平成 31 年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の定積分を求めよ．

$$\int_0^1 \left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 一辺の長さが 1 の正方形 ABCD を考える．3 点 P，Q，R はそれぞれ辺 AB，AD，CD 上にあり，3 点 A，P，Q および 3 点 P，Q，R はどちらも面積が $\dfrac{1}{3}$ の三角形の 3 頂点であるとする．$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}}$ の最大値，最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ 座標空間内に 5 点 A$(2,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(-2,\ 0,\ 0)$，D$(0,-2,\ 0)$，E$(0,\ 0,-2)$ を考える．線分 AB の中点 M と線分 AD の中点 N を通り，直線 AE に平行な平面を α とする．さらに，p は $2<p<4$ をみたす実数とし，点 P$(p,\ 0,\ 2)$ を考える．

(1) 八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口および，平面 α の平面 $y=0$ による切り口を同一平面上に図示せよ．

(2) 八面体 PABCDE の平面 α による切り口が八角形となる p の範囲を求めよ．

(3) 実数 p が (2) で定まる範囲にあるとする．八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y \geqq 0$，$z \geqq 0$ の部分を点 $(x,\ y,\ z)$ が動くとき，座標平面上で点 $(y,\ z)$ が動く範囲の面積を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n を 1 以上の整数とする．

(1) n^2+1 と $5n^2+9$ の最大公約数 d_n を求めよ．

(2) $(n^2+1)(5n^2+9)$ は整数の 2 乗にならないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ 以下の問いに答えよ．

(1) n を 1 以上の整数とする．x についての方程式

$$x^{2n-1} = \cos x$$

は，ただ一つの実数解 a_n をもつことを示せ．

(2) (1) で定まる a_n に対し，$\cos a_n > \cos 1$ を示せ．

(3) (1) で定まる数列 $a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots, a_n, \cdots$ に対し，

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n, \quad b = \lim_{n\to\infty} {a_n}^n, \quad c = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a}$$

を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 複素数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ および実数 a，b が，次の 3 条件をみたしながら動く．

条件 1： $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ は相異なる．

条件 2： $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ は 4 次方程式 $z^4 - 2z^3 - 2az + b = 0$ の解である．

条件 3： 複素数 $\alpha\beta + \gamma\delta$ の実部は 0 であり，虚部は 0 でない．

(1) $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ のうち，ちょうど 2 つが実数であり，残りの 2 つは互いに共役な複素数であることを示せ．

(2) b を a で表せ．

(3) 複素数 $\alpha + \beta$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ 被積分関数を展開すると

$$
\begin{aligned}
&\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)\\
=&x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\\
=&x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x(1+x^2)-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\\
=&x^2+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}
\end{aligned}
$$

求める定積分を I とすると

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^1\left(x^2+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\left(1+\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\right)dx\\
&=\int_0^1\left(x^2+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dx+\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx \quad\cdots(*)
\end{aligned}
$$

まず

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\left(x^2+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)dx&=\left[\,\frac{x^3}{3}+2\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\right]_0^1\\
&=\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{8}{3}\quad\cdots①
\end{aligned}
$$

次に，$\displaystyle\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$ について，$x=\tan\theta$ とおくと

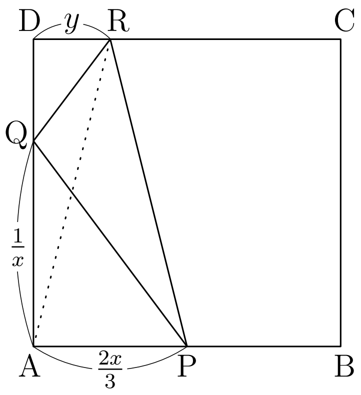
$$
\frac{dx}{d\theta}=\frac{1}{\cos^2\theta}
$$

x	$0\longrightarrow 1$
θ	$0\longrightarrow \frac{\pi}{4}$

$$
\begin{aligned}
\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2\theta}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta\right)d\theta\\
&=\left[\,\frac{\theta}{2}-\frac{1}{4}\sin2\theta\,\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\quad\cdots②
\end{aligned}
$$

$(*)$，①，② より　$I=\left(\dfrac{5}{2}\sqrt{2}-\dfrac{8}{3}\right)+\left(\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}\right)=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}\sqrt{2}+\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{35}{12}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\dfrac{1}{\mathrm{AQ}} = x$，$\mathrm{DR} = y$ とおくと



$\triangle\mathrm{APQ} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ} = \dfrac{1}{3}$ より

$$\frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad \mathrm{AP} = \frac{2x}{3}$$

$0 < \mathrm{AQ} \leqq 1$，$0 < \mathrm{AP} \leqq 1$ より

$$0 < \frac{1}{x} \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad 0 < \frac{2x}{3} \leqq 1$$

すなわち　$1 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}$　$\cdots$①

$\triangle\mathrm{APR} + \triangle\mathrm{AQR} = \triangle\mathrm{APQ} + \triangle\mathrm{PQR}$ より

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \quad \text{ゆえに} \quad y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x \qquad \cdots②$$
$$= -\frac{2}{3}(x-1)^2 + \frac{2}{3}$$

① を定義域とすると　$\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq \dfrac{2}{3}$　これは，y の条件をみたす.

② より　$\dfrac{\mathrm{DR}}{\mathrm{AQ}} = \dfrac{1}{\mathrm{AQ}}\cdot\mathrm{DR} = xy = x\left(-\dfrac{2}{3}x^2 + \dfrac{4}{3}x\right) = -\dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{4}{3}x^2$

したがって，次の関数の最大値・最小値を求めればよい.

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{4}{3}x^2 \quad \left(1 \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right)$$

$f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = -2x^2 + \frac{8}{3}x = -2x\left(x - \frac{4}{3}\right)$$

x	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{64}{81}$	$\searrow$	$\frac{3}{4}$

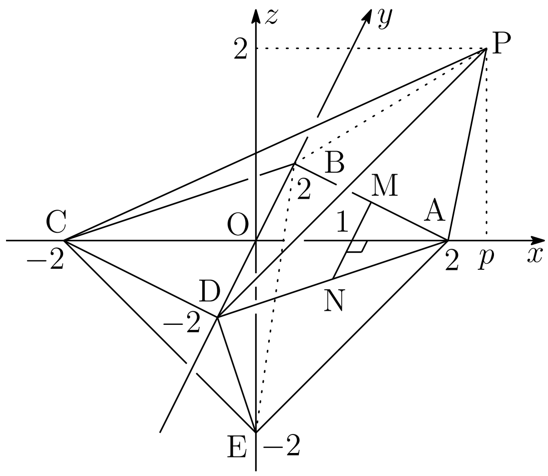
よって　最大値 $\mathbf{\dfrac{64}{81}}$，最小値 $\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 八面体 PABCDE の平面 $y=0$ による切り口は四角形 PCEA である．平面 α の平面 $y=0$ による切り口は，点 $(1,\ 0,\ 0)$ を通り，方向ベクトルが $(1,\ 0,\ 1)$ の直線であるから平面 $y=0$ におけるその方程式は

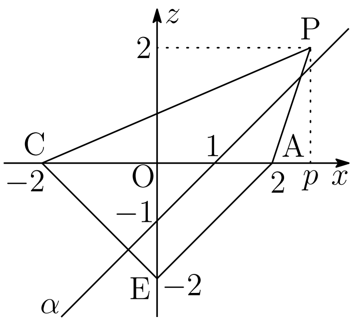
$$z=1(x-1)$$

すなわち $\quad z=x-1$

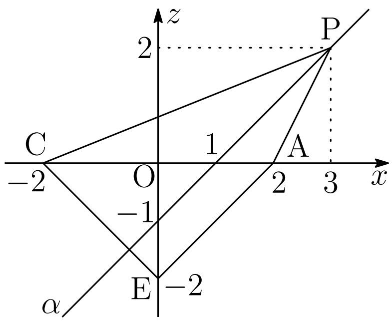
したがって，この直線と P との位置関係により，次の (i)〜(iii) の場合に分けられる．



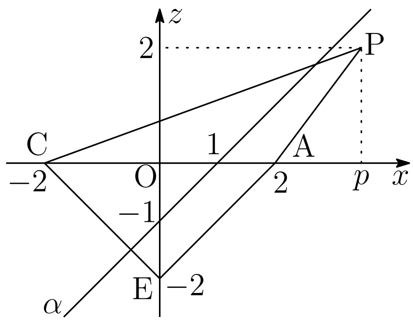
(i) $2<p<3$ のとき



(ii) $p=3$ のとき



(iii) $3<p<4$ のとき



(2) 平面 α は，2 点 M，N および点 $(0,\ 0,-1)$ を通るから，3 点 B，C，D は平面 α に関して，点 E と反対側にあり，3 辺 BE，CE，DE は平面 α とそれぞれ交点をもつ．また，(1)(iii) のように，点 P が点 C と平面 α に関して反対側にあるとき，点 P は，2 点 B，D とも平面 α と反対側にあり，3 辺 BP，CP，DP は平面 α とそれぞれ交点をもつ．以上の 6 個の交点と 2 点 M，N を含めた 8 頂点からなる八角形が，八面体 PABCDE の平面 α による切り口である．よって，求める p の値の範囲は

$$\boldsymbol{3<p<4}$$

補足 $2<p\leqq 3$ のとき，線分 AP と α との交点を Q とする．3 辺 BE，CE，DE と α との 3 交点と 3 点 M，N，Q を頂点とする六角形がその切り口となる．

(3) 平面 α の方程式は　$z=x-1$

八面体 PABCDE の平面 α による切り口のうち $y \geqq 0$，$z \geqq 0$ の部分となすのは，次の 4 頂点からなる四角形である．

① 点 $\mathrm{M}(1,\ 1,\ 0)$

② 線分 MN と x 軸との交点 $(1,\ 0,\ 0)$

③ 平面 $\alpha : z=x-1$ と直線 $\mathrm{CP} : z=\dfrac{2}{p+2}(x+2),\ y=0$ の交点

$$\left(\frac{p+6}{p},\ 0,\ \frac{6}{p}\right)$$

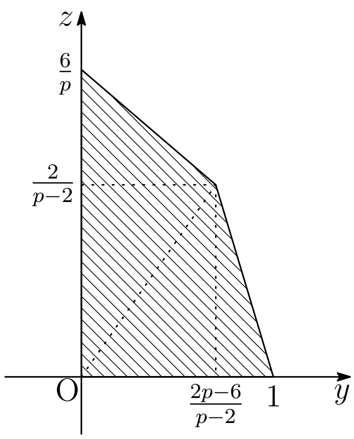
④ 平面 $\alpha : z=x-1$ と直線 $\mathrm{BP} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ の交点

(t は媒介変数)

$$\left(\frac{p}{p-2},\ \frac{2p-6}{p-2},\ \frac{2}{p-2}\right)$$

①〜④ より，$(y,\ z)$ の動く範囲 $(y \geqq 0, z \geqq 0)$ は，yz 平面上の 4 点 $(1,\ 0)$，$(0,\ 0)$，$\left(0,\ \dfrac{6}{p}\right)$，$\left(\dfrac{2p-6}{p-2},\ \dfrac{2}{p-2}\right)$ を頂点とする四角形である．したがって，求める面積は

$$\frac{1}{2}\cdot 1\frac{2}{p-2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{p}\cdot\frac{2p-6}{p-2}=\boldsymbol{\frac{7p-18}{p(p-2)}}$$



$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $5n^2+9$ を n^2+1 で割ると　$5n^2+9=5(n^2+1)+4$

ユークリッドの互除法により，d_n は 4 の約数であり，法 4 について

$n \equiv \pm 1$ のとき　$n^2+1 \equiv 2 \pmod 4$

$n \equiv 0,\ 2$ のとき　$n^2+1 \equiv 1 \pmod 4$

よって　$\boldsymbol{d_n = \begin{cases} 2 & (n \text{ が奇数}) \\ 1 & (n \text{ が偶数}) \end{cases}}$

(2) まず　$n^2 < n^2+1 < (n+1)^2$ であるから，n^2+1 は平方数でない．$\cdots$①

$$(n^2+1)(5n^2+9) \text{ は整数の 2 乗である．} \quad \cdots(*)$$

$(*)$ が成立すると仮定し，(1) の結果から，次の場合分けを行う．

(i) $d_n=1$ のとき，n^2+1 および $5n^2+9$ は平方数となる．
これは ① に反するので矛盾．

(ii) $d_n=2$ のとき

$$n^2+1=2p^2, \quad 5n^2+9=2q^2 \qquad \cdots(**)$$

とおき ($p,\ q$ は互いに素)，2 式から n^2 を消去して整理すると

$$q^2=5p^2+2$$

ここで，法 4 について

$$0^2 \equiv 0,\ (\pm 1)^2 \equiv 1,\ 2^2 \equiv 0 \pmod 4,$$
$$q^2 \equiv p^2+2 \pmod 4$$

$p \equiv 0,\ 2 \pmod 4$ のとき　$q^2 \equiv 2 \pmod 4$ となり，矛盾．

$p \equiv \pm 1 \pmod 4$ のとき　$q^2 \equiv 3 \pmod 4$ となり，矛盾．

(i)，(ii) より，$(*)$ は成立しない．

別解 $d_n=2$ のとき，$(**)$ により

$$2(n^2+2)=(q+p)(q-p) \qquad \cdots(\mathrm{A})$$

このとき，n は奇数であるから

$$2(n^2+2) \equiv 2 \pmod 4 \quad \cdots①$$

$q+p=(q-p)+2p$ より，$q+p$ と $q-p$ の偶奇は一致するから

$$(q+p)(q-p) \not\equiv 2 \pmod 4 \quad \cdots②$$

①，② より，(A) をみたす $p,\ q$ は存在しない．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) 方程式 $x^{2n-1} = \cos x \quad \cdots (*)$

(i) $|x| > 1$ のとき　$|x^{2n-1}| > 1$

したがって，この範囲に方程式 $(*)$ の解は存在しない．

(ii) $-1 \leqq x < 0$ のとき，$-\dfrac{\pi}{2} < -1$ に注意して

$$-1 \leqq x^{2n-1} < 0, \quad \cos x > 0$$

したがって，この範囲に方程式 $(*)$ の解は存在しない．

(iii) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$f(x) = x^{2n-1} - \cos x\ (0 \leqq x \leqq 1)$ とおくと

$$f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = 1 - \cos 1 > 0 \quad \cdots ①$$

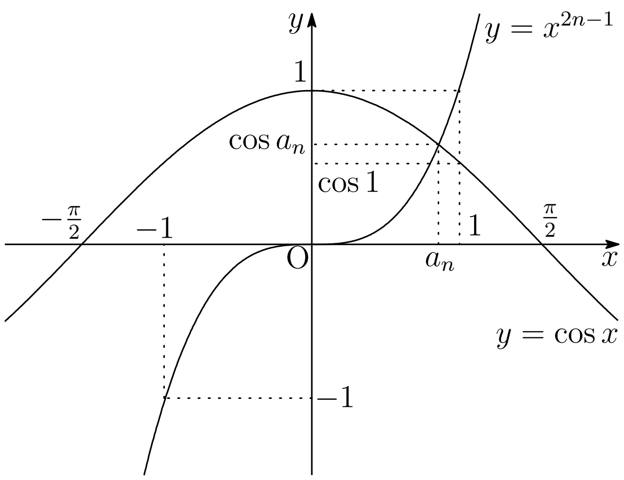
$0 < x < 1$ において　$f'(x) = (2n-1)x^{2n-2} + \sin x > 0$

$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(a_n) = 0 \quad \text{すなわち} \quad {a_n}^{2n-1} - \cos a_n = 0$$

をみたす $a_n\ (0 < a_n < 1)$ がただ一つ存在する．

(i)〜(iii) より，方程式 $(*)$ は，ただ 1 つの解をもつ．



(2) (1) の結果から　$0 < a_n < 1$　よって　$\cos a_n > \cos 1$

(3) ${a_n}^{2n-1} = \cos a_n$ および (2) の結果により

$$a_n = (\cos a_n)^{\frac{1}{2n-1}} > (\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}}$$

また，$0 < a_n < 1$ であるから

$$(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} < a_n < 1$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\cos 1)^{\frac{1}{2n-1}} = 1$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \cdots ②$$

${a_n}^{2n} = a_n \cos a_n$ であるから，${a_n}^n = \sqrt{a_n \cos a_n}$ より

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n \cos a_n} = \sqrt{1\cdot \cos 1} = \sqrt{\cos 1} \quad \cdots ③$$

よって　　$\boldsymbol{a = 1,\ b = \sqrt{\cos 1}}$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} &= \frac{{a_n}^{2n} - b^2}{(a_n - a)({a_n}^n + b)} = \frac{a_n(\cos a_n - b^2) + b^2(a_n - a)}{(a_n - a)({a_n}^n + b)} \\ &= \frac{a_n}{{a_n}^n + b}\cdot\frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} + \frac{b^2}{{a_n}^n + b} \quad \cdots ④\end{aligned}$$

② に注意して，$g(x) = \cos x$ とすると，$g'(x) = -\sin x$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} = g'(1) = -\sin 1 \quad \cdots ⑤$$

②〜⑤ より

$$\begin{aligned}c = \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{{a_n}^n + b}\cdot\frac{\cos a_n - \cos 1}{a_n - 1} + \frac{b^2}{{a_n}^n + b}\right) \\ &= \frac{1}{b + b}(-\sin 1) + \frac{b^2}{b + b} = \boldsymbol{\frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}}\end{aligned}$$

別解 $h(x) = \sqrt{x \cos x}$ とおくと　$h'(x) = \dfrac{\cos x - x\sin x}{2\sqrt{x\cos x}}$

$$\begin{aligned}c &= \lim_{n\to\infty} \frac{{a_n}^n - b}{a_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n\cdot{a_n}^{2n-1}} - b}{a_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n \cos a_n} - \sqrt{\cos 1}}{a_n - 1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{h(a_n) - h(1)}{a_n - 1} = h'(1) = \frac{\cos 1 - \sin 1}{2\sqrt{\cos 1}}\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{6}}$ (1) w が方程式 $z^4-2z^3-2az+b=0\cdots(*)$ の解であるとき

$$w^4-2w^3-2aw+b=0$$

a，b は実数であるから

$$\overline{w^4}-2\overline{w^3}-2a\overline{w}+b=0 \quad \text{ゆえに} \quad (\overline{w})^4-2(\overline{w})^3-2a\overline{w}+b=0$$

w が方程式 $(*)$ の解であるとき，$\overline{w}$ も $(*)$ の解である．
したがって，方程式 $(*)$ の解の種類は

(A) 実数解が 4 個
(B) 実数解が 2 個と互いに共役な複素数が 1 組
(C) 互いに共役な複素数が 2 組

のいずれかである．
(A) は，明らかに条件 3 に反する．
(C) と仮定し，解を $w,\ \overline{w},\ u,\ \overline{u}$ とすると，$\alpha\beta+\gamma\delta$ は

$$w\,\overline{w}+u\,\overline{u},\quad wu+\overline{wu},\quad w\overline{u}+\overline{w}u$$

であるから，これらはすべて実数 (虚部が 0) となり，条件 3 に反する．
よって，方程式 $(*)$ の解の種類は (B) であり，題意は成立する．

(2) (1) の結果から，(B) のとき，その解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \overline{\alpha}$ とすると
$(\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0,\ \beta,\ \gamma\ (\beta\neq\gamma)$ は実数$)$

$$\begin{aligned}\alpha\beta+\gamma\delta &= \alpha\beta+\gamma\overline{\alpha}\\ &= (\beta+\gamma)\frac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}+(\beta-\gamma)\frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2}\\ &= (\beta+\gamma)\mathrm{Re}(\alpha)+(\beta-\gamma)\mathrm{Im}(\alpha)i\end{aligned}$$

条件 3 より，$(\beta+\gamma)\mathrm{Re}(\alpha)=0$，すなわち，

$$(**)\quad \gamma=-\beta\neq 0 \quad \text{または} \quad \mathrm{Re}(\alpha)=0\ (\mathrm{Im}(\alpha)\neq 0)$$

のとき，条件 1～条件 3 をみたす．

$(**)$ により，次の場合分けを行う．

(i) $\gamma = -\beta \neq 0$ のとき (γ, β は実数)，方程式 $(*)$ は

$$(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\beta)(z+\beta) = 0$$
$$(z^2 - 2\mathrm{Re}(\alpha)z + |\alpha|^2)(z^2 - \beta^2) = 0 \quad \cdots ①$$

ゆえに　$z^4 - 2\mathrm{Re}(\alpha)z^3 + (|\alpha|^2 - \beta^2)z^2 + 2\mathrm{Re}(\alpha)\beta^2 z - |\alpha|^2\beta^2 = 0$

これと $(*)$ の係数を比較すると

$$-2\mathrm{Re}(\alpha) = -2, \quad |\alpha|^2 - \beta^2 = 0, \quad 2\mathrm{Re}(\alpha)\beta^2 = -2a, \quad -|\alpha|^2\beta^2 = b$$

したがって　　$\mathrm{Re}(\alpha) = 1$, $|\alpha|^2 = \beta^2 = -a > 0$, $b = -a^2$

これを ① に代入して　　$(z^2 - 2z - a)(z^2 + a) = 0 \quad (a < 0)$

方程式 $z^2 + a = 0$ $(a < 0)$ は異なる 2 つの実数解をもつ．

方程式 $z^2 - 2z - a = 0$ が虚数解をもつから，$a < 0$ に注意して

$$(-2)^2 - 4{\cdot}1(-a) < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a < -1$$

よって　　$b = -a^2 \ \ (a < -1)$

(ii) $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$ $(\mathrm{Im}(\alpha) \neq 0)$ のとき，方程式 $(*)$ は

$$(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\beta)(z-\gamma) = 0$$
$$(z^2 + |\alpha|^2)(z^2 - (\beta+\gamma)z + \beta\gamma) = 0 \quad \cdots ②$$

ゆえに　$z^4 - (\beta+\gamma)z^3 + (|\alpha|^2 + \beta\gamma)z^2 - |\alpha|^2(\beta+\gamma)z + |\alpha|^2\beta\gamma = 0$

これと $(*)$ の係数を比較すると

$$-(\beta+\gamma) = -2, \quad |\alpha|^2 + \beta\gamma = 0, \quad -|\alpha|^2(\beta+\gamma) = -2a, \quad |\alpha|^2\beta\gamma = b$$

したがって　　$\beta + \gamma = 2$, $|\alpha|^2 = a > 0$, $\beta\gamma = -a$, $b = -a^2$

これを ② に代入して　　$(z^2 + a)(z^2 - 2z - a) = 0 \quad (a > 0)$

方程式 $z^2 + a = 0$ $(a > 0)$ は異なる 2 つの虚数解をもつ．

方程式 $z^2 - 2z - a = 0$ $(a > 0)$ の判別式は

$$D = (-2)^2 - 4{\cdot}(-a) = 4 + 4a > 0$$

ゆえに，方程式 $z^2 - 2z - a = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ．

よって　　$b = -a^2 \ \ (a > 0)$

(i)，(ii) より　$\boldsymbol{b = -a^2 \ (a < -1,\ 0 < a)}$

(3) (2) の結果から，方程式 (∗) は

$$(z^2-2z-a)(z^2+a)=0 \quad (a<-1,\ 0<a)$$

(i) (2)(i) から，$a<-1$ のとき，方程式 (∗) の解は

$$z=1\pm\sqrt{-a-1}\,i,\ \pm\sqrt{-a}$$

このとき $\alpha+\beta=1\pm\sqrt{-a}\pm\sqrt{-a-1}\,i \quad (a<-1) \quad \cdots③$

(ii) (2)(ii) から，$a>0$ のとき，方程式 (∗) の解は

$$z=1\pm\sqrt{a+1},\ \pm\sqrt{a}\,i$$

このとき $\alpha+\beta=1\pm\sqrt{a+1}\pm\sqrt{a}\,i \quad (a>0) \quad \cdots④$

③ について，$a'=-a-1$ とおくと

$$\alpha+\beta=1\pm\sqrt{a'+1}\pm\sqrt{a'}\,i \quad (a'>0) \quad \cdots③'$$

$\alpha+\beta=x+yi$ とおくと，③′，④ から

$$x=1\pm\sqrt{a+1}, \quad y=\pm\sqrt{a} \quad (a>0)$$

上の 2 式から $(x-1)^2-y^2=1 \quad (y\neq 0)$
よって，$\alpha+\beta$ がとりうる範囲は右の図のようになる．