平成30年度　東京大学2次試験前期日程(数学問題)150分
理科(一類，二類，三類)　数I・II・III・A・B

問題 1 2 3 4 5 6

1 関数

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$$

の増減表をつくり，$x \to +0$，$x \to \pi - 0$ のときの極限を調べよ．

2 数列 $a_1, a_2, \cdots$ を

$$a_n = \frac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

で定める．

(1) $n \geqq 2$ とする．$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ を既約分数 $\dfrac{q_n}{p_n}$ として表したときの分母 $p_n \geqq 1$ と分子 q_n を求めよ．

(2) a_n が整数となる $n \geqq 1$ をすべて求めよ．

3 放物線 $y = x^2$ のうち $-1 \leqq x \leqq 1$ をみたす部分を C とする．座標平面上の原点Oと点A$(1,\ 0)$を考える．$k > 0$ を実数とする．点Pが C 上を動き，点Qが線分OA上を動くとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

をみたす点Rが動く領域の面積を $S(k)$ とする．

$S(k)$ および $\displaystyle\lim_{k \to +0} S(k)$，$\displaystyle\lim_{k \to \infty} S(k)$ を求めよ．

4 $a > 0$ とし，

$$f(x) = x^3 - 3a^2 x$$

とおく．次の2条件をみたす点 $(a,\ b)$ の動きうる範囲を求め，座標平面上に図示せよ．

条件1：方程式 $f(x) = b$ は相異なる3実数解をもつ．

条件2：さらに，方程式 $f(x) = b$ の解を $\alpha < \beta < \gamma$ とすると $\beta > 1$ である．

$\boxed{5}$ 複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円を C とする．点 $\mathrm{P}(z)$ は C 上にあり，点 $\mathrm{A}(1)$ とは異なるとする．点 P における円 C の接線に関して，点 A と対称な点を $\mathrm{Q}(u)$ とする．$w = \dfrac{1}{1-u}$ とおき，w と共役な複素数を $\overline{w}$ で表す．

(1) u と $\dfrac{\overline{w}}{w}$ を z についての整式として表し，絶対値の商 $\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$ を求めよ．

(2) C のうち実部が $\dfrac{1}{2}$ 以下の複素数で表される部分を C' とする．点 $\mathrm{P}(z)$ が C' 上を動くときの点 $\mathrm{R}(w)$ の軌跡を求めよ．

$\boxed{6}$ 座標空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ を考える．$\dfrac{1}{2} < r < 1$ とする．点 P が線分 OA，AB，BC 上を動くときに点 P を中心とする半径 r の球 (内部を含む) が通過する部分を，それぞれ V_1，V_2，V_3 とする．

(1) 平面 $y = t$ が V_1，V_3 双方と共有点をもつような t の範囲を与えよ．さらに，この範囲の t に対し，平面 $y = t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示せよ．

(2) V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるための r についての条件を求めよ．

(3) r は (2) の条件をみたすとする．V_1 の体積を S とし，V_1 と V_2 の共通部分の体積を T とする．V_1，V_2，V_3 を合わせて得られる立体 V の体積を S と T を用いて表せ．

(4) ひきつづき r は (2) の条件をみたすとする．S と T を求め，V の体積を決定せよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} + \cos x \quad (0 < x < \pi)$ より

$$f'(x) = \frac{1\cdot \sin x - x\cos x}{\sin^2 x} - \sin x = \frac{\sin x(1-\sin^2 x) - x\cos x}{\sin^2 x}$$
$$= \frac{\sin x\cos^2 x - x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\sin x\cos x - x)}{\sin^2 x} = \frac{\cos x(\sin 2x - 2x)}{2\sin^2 x}$$

ここで，$g(x) = \sin 2x - 2x \ (0 \leqq x < \pi)$ とおくと

$$g(0) = 0, \quad g'(x) = 2(\cos 2x - 1) < 0 \quad (0 < x < \pi)$$

したがって　$0 < x < \pi$ のとき　$g(x) < 0$

$f'(x) = \dfrac{g(x)\cos x}{\sin^2 x}$ により，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$	

また　$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\sin x} + \cos x\right) = 1 + 1 = \mathbf{2}$$

$$\lim_{x\to\pi-0} f(x) = \lim_{x\to\pi-0}\left(\frac{x}{\sin x} + \cos x\right) = \infty$$

■

$\boxed{2}$ (1) $a_n = \dfrac{{}_{2n+1}\mathrm{C}_n}{n!}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ より　$a_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}$

ゆえに　$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2(n+1)!}\cdot\dfrac{\{(n-1)!\}^2 n!}{(2n-1)!}$

$$= \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}\cdot\frac{\{(n-1)!\}^2}{(n!)^2}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}$$

$$= 2n(2n+1)\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{2(2n+1)}{n(n+1)}$$

連続する2つの整数の積 $n(n+1)$ は2で割り切れるから

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n+1}{\frac{1}{2}n(n+1)} \quad \cdots(*)$$

このとき　$2n+1 = 2\cdot n + 1$，$2n+1 = 2(n+1) - 1$

$2n+1$ と n は互いに素，また，$2n+1$ と $n+1$ も互いに素である．

よって　$\boldsymbol{p_n = \dfrac{1}{2}n(n+1)}$，　$\boldsymbol{q_n = 2n+1}$

(2) $a_1 = \dfrac{{}_3\mathrm{C}_1}{1!} = 3$，$a_2 = \dfrac{{}_5\mathrm{C}_2}{2!} = 5$，(1) の結果から，$q_n$ は奇数，$p_3 = 6$.

$n \geqq 2$ のとき　$\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=2}^{n}\frac{q_k}{p_k}$　ゆえに　$\displaystyle\frac{a_n}{a_1} = \prod_{k=2}^{n}\frac{q_k}{p_k}$

したがって　$\displaystyle a_n = 3\prod_{k=2}^{n}\frac{q_k}{p_k} = \frac{3q_2q_3\cdots q_n}{p_2p_3\cdots p_n}$

$n \geqq 3$ のとき，$p_2p_3\cdots p_n$ は偶数であり，一方，$3q_2q_3\cdots q_n$ は奇数であるから，a_n は整数ではない．よって，a_n が整数となる n は

$$\boldsymbol{n = 1,\ 2}$$

別解 $\dfrac{q_n}{p_n} = \dfrac{2(2n+1)}{n(n+1)} = \dfrac{2}{n} + \dfrac{2}{n+1}$ より

$n \leqq 3$ のとき $\dfrac{q_n}{p_n} > 1$，　$4 \leqq n$ のとき $\dfrac{q_n}{p_n} < 1$.

したがって　$a_1 < a_2 < a_3 > a_4 > a_5 > \cdots > a_n$

$$a_3 = \frac{35}{6},\ a_4 = \frac{21}{4},\ a_5 = \frac{77}{20},\ a_6 = \frac{143}{60},\ a_7 = \frac{143}{112},\ a_8 = \frac{2431}{4032}$$

$n \geqq 8$ のとき，$a_n < 1$ となる．よって，a_n が整数となる n は $n = 1,\ 2$

■

$\boxed{3}$ C 上の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ に対して $(-1 \leqq p \leqq 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \dfrac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{k}(p,\ p^2) = \left(\frac{p}{k},\ k\left(\frac{p}{k}\right)^2\right)$$

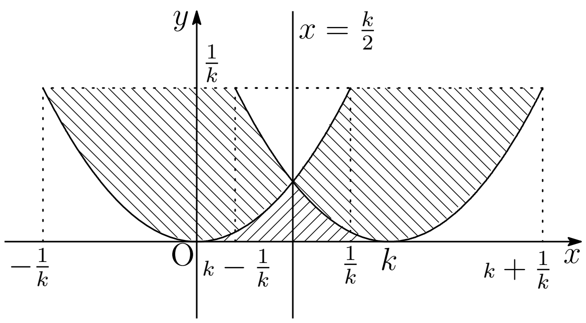
$-\dfrac{1}{k} \leqq \dfrac{p}{k} \leqq \dfrac{1}{k}$ から，$\mathrm{P'}$ は放物線 $y = kx^2 \left(-\dfrac{1}{k} \leqq x \leqq \dfrac{1}{k}\right)$ 上にある．また，線分 OA 上の点 $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ に対して $(0 \leqq q \leqq 1)$

$$k\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k(q,\ 0) = (kq,\ 0)$$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP'}} + k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より，R は点 $\mathrm{P'}$ を x 軸方向に kq だけ平行移動した点である．このとき，$0 \leqq kq \leqq k$ であるから，次のように場合分けを行う．

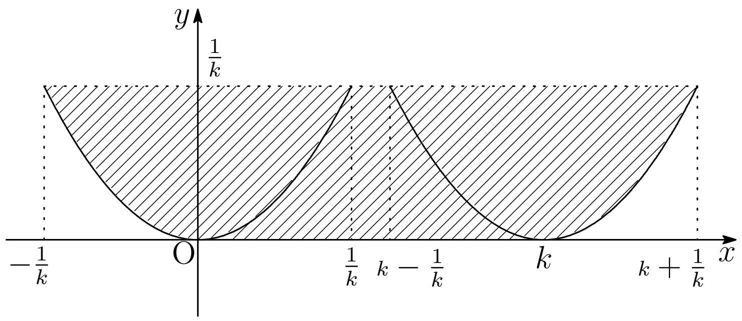
(i) $k - \dfrac{1}{k} < \dfrac{1}{k}$，すなわち，$k < \sqrt{2}$ のとき

$$S(k) = 2 \times \frac{1}{k}\cdot k - 2\int_0^{\frac{k}{2}} kx^2\,dx = 2 - 2\left[\frac{k}{3}x^3\right]_0^{\frac{k}{2}} = \boldsymbol{2 - \frac{k^4}{12}}$$



(ii) $\dfrac{1}{k} \leqq k - \dfrac{1}{k}$，すなわち，$\sqrt{2} \leqq k$ のとき

$$S(k) = \frac{1}{k}\left\{k + \frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{k}\right)\right\} - 2\int_0^{\frac{1}{k}} kx^2\,dx = \boldsymbol{1 + \frac{4}{3k^2}}$$



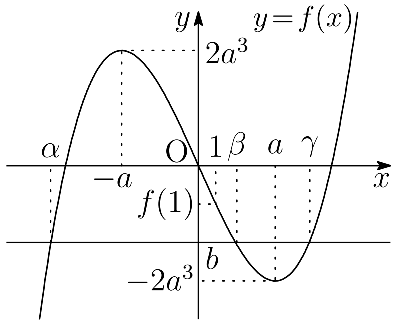
(i)，(ii) の結果から　$\displaystyle\lim_{k \to +0} \boldsymbol{S(k) = 2}$，$\displaystyle\lim_{k \to \infty} \boldsymbol{S(k) = 1}$ ■

4 $f(x) = x^3 - 3a^2x$ より

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

$f(x)$ の増減表は

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$

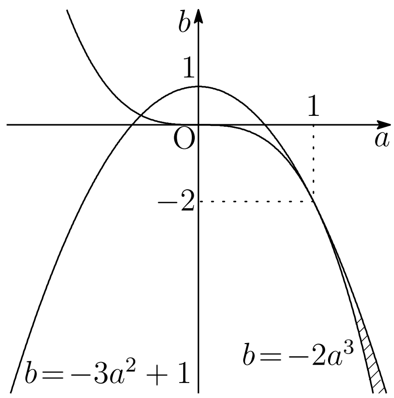


$f(x) = b$ の解 $\alpha < \beta < \gamma$ について，$\beta > 1$ であるから

$$1 < a, \quad -2a^3 < b < f(1)$$

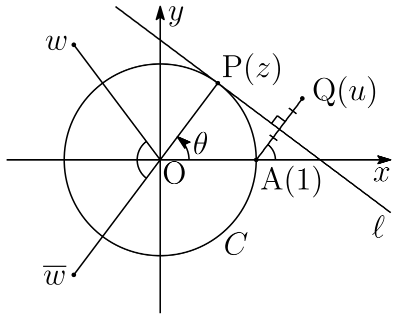
したがって

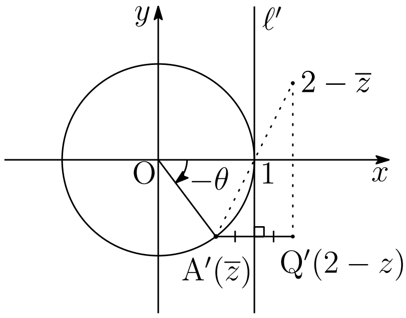
$$\boldsymbol{-2a^3 < b < -3a^2 + 1 \quad (a > 1)}$$



点 $(a,\ b)$ の満たす領域は，右の図の斜線部分で，境界線を含まない．

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $\theta = \arg z$ とし，2 点 A，Q をそれぞれ原点 O を中心に $-\theta$ だけ回転させた点をそれぞれ A$'$，Q$'$ とすると，A$'(\overline{z})$ を点 1 に関して対称位移動した点が $2-\overline{z}$ で，この点を x 軸に関して対称移動した点が Q$'(2-z)$ である．





Q(u) は Q$'(2-z)$ を原点 O を中心に θ だけ回転させたものであるから

$$\boldsymbol{u = z(2-z)} \quad \text{ゆえに} \quad w = \frac{1}{1-u} = \frac{1}{1-z(2-z)} = \frac{1}{(z-1)^2}$$

$$\text{さらに} \quad \overline{w} = \frac{1}{(\overline{z}-1)^2} = \frac{z^2}{z^2(\overline{z}-1)^2} = \frac{z^2}{(1-z)^2} = z^2 w \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{\frac{\overline{w}}{w} = z^2}$$

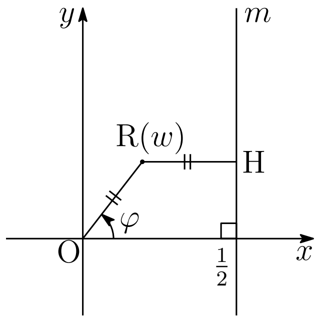
したがって

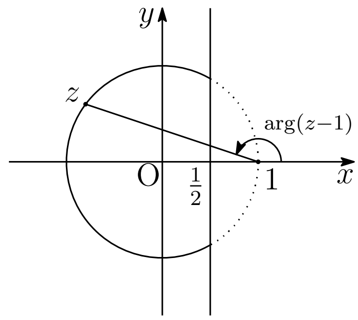
$$\frac{|w+\overline{w}-1|}{|w|} = \left|1 + \frac{\overline{w}}{w} - \frac{1}{w}\right| = \left|1 + z^2 - (z-1)^2\right| = 2|z| = \mathbf{2}$$

(2) (1) の結果より　$\arg w = -2\arg(z-1)$，$\left|\dfrac{w+\overline{w}}{2} - \dfrac{1}{2}\right| = |w|$　$\cdots(*)$

$\dfrac{2}{3}\pi \leqq \arg(z-1) \leqq \dfrac{4}{3}\pi$ であるから　$-\dfrac{8}{3}\pi \leqq -2\arg(z-1) \leqq -\dfrac{4}{3}\pi$

$\varphi = \arg w$ とおくと　$-\dfrac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \dfrac{2}{3}\pi$



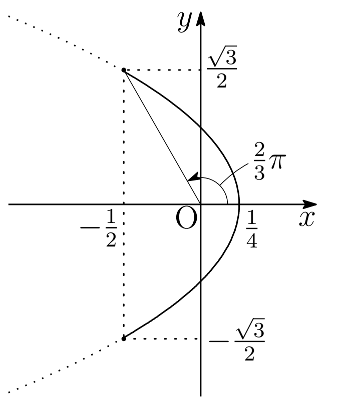


複素数平面上に R(w) をとり，点 $\dfrac{1}{2}$ を通り，x 軸に垂直な直線 m に R から垂線 RH を引く．$r = |w|$ とすると，$(*)$ より

$$\mathrm{RH} = \left|\frac{w+\overline{w}}{2} - \frac{1}{2}\right| = r$$

$\mathrm{OR}\cos\varphi + \mathrm{RH} = \dfrac{1}{2}$ であるから　$r\cos\varphi + r = \dfrac{1}{2}$　$\cdots$①

よって　　$r = \dfrac{1}{2(1+\cos\varphi)}$　$\left(-\dfrac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \dfrac{2}{3}\pi\right)$　$\cdots(**)$



$w = x + yi$ とおくと，$x = r\cos\varphi$，$r^2 = x^2 + y^2$ であるから，① より

$$x + r = \frac{1}{2} \quad ゆえに \quad r^2 = \left(\frac{1}{2} - x\right)^2$$

整理すると　　$x = \dfrac{1}{4} - y^2$

$(**)$ より　$\varphi = \pm\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$r = 1$

$\varphi = -\dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$\left(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，　$\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき　$\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

よって，求める軌跡の方程式は　$\boldsymbol{x = \dfrac{1}{4} - y^2}$　$\boldsymbol{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq y \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

R(w) の表す軌跡は，右上の図のようになる．

補足 $(**)$ および $\varphi = \arg w$ より，w は次式で与えられる．

$$w = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)} \quad \left(-\frac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$$

別解 $\theta = \arg z$ とすると，条件から $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{3}\pi$

$w = \dfrac{1}{(z-1)^2}$ により

$$w = \frac{1}{z^2 - 2z + 1} = \frac{\overline{z}}{z + \overline{z} - 2} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{2\cos\theta - 2} = \frac{-\cos\theta + i\sin\theta}{2(1-\cos\theta)}$$

ここで，$\theta = \pi - \varphi$ とおくと

$$w = \frac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{2(1+\cos\varphi)} \quad \left(-\frac{2}{3}\pi \leqq \varphi \leqq \frac{2}{3}\pi\right)$$

$r = |w|$ とおくと，$(**)$ が得られる (以下の計算は同様)． ■

$\boxed{6}$ (1) 点 P が線分 OA 上を動くとき，点 P から平面 $y=t$ までの距離は　t
点 P が線分 BC 上を動くとき，点 P から平面 $y=t$ までの距離は　$1-t$
したがって，平面 $y=t$ が V_1，V_3 双方と共有点をもつような t の範囲は

$$t \leqq r \quad かつ \quad 1-t \leqq r \quad すなわち \quad \boldsymbol{1-r \leqq t \leqq r} \quad \cdots (*)$$

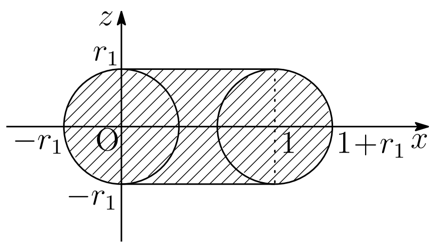
線分 OA 上の点 $\mathrm{P}(c_1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 r の球 (内部を含む) は

$$(x-c_1)^2+y^2+z^2 \leqq r^2$$

これと平面 $y=t$ の共通部分は

$$(x-c_1)^2+z^2 \leqq r^2-t^2,\quad y=t$$

上式は，平面 $y=t$ において点 $(c_1,\ t,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{r^2-t^2}$ の円の内部である．点 P が線分 OA 上を動く，すなわち，$0 \leqq c_1 \leqq 1$ のとき上式が通過する図形が，平面 $y=t$ と V_1 の共通部分である．この図形を平面 $y=t$ 上に描くと右のようになる．境界を含む $(r_1=\sqrt{r^2-t^2})$.



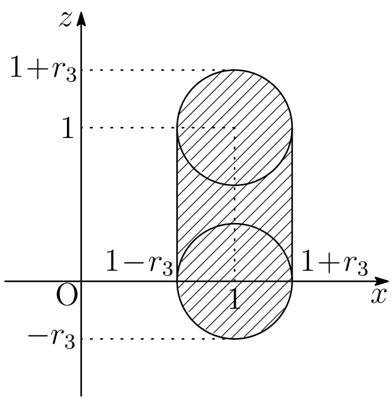
線分 BC 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 1,\ c_3)$ を中心とする半径 r の球 (内部を含む) は

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-c_3)^2 \leqq r^2$$

これと平面 $y=t$ の共通部分は

$$(x-1)^2+(z-c_3)^2 \leqq r^2-(t-1)^2,\quad y=t$$

上式は，平面 $y=t$ において点 $(1,\ t,\ c_3)$ を中心とする半径 $\sqrt{r^2-(t-1)^2}$ の円の内部である．点 P が線分 OA 上を動く，すなわち，$0 \leqq c_3 \leqq 1$ のとき上式が通過する図形が，平面 $y=t$ と V_3 の共通部分である．この図形を平面 $y=t$ 上に描くと右の図のようになる．境界を含む $(r_3=\sqrt{r^2-(t-1)^2})$.



$r_1 = \sqrt{r^2 - t^2}$，$r_3 = \sqrt{r^2 - (t-1)^2}$ であるから，これらの大小により t の値の範囲は次のようになる．

(i) $r_1 \geqq r_3$ のとき

$$\sqrt{r^2 - t^2} \geqq \sqrt{r^2 - (t-1)^2} \quad \text{これを解いて} \quad t \leqq \frac{1}{2}$$

このとき，$(*)$ に注意して　$1 - r \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}$

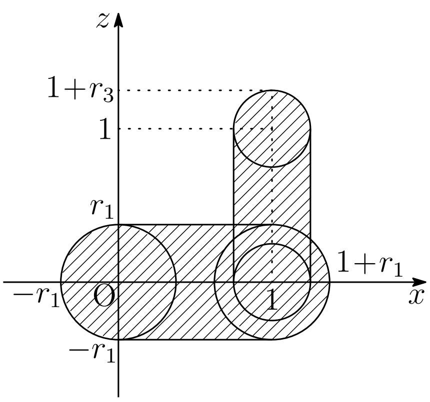
(ii) $r_1 < r_3$ のとき

$$\sqrt{r^2 - t^2} > \sqrt{r^2 - (t-1)^2} \quad \text{これを解いて} \quad t > \frac{1}{2}$$

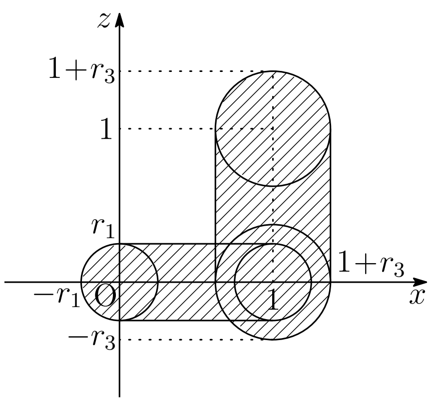
このとき，$(*)$ に注意して　$\dfrac{1}{2} < t \leqq r$

(i),(ii) の場合について，平面 $y = t$ と V_1 の共通部分および，平面 $y = t$ と V_3 の共通部分を同一平面上に図示すると次のようになる．

$r_1 \geqq r_3$ $(1 - r \leqq t \leqq \frac{1}{2})$ のとき

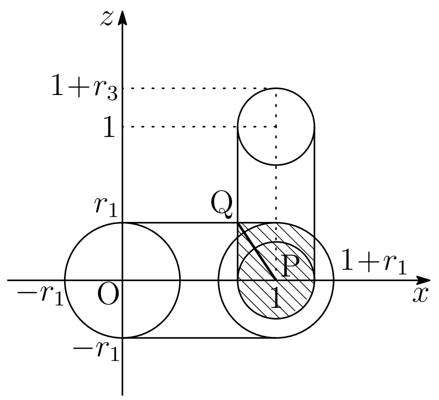


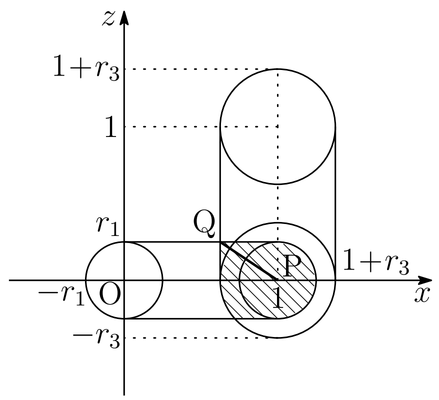
$r_1 < r_3$ $(\frac{1}{2} < t \leqq r)$ のとき



(2) (1) の結果から，V_1 と V_3 の共通部分を平面 $y=t$ 上に図示すると

$r_1 \geqq r_3$ $(1-r \leqq t \leqq \frac{1}{2})$ のとき　　$r_1 < r_3$ $(\frac{1}{2} < t \leqq r)$ のとき





また，P(1, t, 0) をとり，P から領域内の点までの距離が最大となる点を Q とすると

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= {r_1}^2 + {r_3}^2\\ &= (r^2-t^2)+\{r^2-(t-1)^2\}\\ &= 2r^2-2t^2+2t-1\end{aligned}$$

V_1 と V_3 の共通部分が V_2 に含まれるとき　　$\mathrm{PQ} \leqq r$　$\cdots$①

ゆえに　　$r^2-\mathrm{PQ}^2 = 2t^2-2t+1-r^2$

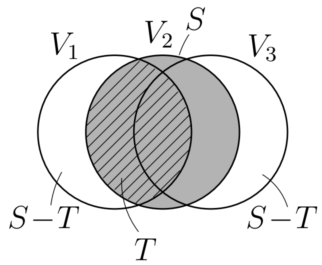
$$= 2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}-r^2 \quad \cdots ②$$

$\dfrac{1}{2} < r < 1$ であるから，$t=\dfrac{1}{2}$ は $(*)$ の範囲に含まれる．

①，② より　$\dfrac{1}{2}-r^2 \geqq 0$　これを解いて　$r \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

与えられた r の値に注意して　　$\boldsymbol{\dfrac{1}{2} < r \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

(3) V_1 の体積 S から V_1 と V_2 の共通部分の体積を引いた体積，V_3 の体積 S から V_3 と V_2 の共通部分の体積を引いた体積はともに $S-T$，V_2 の体積が S であるから，V_1，V_2，V_3 を合わせて得られる立体の体積は

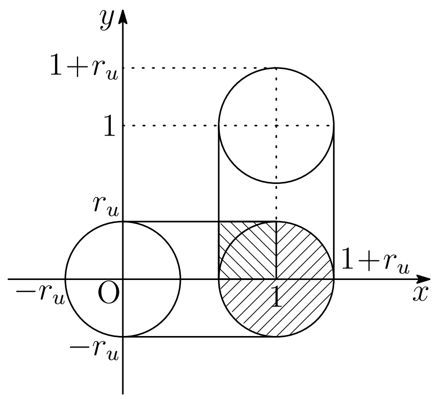


$$2(S-T)+S = \boldsymbol{3S-2T}$$

(4) S は半径 r の半球が 2 つと底面の半径 r，高さ 1 の円柱の体積の和より

$$S = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 \cdot 1 = \boldsymbol{\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2}$$

球面 $(x-1)^2+y^2+z^2=r^2$ の平面 $z=u$ による断面は $(-r \leqq u \leqq r)$，円



$$(x-1)^2+y^2=r^2-u^2$$

であり，この円の半径を r_u とすると

$${r_u}^2 = r^2 - u^2$$

したがって，T の平面 $z=u$ による断面は，右の図の斜線部分である．

右の図の斜線部分の面積は

$$\frac{3}{4}\pi {r_u}^2 + {r_u}^2 = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right){r_u}^2 = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right)(r^2-u^2)$$

よって　$T = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right)\int_{-r}^{r}(r^2-u^2)du = \left(\frac{3}{4}\pi + 1\right)\cdot\frac{4}{3}r^3 = \boldsymbol{\left(\pi + \frac{4}{3}\right)r^3}$

(3) の結果により，V の体積は

$$\begin{aligned} 3S - 2T &= 3\left(\frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2\right) - 2\left(\pi + \frac{4}{3}\right)r^3 \\ &= \boldsymbol{\left(2\pi - \frac{8}{3}\right)r^3 + 3\pi r^2} \end{aligned}$$

■