平成 28 年度　東京大学２次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B

1 e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする．すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

2 A，B，C の３つのチームが参加する野球の大会を開催する．以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する．

(a) 1 試合目で A と B が対戦する．

(b) 2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する．

(c) k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する．ここで k は 2 以上の整数とする．

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする．

(1) n を 2 以上の整数とする．ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ．

(2) m を正の整数とする．総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ．

3 a を $1<a<3$ をみたす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ a)$ を考える．直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ R_1，R_2，R_3 として，三角形 $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ とする．$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ．

4 z を複素数とする．複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる．ここで，a_1，a_2，$\cdots$，a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k \neq 0$ とする．

(1) 次の不等式をみたす正の整数 n をすべて求めよ．

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n} - 10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(2) p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式をみたす正の整数 m が存在することを示せ．

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m} - p < 0.a_1a_2\cdots a_k + 10^{-k}$$

(3) 実数 x に対し，$r \leqq x < r+1$ をみたす整数 r を $[x]$ で表す．$\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = 0.a_1a_2\cdots a_k$ をみたす正の整数 s は存在しないことを示せ．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件 (a)，(b) をみたしながら動く．

(a) 点 A は平面 $z=0$ 上にある．

(b) 点 C(0, 0, 1) が線分 AB 上にある．

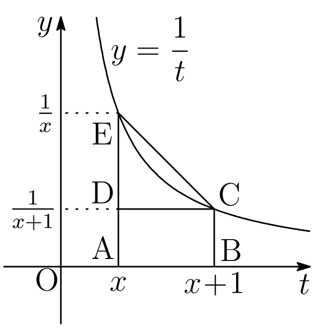
このとき，線分 AB が通過することのできる範囲を K とする．K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)=x\{\log(x+1)-\log x\}$，$g(x)=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= \log(x+1)-\log x + x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right) \\ &= \int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{x+1}, \\ g'(x) &= \log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right) \\ &= \int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right) \end{aligned}$$

区間 $x \leqq t \leqq x+1$ における $y=\dfrac{1}{t}$ のグラフと t 軸で囲まれた部分の面積，右の図の長方形ABCDおよび台形ABCEの面積の大小関係から



$$\frac{1}{x+1}<\int_x^{x+1}\frac{dt}{t}<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)$$

したがって　$f'(x)>0$，$g'(x)<0$

$f(x)$ は単調増加であるから

$$f(x)<\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=1$$

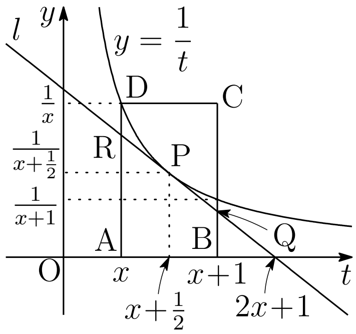
また　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{g(x)-f(x)\}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=0$

すなわち　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=1$

$g(x)$ は単調減少であるから　$\displaystyle g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=1$

したがって　$f(x)<1<g(x)$　よって　$\displaystyle\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

別解 曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ の点 $\mathrm{P}\left(x+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}\right)$ における接線を l とし $(x>0)$，l と直線 $t=x$，$t=x+1$ との交点をそれぞれ R，Q とする．右の図のように $x \leqq t \leqq x+1$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ および t 軸で囲まれた図形の面積と 2 つの四角形 ABCD および ABQR の面積との大小関係により



$$\frac{1}{x+\frac{1}{2}} < \int_x^{x+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{x} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{1}{x+\frac{1}{2}} < \log\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}$$

したがって $\qquad \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < 1 < \log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

よって $\qquad \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

補足 上の図から，$x>0$ のとき $\quad \dfrac{1}{x+1} < \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{dt}{t} < \frac{1}{x}$

別解と同様にして [1] $\qquad \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$

$h(x)=(x+1)\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと，上の図に注意して

$$\begin{aligned} h'(x) &= \log(x+1)-\log x+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right) \\ &= \int_x^{x+1}\frac{dt}{t}-\frac{1}{x} < 0 \end{aligned}$$

$f(x)$ は単調増加，$h(x)$ は単調減少であるから，前ページと同様の議論により

$$f(x) < 1 < h(x), \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = 1$$

$F(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$，$H(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+1}$ とすると

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} H(x) = e$$

$F(x)=H(-x-1)$ であるから

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} H(-x-1) = \lim_{x\to\infty} H(x-1) = e$$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} F(x)=e$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)=e$ であるから $\qquad \displaystyle\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

---

[1] 数列の証明は，http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2017_kouki.pdf の p.9 を参照．

2 (1) $n_1 \equiv 1 \pmod 3$, $n_2 = n_1 + 1$, $n_3 = n_1 + 2$ とする．
優勝チームが決まらず対戦が続くとき，勝者・敗者・控えは3順ごとに，次の (i),(ii) のように繰り返す．

(i) 初戦で A が B に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	A	C	B	$\cdots$	A	C	B	$\cdots$
敗者	B	A	C	$\cdots$	B	A	C	$\cdots$
控え	C	B	A	$\cdots$	C	B	A	$\cdots$

(ii) 初戦で B が A に勝つとき

回数	1	2	3	$\cdots$	n_1	n_2	n_3	$\cdots$
勝者	B	C	A	$\cdots$	B	C	A	$\cdots$
敗者	A	B	C	$\cdots$	A	B	C	$\cdots$
控え	C	A	B	$\cdots$	C	A	B	$\cdots$

n 試合目に A が優勝するのは，(i) の場合，$n \equiv 2 \pmod 3$ のとき，A は最後に C に勝って優勝し，(ii) の場合，$n \equiv 1 \pmod 3$ のとき，A は最後に B に勝って優勝する．これらの場合の確率は，ともに $\left(\frac{1}{2}\right)^n$．

よって，求める確率は

$$\boldsymbol{n \not\equiv 0 \text{ のとき } \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad n \equiv 0 \text{ のとき } 0 \qquad \pmod 3}$$

(2) (1) の結果から，A が最後に C に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

また，A が最後に B に勝って，優勝する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m-2}}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}$$

よって，求める条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}}{\frac{1}{7}\left\{2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\} + \frac{1}{7}\left\{\frac{1}{2} - 4\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\right\}} = \boldsymbol{\frac{1 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{5 - 12\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}}$$

補足 初項 a，公比 r，末項 l の等比数列の和は $\quad \boldsymbol{\dfrac{a - rl}{1 - r}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) R_1，R_2，R_3 は，それぞれ直線 P_1Q，P_2Q，P_3Q の点であるから，実数 t_1，t_2，t_3 を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR_1} &= \overrightarrow{OP_1} + t_1\overrightarrow{P_1Q} = (1,\ 0,\ 1) + t_1(-1,\ 0,\ a-1)\\ &= (1-t_1,\ 0,\ 1+t_1(a-1)),\\ \overrightarrow{OR_2} &= \overrightarrow{OP_2} + t_2\overrightarrow{P_2Q} = (1,\ 1,\ 1) + t_2(-1, -1,\ a-1)\\ &= (1-t_2,\ 1-t_2,\ 1+t_2(a-1)),\\ \overrightarrow{OR_3} &= \overrightarrow{OP_3} + t_3\overrightarrow{P_3Q} = (1,\ 0,\ 3) + t_3(-1,\ 0,\ a-3)\\ &= (1-t_3,\ 0,\ 3+t_3(a-3)),\end{aligned}$$

R_1，R_2，R_3 は，xy 平面上の点であるから

$$1+t_1(a-1)=0, \quad 1+t_2(a-1)=0, \quad 3+t_3(a-3)=0$$

これを解いて　$t_1 = \dfrac{1}{1-a}$，$t_2 = \dfrac{1}{1-a}$，$t_3 = \dfrac{3}{3-a}$

したがって

$$\overrightarrow{OR_1} = \left(\frac{a}{a-1},\ 0,\ 0\right),\ \overrightarrow{OR_2} = \left(\frac{a}{a-1},\ \frac{a}{a-1},\ 0\right),\ \overrightarrow{OR_3} = \left(\frac{a}{a-3},\ 0,\ 0\right)$$

ゆえに　$\overrightarrow{R_1R_2} = \left(0,\ \dfrac{a}{a-1},\ 0\right)$，$\overrightarrow{R_1R_3} = \left(\dfrac{2a}{(a-1)(a-3)},\ 0,\ 0\right)$

$0<a<3$ に注意して　$S(a) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{a}{a-1}\cdot\dfrac{2a}{(a-1)(3-a)} = \dfrac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$

両辺の対数をとって，微分すると

$$\begin{aligned}\log S(a) &= 2\log a - 2\log(a-1) - \log(3-a),\\ \frac{S'(a)}{S(a)} &= \frac{2}{a} - \frac{2}{a-1} + \frac{1}{3-a} = -\frac{2}{a(a-1)} + \frac{1}{3-a} = \frac{(a+3)(a-2)}{a(a-1)(3-a)}\\ S'(a) &= \frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}\cdot\frac{(a+3)(a-2)}{a(a-1)(3-a)} = \frac{a(a+3)(a-2)}{(a-1)^3(3-a)^2}\end{aligned}$$

a	(1)	$\cdots$	2	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	極小 4	$\nearrow$	

よって　最小値 $\boldsymbol{S(2)=4}$

$\boxed{\mathbf{4}}$ 3 点 A(1)，B(z)，C(z^2) を頂点とする三角形であるから　$z \neq 1$

$$\mathrm{AB} = |z-1| \qquad \mathrm{BC} = |z^2 - z| = |z||z-1| \qquad \mathrm{CA} = |z^2-1| = |z+1||z-1|$$

したがって　$\mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA} = 1 : |z| : |z+1|$

$\triangle$ABC が鋭角三角形であるとき，次の 3 式を満たせばよい．

$$1^2 + |z|^2 > |z+1|^2, \quad 1^2 + |z+1|^2 > |z|^2, \quad |z|^2 + |z+1|^2 > 1^2$$

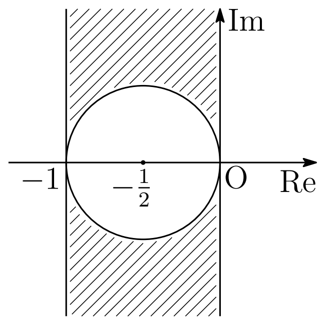
第 1 式から　$z + \overline{z} < 0$　すなわち　$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} < 0$　$\cdots$①

第 2 式から　$z + \overline{z} > -2$　すなわち　$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2} > -1$　$\cdots$②

第 3 式から　$|z|^2 + \dfrac{z+\overline{z}}{2} > 0$　すなわち　$\left|z + \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2}$　$\cdots$③

①〜③ より　$\begin{cases} -1 < \mathrm{Re}(z) < 0 \\ \left|z + \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{2} \end{cases}$

z の満たす領域は，右の図の斜線部分．
ただし，境界線を含まない．



$\boxed{\mathbf{5}}$ (1) $d_k = 0.a_1a_2\cdots a_k$ とおくと，$d_k \leqq \sqrt{n} - 10^k < d_k + 10^{-k}$ より

$$10^k + d_k \leqq \sqrt{n} < 10^k + d_k + 10^{-k}$$

上式の辺々を平方すると

$$10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + {d_k}^2 \leqq n < 10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + 2 + (d_k + 10^{-k})^2$$

ここで，$d_k{\cdot}10^k$ が整数であることと

$$0 < {d_k}^2 < 1, \quad 0 < (d_k + 10^{-k})^2 \leqq 1$$

であることに注意すると，求める正の整数 n は

$$\boldsymbol{n = 10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + 1,\ \ 10^{2k} + 2d_k{\cdot}10^k + 2}$$

(2) $d_k \leqq \sqrt{m} - p < d_k + 10^{-k}$ より

$$p + d_k \leqq \sqrt{m} < p + d_k + 10^{-k}$$

上式の辺々を平方すると

$$(p + d_k)^2 \leqq m < (p + d_k + 10^{-k})^2$$

p が $5{\cdot}10^{k-1}$ の整数のとき

$$\begin{aligned}(p + d_k + 10^{-k})^2 - (p + d_k)^2 &= 2(p + d_k){\cdot}10^{-k} + 10^{-2k} \\ &> 2p{\cdot}10^{-k} \geqq 2{\cdot}5{\cdot}10^{k-1}{\cdot}10^{-k} = 1\end{aligned}$$

よって，条件をみたす正の整数 m が存在する．

(3) $\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = d_k$ をみたす正の整数 s が存在するとき

$$\sqrt{s} = [\sqrt{s}\,] + d_k \quad (0 < d_k < 1)$$

これから $\sqrt{s}$ は有限小数，すなわち，有理数であるから

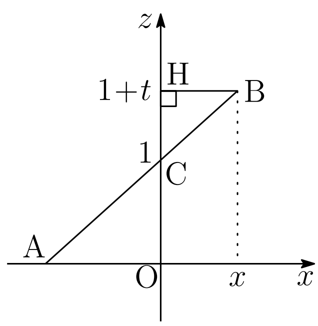
$$\sqrt{s} = \frac{q}{r} \quad (\text{正の整数}\ q,\ r\ \text{は互いに素})$$

とおき，両辺を平方すると

$$s = \frac{q^2}{r^2}$$

左辺は正の整数であるから，$r = 1$ となる．このとき，$\sqrt{s} = [\sqrt{s}\,] = q$ より，$\sqrt{s} - [\sqrt{s}\,] = 0$ であるから，条件をみたす正の整数 s は存在しない．

$\boxed{\mathbf{6}}$ B の z 座標を $1+t$ $(0 \leqq t \leqq 1)$，B から z 軸に降ろした垂線 BH の長さを x とすると



$$\mathrm{BC} = \sqrt{t^2+x^2}, \quad \mathrm{CA} = \frac{\mathrm{BC}}{t} = \frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t}$$

$\mathrm{BC}+\mathrm{CA} = 2$ であるから

$$\sqrt{t^2+x^2} + \frac{\sqrt{t^2+x^2}}{t} = 2$$

ゆえに　$\sqrt{t^2+x^2} = \dfrac{2t}{t+1}$　したがって　$x^2 = \left(\dfrac{2t}{t+1}\right)^2 - t^2$

求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi\int_0^1 x^2\,dt = \pi\int_0^1 \left\{\left(\frac{2t}{t+1}\right)^2 - t^2\right\}dt \\ &= \pi\int_0^1 \left\{\left(2-\frac{2}{t+1}\right)^2 - t^2\right\}dt \\ &= \pi\int_0^1 \left\{4-\frac{8}{t+1}+\frac{4}{(t+1)^2} - t^2\right\}dt \\ &= \pi\left[4t - 8\log(t+1) - \frac{4}{t+1} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \boldsymbol{\pi\left(\frac{17}{3} - 8\log 2\right)} \end{aligned}$$

極方程式による曲線の回転体の体積

xy 平面において，極方程式 $r = r(\theta)$ $(\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$ で表される曲線を x 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

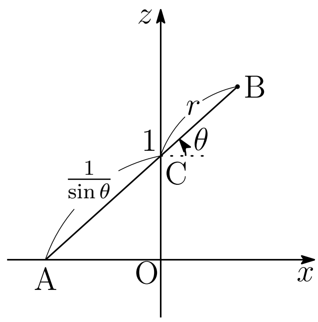
$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r(\theta)^3 \sin\theta\,d\theta \quad (0 \leqq \alpha < \beta \leqq \pi)}$$

また，この曲線を y 軸の回りに回転させた立体の体積 V は

$$\boldsymbol{V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r(\theta)^3 \cos\theta\,d\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \alpha < \beta \leqq \frac{\pi}{2}\right)}$$

証明 http://kumamoto.s12.xrea.com/N/KBdai/KBdai_ri_2016.pdf $\boxed{5}$ 参照

別解 zx 平面上で C を極として，$r=\mathrm{CB}$，CB と x 軸の正の向きとなす角を θ とすると，求める体積 V は



$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}r^3\cos\theta\,d\theta$$

このとき，$r=2-\dfrac{1}{\sin\theta}$ であるから

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2-\frac{1}{\sin\theta}\right)^3\cos\theta\,d\theta$$

ここで，$u=\sin\theta$ とおくと　$\dfrac{du}{d\theta}=\cos\theta$

θ	$\frac{\pi}{6}\longrightarrow\frac{\pi}{2}$
u	$\frac{1}{2}\longrightarrow 1$

$$\begin{aligned}V&=\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(2-\frac{1}{u}\right)^3du\\&=\frac{2\pi}{3}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(8-\frac{12}{u}+\frac{6}{u^2}-\frac{1}{u^3}\right)du\\&=\frac{2\pi}{3}\left[\,8u-12\log u-\frac{6}{u}+\frac{1}{2u^2}\,\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\\&=\boldsymbol{\pi\left(\frac{17}{3}-8\log 2\right)}\end{aligned}$$