平成 27 年度　東京大学 2 次試験前期日程 (数学問題)150 分
理科 (一類，二類，三類)　数 I・II・III・A・B

$\boxed{\mathbf{1}}$ 正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える．

$$C : y = ax^2 + \frac{1-4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ どの目も出る確率が $\dfrac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し，次のように左から順に文字を書く．さいころを投げ，出た目が 1，2，3 のときは文字列 AA を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く．さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA，B，C，D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく．たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2，5，6，3，4 であったとすると，得られる文字列は

AACDAAB

となる．このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である．

(1) n を正の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ．

(2) n を 2 以上の整数とする．n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を正の実数とし，p を正の有理数とする．
座標平面上の 2 つの曲線 $y = ax^p \ (x > 0)$ と $y = \log x \ (x > 0)$ を考える．この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする．以下の問いに答えよ．必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^p}{\log x} = \infty$ を証明なしに用いてよい．

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ．

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ．

(3) (2) で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ．

4 数列 $\{p_n\}$ を次のように定める．

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p_{n+2} = \frac{{p_{n+1}}^2 + 1}{p_n} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2 + {p_n}^2 + 1}{p_{n+1}p_n}$ が n によらないことを示せ．

(2) すべての $n = 2, 3, 4, \cdots$ に対し，$p_{n+1} + p_{n-1}$ を p_n のみを使って表せ．

(3) 数列 $\{q_n\}$ を次のように定める．

$$q_1 = 1, \quad q_2 = 1, \quad q_{n+2} = q_{n+1} + q_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

すべての $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し，$p_n = q_{2n-1}$ を示せ．

5 m を 2015 以下の正の整数とする．${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ．

6 n を正の整数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める．

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x) + 1}{2} & (|x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする．$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ をみたす x に対して $p \leqq f(x) \leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ．

$$p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q$$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める．

$$h(x) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

このとき，次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \int_{-1}^{1} h(nx)\log(1 + e^{x+1})\,dx$$

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ $C : y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$ を a について整理すると　$4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0$

$f(a) = 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1$ とおくと

$$f(a) = \begin{cases} 4(x^2-1)\left\{a - \dfrac{y}{2(x^2-1)}\right\}^2 + \dfrac{x^2-y^2-1}{x^2-1} & (x^2 \neq 1) \\ -4ya + 1 & (x^2 = 1) \end{cases}$$

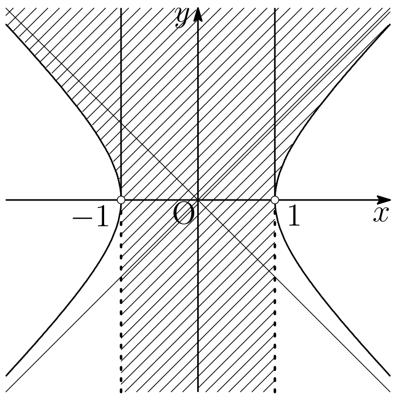
$f(a) = 0$ が正の解 a を持つためには，$f(0) = 1$ に注意して

(i) $x^2 - 1 < 0$　ゆえに　$|x| < 1$

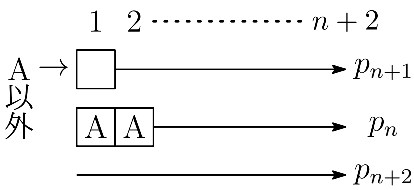
(ii) $x^2 - 1 > 0$，$\dfrac{y}{2(x^2-1)} > 0$，$\dfrac{x^2-y^2-1}{x^2-1} \leqq 0$
　ゆえに　$y > 0$，$x^2 - y^2 - 1 \leqq 0$ $(|x| > 1)$

(iii) $x^2 - 1 = 0$，$-4y < 0$　ゆえに　$y > 0$ $(|x| = 1)$

求める領域は，下の図の斜線部分．ただし，点線部の境界は含まない．



$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を p_n とすると，p_{n+2} は最初に出た目が 4，5，6 の場合と 1，2，3 の場合により



$$p_{n+2}=\frac{1}{2}p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n \quad (n \geqq 1) \quad \cdots(*)$$

このとき　$p_1=\dfrac{1}{2}$，$p_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{4}$

$(*)$ より　$p_{n+2}-p_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(p_{n+1}-p_n)$，

$p_{n+2}+\dfrac{1}{2}p_{n+1}=p_{n+1}+\dfrac{1}{2}p_n$

第 1 式から　$p_{n+1}-p_n=(p_2-p_1)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

第 2 式から　$p_{n+1}+\dfrac{1}{2}p_n=p_2+\dfrac{1}{2}p_1=1$

上の 2 式から　$\boldsymbol{p_n=\dfrac{2}{3}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right\} \quad (n \geqq 1)}$

(2) 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字列が B となる確率を q_n とすると，q_{n+2} は，(1) と同様に

$$q_{n+2}=\frac{1}{2}q_{n+1}+\frac{1}{2}q_n \quad (n \geqq 2) \quad \cdots(**)$$

このとき　$q_2=0$，$q_3=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{12}$

$(**)$ より　$q_{n+2}-q_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(q_{n+1}-q_n)$，

$q_{n+2}+\dfrac{1}{2}q_{n+1}=q_{n+1}+\dfrac{1}{2}q_n$

第 1 式から　$q_{n+1}-q_n=(q_3-q_2)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}=\dfrac{1}{12}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$

第 2 式から　$q_{n+1}+\dfrac{1}{2}q_n=q_3+\dfrac{1}{2}q_2=\dfrac{1}{12}$

上の 2 式から　$\boldsymbol{q_n=\dfrac{1}{18}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} \quad (n \geqq 2)}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = ax^p - \log x$ とおくと $(x > 0)$

$$f'(x) = apx^{p-1} - \frac{1}{x} = \frac{p}{x}\left(ax^p - \frac{1}{p}\right)$$

$aq^p = \dfrac{1}{p} \cdots$ ①，すなわち，$q = \dfrac{1}{(ap)^{\frac{1}{p}}}$ とおくと，$f'(q) = 0$ より

x	(0)	$\cdots$	q	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$

2 曲線 $y = ax^p\ (x > 0)$ と $y = \log x\ (x > 0)$ の共有点が 1 点のみであるとき，$f(q) = 0$ であるから

$$aq^p - \log q = 0 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　　$\boldsymbol{q = e^{\frac{1}{p}},\ a = \dfrac{1}{pe}}$

(2) 求める体積を V とすると

$$\begin{aligned}
\frac{V}{\pi} &= \int_0^q (ax^p)^2\,dx - \int_1^q (\log x)^2\,dx \\
&= a^2\left[\frac{1}{2p+1}x^{2p+1}\right]_0^q - \Big[x\{(\log x)^2 - 2\log x + 2\}\Big]_1^q \\
&= \frac{(aq^p)^2 q}{2p+1} - q\{(\log q)^2 - 2\log q + 2\} + 2 \\
&= \frac{q}{(2p+1)p^2} - q\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2\right) + 2 \\
&= q\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + \frac{4}{2p+1}\right) - q\left(\frac{1}{p^2} - \frac{2}{p} + 2\right) + 2 \\
&= \frac{q(2-4p)}{1+2p} + 2 = \frac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2
\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \pi\left\{\dfrac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2\right\}}$

(3) (2) の結果から，$V = 2\pi$ のとき

$$\pi\left\{\frac{e^{\frac{1}{p}}(2-4p)}{1+2p} + 2\right\} = 2\pi \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{p = \frac{1}{2}}$$

$\boxed{\mathbf{4}}$ (1) $p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$ $(n=1,2,3,\cdots)$ より

$$\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{1}{p_{n+1}}\left(p_{n+2}+\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}}\right)$$
$$=\frac{1}{p_{n+1}}\left(\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}+p_n\right)=\frac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$$

よって $\quad\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=\dfrac{{p_2}^2+{p_1}^2+1}{p_2p_1}=\dfrac{2^2+1^2+1}{2\cdot1}=\mathbf{3}$

(2) (1) の結果から，${p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1=3p_{n+1}p_n$ であるから

$${p_{n+1}}^2+1=p_n(3p_{n+1}-p_n)\quad \text{ゆえに}\quad \frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}=3p_{n+1}-p_n$$

したがって $\quad p_{n+2}=3p_{n+1}-p_n\cdots$① すなわち $\quad p_{n+2}+p_n=3p_{n+1}$

よって $\quad p_{n+1}+p_{n-1}=\boldsymbol{3p_n}$

(3) $q_1=1$，$q_2=1$，$q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ であるから，$q_3=q_2+q_1=2$

$$p_n=q_{2n-1}\quad(n=1,2,\cdots)\quad\cdots(*)$$

$p_1=q_1$，$p_2=q_3$ より，$n=1,\ 2$ のとき，$(*)$ は成立する．

$(*)$ が $n+1$ 以下の自然数について成立すると仮定すると，① より

$$\begin{aligned}p_{n+2}&=3q_{2n+1}-q_{2n-1}\\&=2q_{2n+1}+(q_{2n+1}-q_{2n-1})=2q_{2n+1}+q_{2n}\\&=(q_{2n+1}+q_{2n})+q_{2n+1}=q_{2n+2}+q_{2n+1}=q_{2n+3}\end{aligned}$$

したがって，$n+2$ のときも，$(*)$ が成立する．

よって，すべての自然数について，$(*)$ が成立する．

補足 漸化式より，$p_3=5$，$p_{n+2}p_n-{p_{n+1}}^2=1$ であるから $(n=1,2,\cdots)$

$$\frac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}-\frac{p_{n+1}+p_{n-1}}{p_n}=\frac{p_n(p_{n+2}+p_n)-p_{n+1}(p_{n+1}+p_{n-1})}{p_{n+1}p_n}$$
$$=\frac{(p_{n+2}p_n-{p_{n+1}}^2)-(p_{n+1}p_{n-1}-{p_n}^2)}{p_{n+1}p_n}=0$$

したがって $\quad\dfrac{p_{n+2}+p_n}{p_{n+1}}=\dfrac{p_3+p_1}{p_2}=\dfrac{5+1}{2}=3$

ここで，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とおくと

$$p_{n+2}-(\alpha^2+\beta^2)p_{n+1}+\alpha^2\beta^2p_n=0,\quad q_{n+2}-(\alpha+\beta)q_{n+1}+\alpha\beta q_n=0$$

よって $\quad p_n=\dfrac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{\alpha^2-\beta^2}=\dfrac{\alpha^{2n-1}-\beta^{2n-1}}{\alpha-\beta}$，$q_n=\dfrac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$

$\boxed{\mathbf{5}}$ 正の整数 k に対し，$k = l_k{\cdot}2^{n_k}$ (l_k は奇数, n_k は 0 以上の整数) とすると

$$ {}_{2015}\mathrm{C}_m = \prod_{k=1}^{m} \frac{2016-k}{k} = \prod_{k=1}^{m} \frac{63{\cdot}2^5 - l_k{\cdot}2^{n_k}}{l_k{\cdot}2^{n_k}} = \prod_{k=1}^{m} \frac{63{\cdot}2^{5-n_k} - l_k}{l_k} $$

$1 \leqq k < 2^5$ のとき，$0 \leqq n_k < 5$ であるから，$63{\cdot}2^{5-n_k} - l_k$ は奇数.

したがって，$1 \leqq m < 32$ のとき，${}_{2015}\mathrm{C}_m$ は奇数．次に

$$ {}_{2015}\mathrm{C}_{32} = \frac{63{\cdot}2^5 - 2^5}{2^5} \times {}_{2015}\mathrm{C}_{31} = 2{\cdot}31 \times {}_{2015}\mathrm{C}_{31} $$

は，偶数である．よって，求める最小の正の整数 m は　**32**

東京大学 1999 年前期 理科

(1) k を自然数とする．m を $m = 2^k$ とおくとき，$0 < n < m$ を満たすすべての整数 n について，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ.

(2) 以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ.

条件：$0 \leqq n \leqq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である.

解答　(1)

$$ {}_m\mathrm{C}_n = \frac{m \times {}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}}{n} = \frac{2^k \times {}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}}{n} $$

$m = 2^k$，$0 < n < m$ であるから，n が 2^{k-1} を因数にもつことがあっても 2^k を因数にもつことはないので，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数である.

(2) ${}_{m-1}\mathrm{C}_0 = 1$ および (1) の結果を ${}_{m-1}\mathrm{C}_j = {}_m\mathrm{C}_j - {}_{m-1}\mathrm{C}_{j-1}$ に適用すると，${}_{m-1}\mathrm{C}_j$ $(0 \leqq j \leqq m-1)$ は奇数.

${}_{2^k+1}\mathrm{C}_j = {}_{2^k}\mathrm{C}_{j-1} + {}_{2^k}\mathrm{C}_j$ であるから，(1) の結果により

$$ j = 2, 3, \cdots, 2^k - 1 \text{ のとき}\quad {}_{2^k+1}\mathrm{C}_j \text{ は偶数} $$

${}_{2^k+2}\mathrm{C}_j = {}_{2^k+1}\mathrm{C}_{j-1} + {}_{2^k+1}\mathrm{C}_j$ であるから，上の結果により

$$ j = 3, 4 \cdots, 2^k - 1 \text{ のとき}\quad {}_{2^k+2}\mathrm{C}_j \text{ は偶数} $$

順次繰り返すことにより，$i = 0, 1, \cdots, 2^k - 2$ に対して

$$ i + 1 \leqq j \leqq 2^k - 1 \text{ のとき}\quad {}_{2^k+i}\mathrm{C}_j \text{ は偶数} $$

よって　$\boldsymbol{m = 2^k - 1}$ **($\boldsymbol{k}$ は自然数)**

別解 整数を係数とする多項式を，偶数の係数を 0 に置き換え，奇数の係数を 1 に置き換える．2 つの整式がこの置き換えによって，等しくなるとき，この 2 つの整式は合同 ($\equiv$) とする．例えば，k を正の整数とすると

$$(1+x)^{2^k} \equiv 1 + x^{2^k},$$
$$(1+x)^{2^k-1} \equiv 1 + x + x^2 + \cdots + x^{2^k-1}$$

$2015 = 1024 + 512 + 256 + 128 + 64 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1$ であるから

$$\begin{aligned}(1+x)^{2015} &= (1+x)^{1024}(1+x)^{512}(1+x)^{256}(1+x)^{128}(1+x)^{64} \\ &\qquad \times (1+x)^{16}(1+x)^{8}(1+x)^{4}(1+x)^{2}(1+x) \\ \sum_{m=0}^{2015} {}_{2015}\mathrm{C}_m x^m &\equiv (1+x^{1024})(1+x^{512})(1+x^{256})(1+x^{128})(1+x^{64}) \\ &\qquad \times (1+x^{16})(1+x^{8})(1+x^{4})(1+x^{2})(1+x)\end{aligned}$$

右辺の係数が 0 になる最も次数の低い項は　x^{32}　よって　32

$\boxed{\mathbf{6}}$ (1)
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi x)+1}{2} & (|x| \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これより
$$g(nx) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi nx)+1}{2} & \left(|x| \leqq \frac{1}{n} \text{ のとき}\right) \\ 0 & \left(|x| > \frac{1}{n} \text{のとき}\right) \end{cases}$$

したがって
$$n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx = n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx \quad \cdots (*)$$

$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ のとき，$p \leqq f(x) \leqq q$，$g(nx) \geqq 0$ に注意して

$$np\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx \leqq n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx \leqq nq\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx$$

ここで
$$n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\,dx = \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \left[\frac{1}{2\pi}\sin(\pi t) + \frac{t}{2}\right]_{-1}^{1} = 1$$

上の諸式により
$$p \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)\,dx \leqq q$$

(2) $$h(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x) & (|x|\leqq 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (|x|>1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

これより $h(nx)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi nx) & (|x|\leqq \frac{1}{n}\text{のとき}) \\ 0 & (|x|>\frac{1}{n}\text{のとき}) \end{cases}$

したがって $n^2\displaystyle\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx = n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx$

$g'(x)=h(x)$ であるから

$$\begin{aligned}
&n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx \\
&=n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g'(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx = n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \{g(nx)\}'\log(1+e^{x+1})\,dx \\
&=n\Big[\ g(nx)\log(1+e^{x+1})\ \Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} - n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx \\
&=-\,n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx
\end{aligned}$$

ここで，$f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ $(-\frac{1}{n}\leqq x\leqq\frac{1}{n})$ とおくと，$f(x)$ は単調増加であるから

$f\left(-\dfrac{1}{n}\right)\leqq f(x)\leqq f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ すなわち $\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq f(x)\leqq\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$

$(*)$ および (1) の結果にこれを適用すると

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}=e$ から，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx=\frac{e}{1+e}$$

よって
$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})\,dx \\
&=\lim_{n\to\infty}\left\{-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)\,dx\right\}=-\boldsymbol{\frac{e}{1+e}}
\end{aligned}$$