平成 29 年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B

1 実数 a，b に対して

$$f(\theta) = \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta$$

とし，$0 < \theta < \pi$ で定義された関数

$$g(\theta) = \frac{f(\theta) - f(0)}{\cos\theta - 1}$$

を考える．

(1) $f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x = \cos\theta$ の整式で表せ．

(2) $g(\theta)$ が $0 < \theta < \pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a，b についての条件を求めよ．また，条件をみたす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ．

2 座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という．格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える．

(a) 最初に，点 P は原点 O にある．

(b) ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である．

(1) 点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y = x$ 上にある確率を求めよ．

(2) 点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ．

3 複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w = \dfrac{1}{z}$ とする．

(1) α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする．点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる．この円の中心と半径を求めよ．

(2) 1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする．点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $p = 2 + \sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$a_n = p^n + \left(-\frac{1}{p}\right)^n$$

と定める．以下の問いに答えよ．ただし設問 (1) は結論のみを書けばよい．

(1) a_1，a_2 の値を求めよ．

(2) $n \geqq 2$ とする．積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ．

(3) a_n は自然数であることを示せ．

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C，D の共通接線について考える．

$$C: \quad y = x^2 + k$$
$$D: \quad x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ．ただし $a \neq -1$ とする．

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める．このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 点 O を原点とする座標空間内で，一辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす．また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく．ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする．

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 点 Q が平面 $x = 0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする．K の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1)

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \cos 3\theta + a\cos 2\theta + b\cos\theta \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta + a(2\cos^2\theta - 1) + b\cos\theta \\ &= 4x^3 - 3x + a(2x^2-1) + bx \\ &= \boldsymbol{4x^3 + 2ax^2 + (b-3)x - a} \end{aligned}$$

$f(0) = 4 + 2a + (b-3) - a$ であるから

$$\begin{aligned} f(\theta) - f(0) &= 4(x^3-1) + 2a(x^2-1) + (b-3)(x-1) \\ \frac{f(\theta)-f(0)}{x-1} &= 4(x^2+x+1) + 2a(x+1) + b - 3 \end{aligned}$$

よって　$g(\theta) = \dfrac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta - 1} = \boldsymbol{4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1}$

(2) $x = \cos\theta$ $(0 < \theta < \pi)$ より　$-1 < x < 1$

$h(x) = 4x^2 + 2(a+2)x + 2a + b + 1$ $(-1 < x < 1)$ とおくと

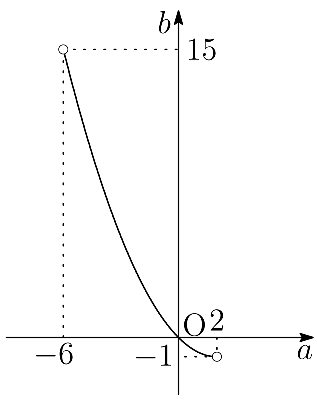
$$h(x) = 4\left(x + \frac{a+2}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + a + b$$

$h(x)$ は $-1 < x < 1$ で最小値 0 をとるから

$$-1 < -\frac{a+2}{4} < 1, \quad -\frac{a^2}{4} + a + b = 0$$

よって　$\boldsymbol{b = \dfrac{1}{4}(a-2)^2 - 1 \quad (-6 < a < 2)}$

条件を満たす点 $(a,\ b)$ が描く図形は，右の図のとおり．



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) x 軸方向に 1，-1，y 軸方向に 1，-1 だけ平行移動する回数をそれぞれ i，j，k，l とすると $(0 \leqq i,\ j,\ k,\ l \leqq 6)$，その確率は

$$\sum_{\substack{i+j+k+l=6\\0\leqq i,j,k,l\leqq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6$$

このとき　$i+j+k+l=6,\quad i-j=k-l$　すなわち　$i+l=j+k=3$

よって，求める確率は

$$\sum_{\substack{i+l=j+k=3\\0\leqq i,j,k,l\leqq 6}} \frac{6!}{i!j!k!l!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{\substack{i+l=3\\0\leqq i,l\leqq 3}} \frac{3!}{i!l!} \sum_{\substack{j+k=3\\0\leqq j,k\leqq 3}} \frac{3!}{j!k!}$$

$$= \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot 2^3 \cdot 2^3 = \mathbf{\frac{5}{16}}$$

(2) $i+j+k+l=6$，$i=j$，$k=l$　すなわち　$i+k=3$

よって，求める確率は

$$\sum_{\substack{i+k=3\\0\leqq i,k\leqq 3}} \frac{6!}{(i!k!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{6!}{4^6}\left\{\frac{1}{(3!)^2}+\frac{1}{(1!2!)^2}+\frac{1}{(2!1!)^2}+\frac{1}{(3!)^2}\right\} = \mathbf{\frac{25}{256}}$$

別解　$(1+x)^3 = {}_3\mathrm{C}_0 + {}_3\mathrm{C}_1 x + {}_3\mathrm{C}_2 x^2 + {}_3\mathrm{C}_3 x^3$,

$(1+x)^3 = {}_3\mathrm{C}_3 + {}_3\mathrm{C}_2 x + {}_3\mathrm{C}_1 x^2 + {}_3\mathrm{C}_0 x^3$

上の 2 式の積と $(1+x)^6$ の x^3 の係数 ${}_6\mathrm{C}_3$ との比較により

$$({}_3\mathrm{C}_0)^2 + ({}_3\mathrm{C}_1)^2 + ({}_3\mathrm{C}_2)^2 + ({}_3\mathrm{C}_3)^3 = {}_6\mathrm{C}_3$$

一般には，$(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ の x^n の係数を比較することにより

$$\sum_{k=0}^{n} ({}_n\mathrm{C}_k)^2 = {}_{2n}\mathrm{C}_n$$

したがって

$$\sum_{\substack{i+k=3\\0\leqq i,k\leqq 3}} \frac{6!}{(i!k!)^2}\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{\substack{i+k=3\\0\leqq i,k\leqq 3}} \left(\frac{3!}{i!k!}\right)^2$$

$$= \frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6 \sum_{k=0}^{3} ({}_3\mathrm{C}_k)^2$$

$$= {}_6\mathrm{C}_3 \left(\frac{1}{4}\right)^6 {}_6\mathrm{C}_3 = ({}_6\mathrm{C}_3)^2\left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{25}{256}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 点 $\alpha \neq 0$ と O を結ぶ線分の垂直二等分線 L の方程式は　$|z| = |z-\alpha|$

$w = \dfrac{1}{z}$ より，$z = \dfrac{1}{w}$ $(w \neq 0)$ であるから

$$\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{1}{w} - \alpha\right| \quad \text{ゆえに} \quad \left|\frac{w}{\alpha}\right|\left|\frac{1}{w}\right| = \left|\frac{w}{\alpha}\right|\left|\frac{1}{w} - \alpha\right|$$

したがって　$\left|w - \dfrac{1}{\alpha}\right| = \dfrac{1}{|\alpha|}$　よって，w は中心 $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\alpha}}$，半径 $\dfrac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{\alpha}|}$ の円

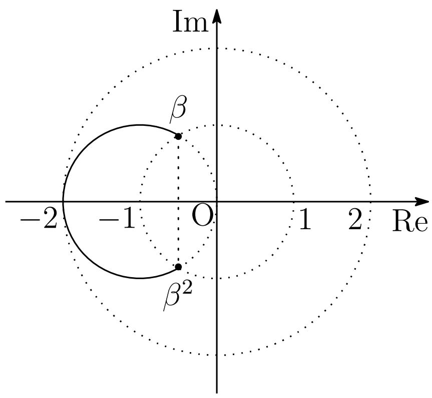
(2) $\beta = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$\beta^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$ であるから，2 点 β，β^2 を結ぶ線は，点 -1 と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分であるから，(1) の結果から

$$|w+1| = 1 \quad \cdots ①$$

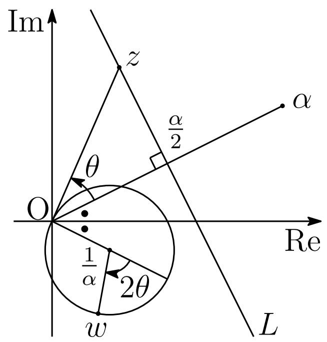
z は，点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くから

$$\frac{1}{2} \leqq |z| \leqq 1 \quad \text{すなわち} \quad 1 \leqq |w| \leqq 2 \quad \cdots ②$$

したがって，点 w の軌跡は，①，② の共通部分で下の図の実線部分．



解説 L 上の点 z は



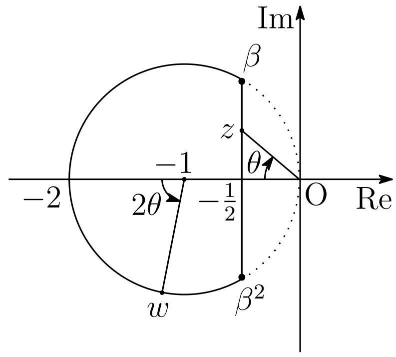
$$z=\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha i}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$w=\dfrac{1}{z}$ により

$$w=\frac{2}{\alpha}\cdot\frac{1}{1+i\tan\theta}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{2\cos\theta}{\cos\theta+i\sin\theta}$$
$$=\frac{1}{\alpha}(2\cos^2\theta-2i\sin\theta\cos\theta)$$
$$=\frac{1}{\alpha}(1+\cos 2\theta-i\sin 2\theta)$$

点 w は点 $\dfrac{1}{\alpha}$ を中心とし，半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円周上にある．$-\pi<2\theta<\pi$ であるから，点 w の表す軌跡はこの円から原点 O を除いたものになる．

また，点 β と β^2 を結ぶ線分上の点 z は



$$z=-\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\tan\theta \quad \left(-\frac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\right)$$

$w=\dfrac{1}{z}$ により

$$w=-\frac{2}{1-i\tan\theta}=-\frac{2\cos\theta}{\cos\theta-i\sin\theta}$$
$$=-2(\cos^2\theta+i\sin\theta\cos\theta)$$
$$=-1-(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $a_1=p-\dfrac{1}{p}=2+\sqrt{5}-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-2)=\mathbf{4}$

$$a_2=p^2+\frac{1}{p^2}=\left(p-\frac{1}{p}\right)^2+2=4^2+2=\mathbf{18}$$

(2) $p^{n+1}+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n+1}=\left(p-\dfrac{1}{p}\right)\left\{p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n\right\}+p^{n-1}+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^{n-1}$ より

$$a_{n+1}=a_1a_n+a_{n-1} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}}$$

補足 $\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$

(3) (1)，(2) の結果から　$a_1 = 4$，$a_2 = 18$，$a_{n+1} = 4a_n + a_{n-1}$　$\cdots(*)$
よって，すべての自然数 n について，a_n は自然数である．

(4) 2 つの自然数 k，l の最大公約数を $\gcd(k,\ l)$ とする．
$(*)$ にユークリッドの互除法を順次適用することにより

$$\gcd(a_{n+1},\ a_n) = \gcd(a_n,\ a_{n-1}) = \cdots = \gcd(a_2,\ a_1) = \mathbf{2}$$

ユークリッドの互除法

n が m で割り切れること (m が n の約数) を $m\,|\,n$ と表記し，整数 x，y の最大公約数を (x, y) と表記すると，次は自明である．

$$(x, y)\,|\,x, \quad (x, y)\,|\,y$$

ユークリッドの互除法

2 整数 a，b について $(a > b > 0)$，a を b で割ったときの商を q，余りを c とすると

$$c \neq 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = (b, c)$$
$$c = 0 \text{ のとき} \qquad (a, b) = b$$

証明　$c \neq 0$ のとき，$a = bq + c$ より　$(b, c)\,|\,a$　また，$(b, c)\,|\,b$ であるから，(b, c) は a と b の公約数，したがって

$$(b, c)\,|\,(a, b) \quad \cdots ①$$

同様に，$c = a - bq$ より　$(a, b)\,|\,c$　また，$(a, b)\,|\,b$ であるから，(a, b) は b と c の公約数，したがって

$$(a, b)\,|\,(b, c) \quad \cdots ②$$

①，② より　　$(a, b) = (b, c)$

$c = 0$ のとき，自明．　　証終

$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $y=x^2+k$ と $y=ax+b$ から y を消去すると

$$x^2+k=ax+b \quad \text{ゆえに} \quad x^2-ax+k-b=0$$

このとき，方程式の係数について

$$(-a)^2-4(k-b)=0 \quad \text{すなわち} \quad 4k=a^2+4b \quad \cdots ①$$

$x=y^2+k$ と $y=ax+b$，すなわち，$x=\dfrac{1}{a}y-\dfrac{b}{a}$ について，① より

$$4k=\left(\frac{1}{a}\right)^2+4\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{a^2}-\frac{4b}{a} \quad \cdots ②$$

①，② から k を消去すると

$$a^2-\frac{1}{a^2}+4b\left(1+\frac{1}{a}\right)=0$$

$$(a+1)(a-1)(a^2+1)+4ab(a+1)=0$$

$a\neq-1$ より，$a+1\neq0$ であるから

$$(a-1)(a^2+1)+4ab=0 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b=\frac{(1-a)(1+a^2)}{4a}} \quad \cdots ③$$

これを ① に代入して

$$4k=a^2+4\cdot\frac{(1-a)(1+a^2)}{4a} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k=\frac{a^2-a+1}{4a}} \quad \cdots ④$$

(2) $a=2$ を ④ に代入すると　$k=\dfrac{3}{8}$　これを ①，② に代入すると

$$\frac{3}{2}=a^2+4b, \quad \frac{3}{2}=\frac{1}{a^2}-\frac{4b}{a}$$

上の 2 式から b を消去して整理すると

$$(a+1)(a-2)(2a-1)=0 \quad \text{これを解いて} \quad a=-1,\ 2,\ \frac{1}{2}$$

$k=\dfrac{3}{8}$ を ① に代入すると

$$\frac{3}{2}=a^2+4b \quad \text{ゆえに} \quad b=-\frac{a^2}{4}+\frac{3}{8}$$

よって　$\boldsymbol{(a,\ b)=\left(-1,\ \frac{1}{8}\right),\ \left(2,-\frac{5}{8}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{16}\right)}$

別解 ③，④ に $a=2$ を代入すると　$b=-\dfrac{5}{8}$，$k=\dfrac{3}{8}$

このとき，C，D の共通接線の 1 本は　$y=2x-\dfrac{5}{8}$

C と D は直線 $y=x$ に関して対称であるから，上の共通接線と直線 $y=x$ に関して対称な直線

$$x=2y-\frac{5}{8}\quad \text{すなわち}\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{16}$$

も C と D の共通接線である．

また，直線 $y=x$ に関して対称な直線 $x+y=d$ が $C: y=x^2+\dfrac{3}{8}$ と接するとき，2 式から y を消去して整理すると

$$x^2+x+\frac{3}{8}-d=0$$

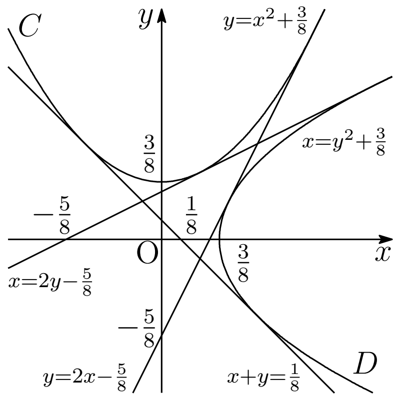
このとき，係数について

$$1^2-4\cdot 1\left(\frac{3}{8}-d\right)=0\quad \text{これを解いて}\quad d=\frac{1}{8}$$

直線 $y=x$ に関する C と D の対称性により，直線

$$x+y=\frac{1}{8}\quad \text{すなわち}\quad y=-x+\frac{1}{8}$$

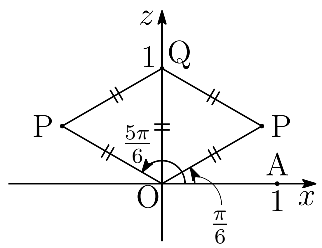
は，C と D の共通接線である．



よって，求める 3 本の共通接線は

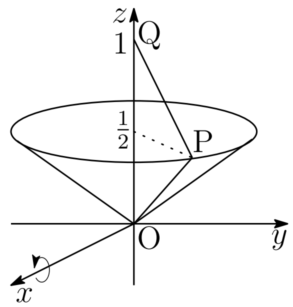
$$y=2x-\frac{5}{8},\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{16},\quad y=-x+\frac{1}{8}$$

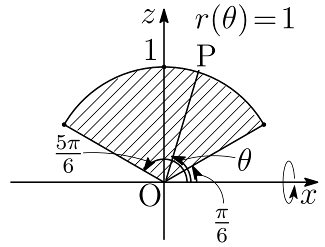
6 (1) θ が最大または最小となるのは，zx 平面上において，P が右の図で示した位置にあるときである．$x=\cos\theta$ であるから



$$\boldsymbol{\frac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \frac{5\pi}{6}}, \quad \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上の点 $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，辺 OP は左図の円錐面を描く．点 Q を平面 $x=0$ を動かす，すなわち，OQ を平面 $x=0$ 上で O を中心に回転させると，この円錐面が zx 平面を通過してできる zx 平面に描く輪郭は右図の斜線部分になる．





極方程式による曲線の回転体の体積

極方程式 $r=r(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ で表される曲線を x 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_{\alpha}^{\beta}\{r(\theta)\}^3 \sin\theta\, d\theta}$$

したがって，(上の公式[1] に $r(\theta)=1$，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$\beta=\dfrac{5\pi}{6}$ を代入すると)

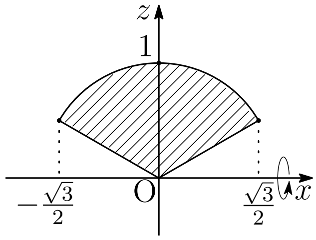
$$V = \frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} 1^3 \sin\theta\, d\theta = \frac{2\pi}{3}\Big[-\cos\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

別解 2012 年九大理系 p.7 の例 5 で示した公式[2]

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^2 a$$

に $r=1$，$a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を代入すると

$$V = \frac{4}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$



[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf $\boxed{5}$ 参照
[2] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_ri_2012.pdf

2009 京都大学 (理系) 前期

xy 平面上で原点を極，x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式 $r = 2 + \cos\theta$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ により表される曲線を C とする．C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ．

解答 $V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi}(2+\cos\theta)^3\sin\theta\,d\theta = \dfrac{2\pi}{3}\Big[\,-\dfrac{1}{4}(2+\cos\theta)^4\,\Big]_0^{\pi} = \dfrac{40}{3}\pi$

2013 大阪大学 (理系) 前期

xyz 空間内の 3 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(1, 1, 0) を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円すいを V とする．円すい V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

解答 右の図の斜線部分を y 軸のまわりに 1 回転させた立体の体積であるから

$$V = \frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^2\cdot 1 = \frac{8}{3}\pi$$