac{-(2-a)x+(t-a)}{t-2}\right\}^2+\left\{\frac{-(2-a)y}{t-2}\right\}^2 \leqq \left(\frac{2-a}{2}\right)^2$$
$$\left(x-\frac{t-a}{2-a}\right)^2+y^2 \leqq \left(\frac{2-t}{2}\right)^2$$

上式で t を固定して，a を $0 \leqq a \leqq t$ の値をとると，半径 $\dfrac{2-t}{2}$ は不変で，中心は $(0,\ 0)$ から $\left(\dfrac{t}{2},\ 0\right)$ にあるから，平面 $z=t$ における描く図形は，右図のようになる．その面積を $S(t)$ とすると



$$S(t)=\pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}(2-t)$$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(t)\,dt = \int_0^2 \left\{\pi\left(\frac{2-t}{2}\right)^2+\frac{t}{2}(2-t)\right\} dt \\ &= -\frac{\pi}{12}\Big[\ (2-t)^3\ \Big]_0^2+\frac{1}{12}(2-0)^3 \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{3}(\pi+1)} \end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1) $f(\theta) = A\sin 2\theta - \sin(\theta+\alpha)$ とおくと，$A > 1$，$-1 \leqq \sin(\theta+\alpha) \leqq 1$ より

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = A - \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) > 0, \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -A - \sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right) < 0$$
$$f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = A - \sin\left(\frac{5\pi}{4}+\alpha\right) > 0, \quad f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -A - \sin\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right) < 0$$

方程式 $f(\theta)=0$ は区間 $\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$，$\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{4}\right)$ にそれぞれ少なくとも 1 つずつ解をもつ．また，$f(0) \leqq 0$ のときは，$f(\theta)=0$ は区間 $\left[\,0,\ \frac{\pi}{4}\right)$ に解をもち，$f(0) = f(2\pi) > 0$ のときは，$f(\theta)=0$ は区間 $\left(\frac{7\pi}{4},\ 2\pi\right)$ に少なくとも 1 つ解をもつ．よって，$f(\theta)=0$ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ において，少なくとも 4 個解をもつ．

(2) $C : \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ より，$x = \sqrt{2}\cos\theta,\ y = \sin\theta$ とすると $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

$$\left(\frac{dx}{d\theta},\ \frac{dy}{d\theta}\right) = \left(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \cos\theta\right)$$

したがって，C 上の点 $(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ における法線 l の方程式は

$$(-\sqrt{2}\sin\theta)(x - \sqrt{2}\cos\theta) + (\cos\theta)(y - \sin\theta) = 0$$

すなわち　　$l : \sqrt{2}x\sin\theta - y\cos\theta = \sin\theta\cos\theta$

$D : 2x^2 + y^2 < r^2$ の点 $\mathrm{P}\left(\frac{B\cos(-\beta)}{\sqrt{2}},\ B\sin(-\beta)\right)$ が l 上の点であるとき $(0 \leqq B < r,\ 0 \leqq \beta < 2\pi)$

$$\sqrt{2}\left(\frac{B\cos\beta}{\sqrt{2}}\right)\sin\theta - (-B\sin\beta)\cos\theta = \sin\theta\cos\theta$$
$$\sin 2\theta - 2B\sin(\theta+\beta) = 0 \qquad \text{(A1)}$$

(i) $B=0$ のとき，(A1) を満たす θ は　$\theta = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2}$
P$(0,\ 0)$ に対して，Q は $(\pm\sqrt{2},\ 0)$，$(0, \pm 1)$ の 4 点存在する．

(ii) $B > 0$ のとき，(A1) より

$$\frac{1}{2B}\sin 2\theta - \sin(\theta+\beta) = 0$$

(1) の結果から，$\frac{1}{2B} > 1$，すなわち，$B < \frac{1}{2}$ となるように

$$0 < r \leqq \frac{1}{2}$$

をとればよい．

$r > \dfrac{1}{2}$ であるとき，$B = \dfrac{1}{2}$，$\beta = \dfrac{\pi}{4}$ を (A1) に代入すると

$$\sin 2\theta - \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

これから　$2\theta = \theta + \dfrac{\pi}{4} + 2m\pi,\ \pi - \left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right) + 2n\pi$　($m,\ n$ は整数)

$0 \leqq \theta < 2\pi$ に注意して解くと　$\theta = \dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{11\pi}{12},\ \dfrac{19\pi}{12}$

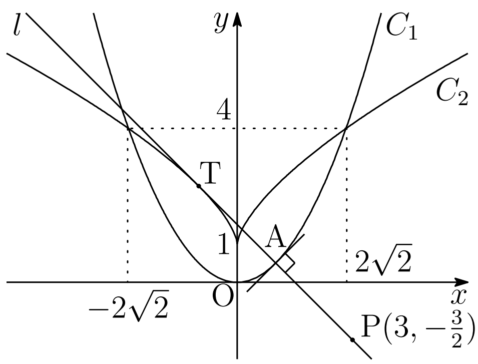
このとき，θ は 3 個であるから，条件を満たす r の最大値は　$\boldsymbol{r = \dfrac{1}{2}}$

補足 $\beta = \dfrac{\pi}{4}$ 以外に，$\beta = \dfrac{3\pi}{4},\ \dfrac{5\pi}{4},\ \dfrac{7\pi}{4}$ としてもよい．実際，

$$\begin{aligned}
\beta = \frac{3\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta &= \frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{12},\ \frac{17\pi}{12}\\
\beta = \frac{5\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta &= \frac{5\pi}{4},\ \frac{7\pi}{12},\ \frac{23\pi}{12}\\
\beta = \frac{7\pi}{4}\text{のとき}\quad \theta &= \frac{7\pi}{4},\ \frac{5\pi}{12},\ \frac{13\pi}{12}
\end{aligned}$$

解説 本題は，点 P から楕円 $C : \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ に引いた法線が 4 本引ける領域について考察する問題である．楕円の法線群の包絡線について理解しておくと，本題の主旨が理解できる．法線が引ける本数は，包絡線に引ける接線の本数に等しい．例えば，放物線 $C_1 : y = \dfrac{x^2}{2}$ の法線群の包絡線は $C_2 : y = 1 + \dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ である [2]．y 軸上にない点 P をとると，C_2 の下側にある点 P からは C_1 に 1 本の法線，C_2 上の点 P から C_1 に 2 本の法線，C_2 の上側にある点 P からは C_1 に 3 本の法線が引ける．また，y 軸上の点からは C_1 に 1 本の法線が引ける．

P$(3, -\frac{3}{2})$ から包絡線 C_2 に引いた接線 $l : y = -x + \frac{5}{2}$ は第 2 象限の点 T$(-1,\ \frac{5}{2})$ で接し，l と C_1 の第 1 象限の交点は A$(1,\ \frac{1}{2})$ である．このとき C_1 の点 A における法線が l である．また，C_1 の A における接触円 (曲率円) の中心が T である．



[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2009.pdf の $\boxed{3}$ を参照．

別解 $C : \dfrac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 上に点 $\mathrm{X}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sin\theta)$ をとる $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$.

点 X の接方向は $(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \cos\theta)$ であるから，C の点 X における法線は

$$(-\sqrt{2}\sin\theta)(x - \sqrt{2}\cos\theta) + (\cos\theta)(y - \sin\theta) = 0$$

すなわち　$\sqrt{2}x\sin\theta - y\cos\theta = \sin\theta\cos\theta$

C 上に隣接 2 点 $\mathrm{A}(\sqrt{2}\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\sqrt{2}\cos\beta,\ \sin\beta)$ をとると $(\alpha \neq \beta)$，A，B における法線は，それぞれ

$$\begin{cases} \sqrt{2}x\sin\alpha - y\cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha & \cdots ① \\ \sqrt{2}x\sin\beta - y\cos\beta = \sin\beta\cos\beta & \cdots ② \end{cases}$$

① $\times \cos\beta -$ ② $\times \cos\alpha$ より (y を消去)

$$\sqrt{2}(\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)x = \cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha - \sin\beta)$$

これを解いて　$x = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta(\sin\beta - \sin\alpha)}{\sqrt{2}\sin(\beta - \alpha)}$　$\cdots(*)$

$(*)$ において，$\beta \to \alpha$ とすると

$$\begin{aligned} \lim_{\beta\to\alpha} x &= \lim_{\beta\to\alpha} \frac{\cos\alpha\cos\beta(\sin\beta - \sin\alpha)}{\sqrt{2}\sin(\beta - \alpha)} \\ &= \lim_{\beta\to\alpha} \frac{\cos\alpha\cos\beta}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} \end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha} \frac{\sin\beta - \sin\alpha}{\beta - \alpha}$ は $\sin x$ の $x = \alpha$ における微分係数 $\cos\alpha$，

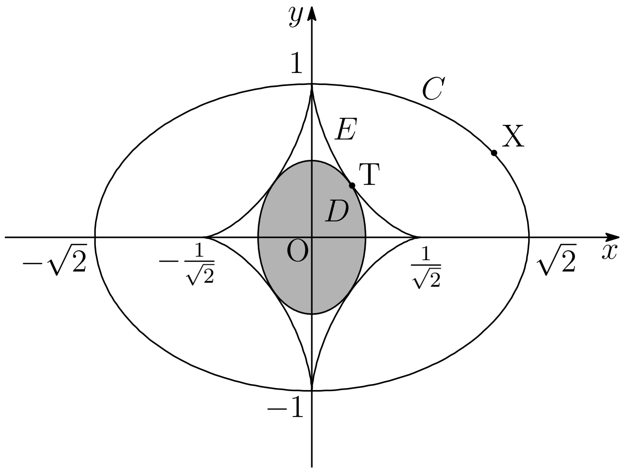
また，$\displaystyle\lim_{\beta\to\alpha} \frac{\beta - \alpha}{\sin(\beta - \alpha)} = 1$ であるから

$$\lim_{\beta\to\alpha} x = \frac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}} \quad \text{これを①に代入すると} \quad \lim_{\beta\to\alpha} y = -\sin^3\alpha$$

点 A に対応する点 $\left(\dfrac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}},\ -\sin^3\alpha\right)$ が描く軌跡 E の方程式は

$$x = \frac{\cos^3\alpha}{\sqrt{2}},\quad y = -\sin^3\alpha \quad \text{すなわち} \quad E : (\sqrt{2}x)^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$$

与えれた条件を満たす点 P は，E の内部の点である (境界線を含まない).
$\partial D : 2x^2+y^2=r^2$ とすると，求める r は ∂D と E が接するときである．
この ∂D と E の第 1 象限における共有点を A とすると，A におけるこれらの接線は，共通接線である．



∂D より　$4x+2yy'=0$　ゆえに　$y'=-\dfrac{2x}{y}$

E より　$\dfrac{2}{3}(\sqrt{2}x)^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{2}+\dfrac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'=0$　ゆえに　$y'=-\left(\dfrac{2y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

したがって　$-\dfrac{2x}{y}=-\left(\dfrac{2y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$　第 1 象限の点であるから　$y=\sqrt{2}x$

これと E の方程式を連立すると　$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$

点 A は ∂D の点であるから

$$2\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2=r^2 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{r=\frac{1}{2}}$$

補足 E の内部 (境界を含まない)E' の点から E に引ける接線は 4 本ある[3]．例えば，第 1 象限にある E' の点からは，E に第 1 象限で接する $l_1,\ l_1'$ の 2 本の接線，第 2 象限で接する l_2，第 4 象限で接する l_4 がある．$l_1,\ l_1'$ と C の第 4 象限の交点が，C のそれぞれの点における法線である．l_2 と C の第 3 象限の交点が，C の点における法線である．l_4 と C の第 1 象限の交点が，C の点における法線である．

[3]http://kumamoto.s12.xrea.com/temp/2020_04_19.pdf を参照